

Jindřich Bečvář; Vlastimil Dlab
Hyperkomplexní čísla a maticové algebry

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 69 (2024), No. 2, 97–120

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152476>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Hyperkomplexní čísla a maticové algebry

Jindřich Bečvář, Vlastimil Dlab

Abstrakt. V článku jsou ukázány tři procesy, kterými z tělesa reálných čísel vznikají algebry komplexních, dvojných, resp. duálních čísel, což jsou jediné neizomorfní algebry dimenze 2, které mají jednotkový prvek. Stejnými procesy vznikají z tělesa komplexních čísel algebry kvaternionů, antikvaternionů, resp. semikvaternionů, a stejnými procesy vznikají z kvaternionů algebry oktáv, antioktáv, resp. semioktáv. Následně je pozornost věnována reprezentacím komplexních, dvojných a duálních čísel, kvaternionů, antikvaternionů a semikvaternionů v reálných, resp. komplexních maticových algebrách. Článek zakončuje obsáhlá historická poznámka.

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktávy

Uvažujme nejprve následující operace $\oplus$ (sčítání) a $\times$ (násobení) dvojic $[z_1, z_2]$, $[w_1, w_2]$:¹

$$[z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2], \quad (1)$$

$$[z_1, z_2] \times [w_1, w_2] = [z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}], \quad (2)$$

kde pruh nad symboly značí „sdružování“ (viz dále).

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 reálná čísla, zavádí předpis (2) všeobecně známé násobení komplexních čísel. V tomto případě v něm nehrají žádnou roli ani „sdružování“ ani pořadí činitelů, neboť násobení reálných čísel je komutativní. Komplexní čísla většinou nezapíšeme jako dvojice $[a_1, a_2]$ reálných čísel, ale jako dvojčleny $a_1 + a_2 i$. Říkáme, že se sčítají po složkách, viz (1), a násobí distributivně s pomocí identity $i^2 = -1$, viz (2):

$$(a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Množina všech komplexních čísel tvoří komutativní těleso (pole), které obvykle značíme $\mathbb{C}$. Je rozšířením tělesa $\mathbb{R}$ reálných čísel, má řadu důležitých vlastností. Uvedme jen to, že každý polynom s komplexními (a tedy i reálnými) koeficienty nenulového stupně n má v tělese $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost) – tomuto tvrzení se říká *Základní věta algebry*. Připomeňme, že existují polynomy s reálnými koeficienty, které v tělese $\mathbb{R}$ nemají žádný kořen, např. polynom $x^2 + 1$. Říkáme, že těleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel je *algebraicky uzavřené*, zatímco těleso $\mathbb{R}$ reálných čísel algebraicky uzavřené není.

¹Pozornému čtenáři může vrtat hlavou, proč jsou součiny čísel z a w v rovnosti (2) zapsány pokaždé v jiném pořadí. Má to hluboký smysl, jak uvidíme později.

Doc. RNDr. JINDŘICH BEČVÁŘ, CSc., Katedra aplikované matematiky, Fakulta dopravní
ČVUT v Praze, Na Florenci 25, 110 00 Praha 1, e-mail: becvajin@fd.cvut.cz,
prof. RNDr. VLASTIMIL DLAB, DrSc., F.R.S.C., Bzí, 468 22 Železný Brod,
e-mail: vlastimil73@hotmail.com

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 komplexní čísla, je vztahem (2) dán předpis pro násobení *kvaternionů*. Nyní je již „sružování“ podstatné, ale pořadí činitelů nehraje roli, neboť násobení komplexních čísel je komutativní. Kvaterniony většinou nezapisujeme jako dvojice $[z_1, z_2]$ komplexních čísel, ale jako čtyřčleny, tj. čtyřsložková čísla²

$$\alpha = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k,$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou reálná čísla a symboly i, j, k jakési nové „komplexní jednotky“. Kvaterniony se sčítají po složkách, to vyplývá z rovnosti (1), a násobí distributivně jako mnohočleny pomocí identit

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

Násobení kvaternionů je tedy popsáno vztahem

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2i + a_3j + a_4k) \cdot (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k) = \\ = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i + \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k. \end{aligned}$$

Kvaterniony tvoří nekomutativní těleso, které budeme značit symbolem $\mathbb{H}$ nebo $\mathbb{H}(\oplus, \times)$. *Sdruženým kvaternionem* k výše uvedenému kvaternionu α je kvaternion

$$\bar{\alpha} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k,$$

inverzním kvaternionem k nenulovému kvaternionu α je kvaternion

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{N(\alpha)} \cdot \bar{\alpha}, \quad \text{kde} \quad N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

je tzv. *norma kvaternionu* α .³

Těleso $\mathbb{H}(\oplus, \times)$ je rozšířením tělesa $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel. Má značně odlišné vlastnosti oproti tělesu $\mathbb{C}$; ihned je např. vidět, že **tři** základní jednotky i, j, k jsou kořeny polynomu **druhého** stupně $x^2 + 1$, stupeň polynomu tedy není roven počtu jeho kořenů.

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 kvaterniony, pak předpis (2) definuje násobení tzv. *oktáv*, kterým se též říká *Cayleyova* nebo *Cayleyova-Gravesova čísla*. V tomto případě je v předpisu (2) podstatné jak „sružování“, tak pořadí činitelů, neboť násobení kvaternionů není komutativní. Oktávy se většinou nezapisují jako dvojice kvaternionů, ale jako osmisložková čísla⁴

$$\alpha = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + a_5l + a_6m + a_7n + a_8o,$$

²Dvojici komplexních čísel $[a_1 + a_2i, b_1 + b_2i]$ přiřadíme kvaternion $a_1 + a_2i + b_1j + b_2k = a_1 + a_2i + (b_1 + b_2i)j$.

³Laskavý čtenář dokáže platnost asociativního zákona pro násobení kvaternionů (stačí jej prověřit pro jednotky i, j, k) a platnost distributivních zákonů.

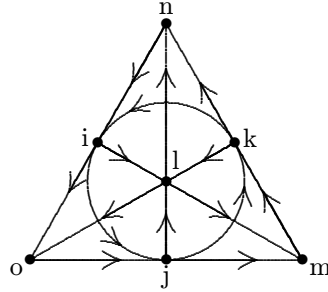
⁴Dvojici kvaternionů $[a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, b_1 + b_2i + b_3j + b_4k]$ přiřadíme oktávu $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + b_1l + b_2m + b_3n + b_4o = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)l$.

kde $a_1, \dots, a_8$ jsou reálná čísla, i, j, k, l, m, n, o jsou nové „komplexní jednotky“; oktávy se sčítají po složkách a násobí distributivně pomocí obdobných identit jako u kvaternionů:

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1,$$

$$\begin{array}{lll} ij = k = -ji, & jk = i = -kj, & ki = j = -ik, \\ lm = i = -ml, & mi = l = -im, & il = m = -li, \\ on = i = -no, & ni = o = -in, & io = n = -oi \quad \text{atd.} \end{array}$$

Násobení jednotek i, j, k, l, m, n, o se často znázorňuje na následující obrázku (odmyslíme-li si šipky, jedná se o tzv. *Fanův matroid*⁵): součin dvou sousedních jednotek ležících na společné linii (úsečce, resp. kružnici, které chápeme jako cyklus) je roven třetí jednotce této linie se znaménkem $+$, pokud jdeme ve směru šipky, resp. znaménkem $-$, pokud jdeme naopak (viz výše uvedené identity).



K výše uvedené oktávě α je *sduženou oktávou* oktáva

$$\bar{\alpha} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k - a_5l - a_6m - a_7n - a_8o.$$

Inverzní oktávou k nenulové oktávě α je oktáva

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{N(\alpha)} \cdot \bar{\alpha}, \quad \text{kde} \quad N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2$$

je tzv. *norma oktávy* α .⁶

Množina všech oktáv Ω , resp. $\Omega(\oplus, \times)$ tvoří zajímavou číselnou strukturu, která však nemá tak pěkné vlastnosti jako těleso kvaternionů. Násobení oktáv není komutativní, není ani asociativní, tj. neplatí rovnost

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

pro libovolné zvolené oktávy α, β, γ , např. $(ij)l \neq i(jl)$. Násobení je však *alternativní*, tj. asociativní zákon „platí“ pro libovolné dvě oktávy α, β :

$$\alpha(\beta\beta) = (\alpha\beta)\beta, \quad \alpha(\beta\alpha) = (\alpha\beta)\alpha, \quad \alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta, \quad (3)$$

⁵Italský matematik Gino Fano (1871–1952) se zabýval zejména projektivní a algebraickou geometrií, je považován za zakladatele konečné geometrie. *Fanův matroid* znázorňuje konečnou projektivní rovinu druhého řádu, která má sedm bodů a sedm přímek.

⁶Laskavý a pilný čtenář si s pomocí zmíněných identit (Fanova matroidu) cvičně vynásobí dvě obecné oktávy.

přičemž z libovolných dvou těchto identit se dá odvodit třetí. Oktávy tvoří *alternativní nekomutativní těleso*, které není asociativní. Jeho podtělesem je těleso kvaternionů.

Násobení vícesložkových čísel (např. komplexních čísel, kvaternionů a oktáv) vyjádřených n -ticemi, které je distributivní vzhledem ke sčítání, lze v obecné podobě popsat rovností

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (c_1, \dots, c_n), \quad \text{kde} \quad c_i = \sum_{j,k=1}^n \varepsilon_{j,k}^i a_j b_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

s pevně danými reálnými koeficienty $\varepsilon_{j,k}^i$.

2. Dvojná čísla, antikvaterniony, antioktávy

Uvažujme nyní operace $\oplus$ (sčítání) a $\odot$ (násobení) dvojic $[z_1, z_2]$, $[w_1, w_2]$ definované takto:

$$[z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2], \quad (5)$$

$$[z_1, z_2] \odot [w_1, w_2] = [z_1 w_1 + \overline{w_2} z_2, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}]. \quad (6)$$

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 reálná čísla, zavádí předpis (6) násobení tzv. *dvojných čísel* (s reálnými koeficienty). V tomto případě nehraje roli ani „sdružování“, ani pořadí činitelů. Dvojná čísla zapisujeme obvykle jako dvojčleny, tj. dvousložková čísla tvaru $z_1 + z_2 e$, která se sčítají po složkách, viz (5), a násobí distributivně pomocí identity $e^2 = 1$, viz (6):

$$(a_1 + a_2 e)(b_1 + b_2 e) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e.$$

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 komplexní čísla, je předpisem (6) zavedeno násobení *antikvaternionů*, resp. *štěpitelných kvaternionů*, resp. *parakvaternionů*. Nyní je „sdružování“ podstatné, ale pořadí činitelů nehraje roli, neboť násobení komplexních čísel je komutativní. Antikvaterniony lze vyjádřit jako čtyřčleny, tj. čtyřsložková čísla⁷

$$a_1 + a_2 i + a_3 e + a_4 f, \quad \text{kde} \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R},$$

která se sčítají po složkách, viz (5), a násobí distributivně s pomocí následujících identit, viz (6):⁸

$$i^2 = -1, \quad e^2 = f^2 = 1, \quad ie = f = -ei, \quad fe = i = -ef, \quad fi = e = -if.$$

Násobení antikvaternionů je popsáno vztahem

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 i + a_3 e + a_4 f) \cdot (b_1 + b_2 i + b_3 e + b_4 f) = \\ = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3) i + \\ + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) e + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) f. \end{aligned}$$

⁷Dvojici komplexních čísel $[a_1 + a_2 i, b_1 + b_2 i]$ přiřadíme antikvaternion $a_1 + a_2 i + b_1 e + b_2 f = a_1 + a_2 i + (b_1 + b_2 i) e$. Antikvaternion je dvojné číslo s komplexními koeficienty.

⁸Laskavý, pilný a vytrvalý čtenář si s pomocí zmíněných identit cvičně vynásobí dva obecné antikvaterniony.

O antikvaternionech viz např. [41].

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 kvaterniony, zavádí předpis (6) násobení tzv. *antioktáv*, *štěpitelných oktáv*, resp. *Cayleyových–Dicksonových čísel*. Lze je vyjádřit jako osmi-složková čísla

$$a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + a_5p + a_6q + a_7r + a_8s,$$

kde $a_1, \dots, a_8 \in \mathbb{R}$, která se sčítají po složkách a násobí distributivně s pomocí obdobně vyjádřených identit jako u antikvaternionů:⁹

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad p^2 = q^2 = r^2 = s^2 = 1,$$

$$ip = q = -pi, \quad qi = p = -iq, \quad qp = i = -pq,$$

$$ri = s = -ir, \quad is = r = -si, \quad rs = i = -sr \quad \text{atd.}$$

V tomto případě je již podstatné jak „sdužování“, tak pořadí činitelů, neboť násobení kvaternionů není komutativní.

Všechny tyto struktury, dvojná čísla $\mathbb{C}(\oplus, \odot)$, antikvaterniony $\mathbb{H}(\oplus, \odot)$ i antioktávy $\Omega(\oplus, \odot)$, jsou okruhy, které mají netriviální dělitele nuly, tj. existují v nich nenulové prvky, jejichž součin je roven nule. Například pro dvojná čísla, resp. antikvaterniony platí rovnost

$$(a + ae)(b - be) = 0, \quad \text{resp.} \quad (ai + ae)(bi + be) = 0,$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

3. Duální čísla, semikvaterniony, semioktávy

Uvažujme nyní operace $\oplus$ (sčítání) a $\otimes$ (násobení) dvojic $[z_1, z_2], [w_1, w_2]$ definované takto:

$$\begin{aligned} [z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] &= [z_1 + w_1, z_2 + w_2], \\ [z_1, z_2] \otimes [w_1, w_2] &= [z_1w_1, w_2z_1 + z_2\overline{w}_1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 reálná čísla, zavádí předpis (7) násobení tzv. *duálních čísel*. V tomto případě nehraje roli ani „sdužování“ ani pořadí činitelů. Duální čísla zapisujeme obvykle jako dvojčleny $a_1 + a_2e$, které se sčítají po složkách a násobí distributivně s pomocí identity $e^2 = 0$, viz (7):

$$(a_1 + a_2e)(b_1 + b_2e) = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)e.$$

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 komplexní čísla, je vzorcem (7) zavedeno násobení *semikvaternionů*. Nyní je „sdužování“ podstatné, ale pořadí činitelů nehraje roli. Semikvaterniony lze vyjádřit jako čtyřsložková čísla¹⁰

$$a_1 + a_2i + a_3e + a_4f, \quad \text{kde} \quad a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R},$$

⁹Dvojici kvaternionů $[a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, b_1 + b_2i + b_3j + b_4k]$ přiřadíme antioktávu $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + b_1p + b_2q + b_3r + b_4s = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)p$. Antioktáva je dvojné číslo s kvaternionovými koeficienty.

Laskavý, trpělivý a mimořádně vytrvalý čtenář nalezne pomocí předpisu (6) identity vyjadřující násobení jednotek 1, i, j, k, p, q, r, s a vynásobí dvě obecné antioktávy.

¹⁰Dvojici komplexních čísel $[a_1 + a_2i, b_1 + b_2i]$ přiřadíme semikvaternion $a_1 + a_2i + b_1e + b_2f = a_1 + a_2i + (b_1 + b_2i)e$. Semikvaternion je duální číslo s komplexními koeficienty.

která se sčítají po složkách a násobí distributivně s pomocí identit

$$i^2 = -1, \quad e^2 = f^2 = 0, \quad ie = f = -ei, \quad fi = e = -if, \quad fe = 0 = ef.$$

Násobení semikvaternionů je popsáno vztahem

$$(a_1 + a_2i + a_3e + a_4f) \cdot (b_1 + b_2i + b_3e + b_4f) = a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i + \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)e + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)f.$$

Budou-li z_1, z_2, w_1, w_2 kvaterniony, zavádí předpis (7) násobení tzv. *semioktáv*. Lze je vyjádřit jako osmisložková čísla

$$a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + a_5p + a_6q + a_7r + a_8s, \quad \text{kde } a_1, \dots, a_8 \in \mathbb{R},$$

která se sčítají po složkách a násobí distributivně s pomocí obdobně vyjádřených identit jako u semikvaternionů:¹¹

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad p^2 = q^2 = r^2 = s^2 = 0,$$

$$ip = q = -pi, \quad qi = p = -iq, \quad ri = s = -ir, \quad is = r = -si \quad \text{atd.}$$

a všechny vzájemné součiny jednotek e, f, g, h jsou nulové. V tomto případě je již podstatné jak „sdruzování“, tak pořadí činitelů, neboť násobení kvaternionů není komutativní.

Všechny tyto algebry, duální čísla $\mathbb{C}(\oplus, \otimes)$, semikvaterniony $\mathbb{H}(\oplus, \otimes)$ i semioktávy $\Omega(\oplus, \otimes)$, jsou okruhy, které mají netriviální dělitele nuly.

4. Algebry, algebry s dělením

Matematiky zpočátku nejvíce zajímaly struktury, které byly blízké číselným oborům, zejména racionálním, resp. reálným číslům. Uvažovali, co mají společného a čím se naopak odlišují. Proces abstrakce, který je v matematice zcela zásadní, vedl k utváření obecných pojmů. Připomeňme je.

Komutativní těleso reálných čísel, komutativní těleso komplexních čísel, nekomutativní těleso kvaternionů a nekomutativní alternativní těleso oktáv lze chápat jako reálné vektorové prostory $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^8$. Přidáním výše uvedené operace násobení se tyto vektorové prostory stávají *reálnými algebrami s dělením*.

Rovněž dvojná čísla, antikvaterniony a antioktávy, resp. duální čísla, semikvaterniony a semioktávy lze chápat jako reálné vektorové prostory $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^8$. Přidáním vhodné operace násobení (viz výše) se tyto struktury stávají *reálnými algebrami*.

Uvedme nyní pro pořádek exaktní definice.

Definice. *Algebrou* nad komutativním tělesem (polem) $\mathbb{F}$ rozumíme vektorový prostor A nad tělesem $\mathbb{F}$, v němž je definována binární operace násobení, která je svázána se sčítáním distributivními zákony a s násobením skalárem identitou

$$a \cdot (\alpha \cdot \beta) = (a \cdot \alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (a \cdot \beta), \quad a \in \mathbb{F}, \quad \alpha, \beta \in A.$$

Reálnou algebrou rozumíme algebru nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel.

¹¹Dvojici kvaternionů $[a_1 + a_2i + a_3j + a_4k, b_1 + b_2i + b_3j + b_4k]$ přiřadíme semioktávu $a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + b_1p + b_2q + b_3r + b_4s = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + (b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)p$. Semioktáva je duální číslo s kvaternionovými koeficienty.

Definice. *Algebrou s dělením* (division algebra) nazýváme algebru A , v níž pro každé $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq 0$, existují jednoznačně určené prvky ξ, η , pro které $\alpha \cdot \xi = \beta$, $\eta \cdot \alpha = \beta$; hovoříme o *existenci a jednoznačnosti řešení rovnic*.

Poznámka. Má-li algebra A konečnou dimenzi, lze podmínku *existence a jednoznačnosti řešení rovnic* nahradit ekvivalentní podmínkou *neexistence netriviálních děliteľů nuly*, tj. implikací

$$\alpha, \beta \in A, \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ nebo } \beta = 0.$$

Předpokládejme, že algebra A nemá netriviální dělitele nuly. Jestliže je $\alpha \in A$ nenulový prvek, pak zobrazení f_α definované vztahem $f_\alpha(\xi) = \alpha\xi$ je prostým endomorfismem vektorového prostoru A , neboť nenulovému prvku ξ odpovídá nenulový prvek $\alpha\xi$. Má-li algebra A konečnou dimenzi, je f_α automorfismem, tedy pro každý prvek $\beta \in A$ existuje jediný prvek ξ , pro který je $\alpha\xi = \beta$. Stejně se dokáže existence jediného prvku η , pro který je $\eta\alpha = \beta$. Naopak je zjevné, že algebra, v níž platí podmínka existence a jednoznačnosti řešení rovnic, nemůže mít netriviální dělitele nuly.

Poznámka. Zdůrazněme, že je-li algebra alternativní (případně asociativní), je existence a jednoznačnost řešení rovnic ekvivalentní s existencí jednotkového prvku a inverzních prvků.

Předpokládejme, že A je alternativní algebrou s dělením, tj. pro každé dva prvky $\alpha, \beta \in A$ platí (3).

Jestliže je $\alpha \in A$ nenulový prvek, pak existuje (nenulový) prvek $\beta \in A$, pro který je $\beta\alpha = \alpha$. Nyní je

$$\beta(\beta\alpha) = (\beta\beta)\alpha = \beta\alpha, \quad \text{a tedy } \beta\beta = \beta.$$

Pro libovolně zvolený prvek $\xi \in A$ je

$$(\beta\beta)\xi = \beta(\beta\xi) = \beta\xi, \quad \text{a tedy } \beta\xi = \xi.$$

Obdobně je

$$(\xi\beta)\beta = \xi(\beta\beta) = \xi\beta, \quad \text{a tedy } \xi\beta = \xi.$$

Prvek β je tedy jednotkovým prvkem algebry A , píšme $\beta = 1$. Ke každému nenulovému prvku $\xi \in A$ existuje prvek $\eta \in A$, pro který je $\eta\xi = 1$. Je tedy

$$\xi(\eta\xi) = \xi \cdot 1 = 1 \cdot \xi, \quad \text{odtud } (\xi\eta)\xi = 1 \cdot \xi, \quad \text{a tedy } \xi\eta = 1.$$

Prvek η je inverzním prvkem k prvku ξ .

Naopak, pokud v algebře A existuje jednotkový prvek a existují inverzní prvky, pak algebra zřejmě splňuje podmínku existence a jednoznačnosti řešení rovnic.

Poznámka. Vždy je vhodné připomenout nějaký objekt, který pod danou definici nespádá. Všeobecně známá algebra $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ reálných čtvercových matic řádu n (s obvyklým sčítáním a násobením matic a násobením matice reálným číslem) není pro $n > 1$ algebrou s dělením, neboť má netriviální dělitele nuly. Z lineární algebry víme, že je izomorfní s algebrou endomorfismů vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, která tedy rovněž není algebrou s dělením. Rovněž algebry dvojných čísel, antikvaternionů, antioktáv, duálních čísel, semikvaternionů a semioktáv nejsou algebrami s dělením, neboť obsahují netriviální dělitele nuly, jak jsme již viděli.

Velkým problémem byl *popis všech reálných algeber s dělením*, s výsledky jeho řešení se seznámíme v dalším textu.

5. Součty čtverců, normované algebry

Pro reálná čísla a, b platí rovnost $|a| \cdot |b| = |ab|$, tj. absolutní hodnota součinu dvou reálných čísel je rovna součinu absolutních hodnot těchto dvou čísel. Obdobné tvrzení platí i pro komplexní čísla: absolutní hodnota součinu dvou komplexních čísel je rovna součinu absolutních hodnot těchto dvou čísel. Tato fakta můžeme vyjádřit (po umocnění) takto: pro reálná čísla a, b je

$$a^2 \cdot b^2 = (ab)^2, \quad (8)$$

pro komplexní čísla $a_1 + a_2i, b_1 + b_2i$ je

$$(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2. \quad (9)$$

Obdobná identita platí i pro kvaterniony. Pro libovolně zvolené kvaterniony

$$\alpha = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k \quad \text{a} \quad \beta = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$$

je

$$N(\alpha) \cdot N(\beta) = N(\alpha \cdot \beta),$$

neboli

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\ = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Rovněž pro libovolné oktávy α, β platí rovnost $N(\alpha) \cdot N(\beta) = N(\alpha \cdot \beta)$. Po dosazení dostaneme obdobný vzorec jako (10) – figurují však v něm součty osmi čtverců:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 + b_8^2) = \\ = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7 - a_8b_8)^2 + \\ + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_5b_6 - a_6b_5 - a_7b_8 + a_8b_7)^2 + \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 + a_5b_7 + a_6b_8 - a_7b_5 - a_8b_6)^2 + \\ + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_8 - a_6b_7 + a_7b_6 - a_8b_5)^2 + \\ + (a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 - a_4b_8 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3 + a_8b_4)^2 + \\ + (a_1b_6 + a_2b_5 - a_3b_8 + a_4b_7 - a_5b_2 + a_6b_1 - a_7b_4 + a_8b_3)^2 + \\ + (a_1b_7 + a_2b_8 + a_3b_5 - a_4b_6 - a_5b_3 + a_6b_4 + a_7b_1 - a_8b_2)^2 + \\ + (a_1b_8 - a_2b_7 + a_3b_6 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_3 + a_7b_2 + a_8b_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Identitám (8), (9), (10) a (11), které souvisí s násobením reálných čísel, komplexních čísel, kvaternionů a oktáv a týkají se n -tic pro $n = 1, 2, 4, 8$, se říkalo *zákon norem*,

resp. *zákon modulů*.¹² Otázku, zda obdobné identity platí i pro nějaká jiná přirozená čísla, vyjádříme exaktní formulací: chceme vědět, pro jaká přirozená čísla n existují rovnosti

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) = c_1^2 + \dots + c_n^2, \quad (12)$$

kde $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou libovolná reálná čísla a

$$c_i = \sum_{j,k=1}^n \varepsilon_{jk}^i a_j b_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

s pevně danými reálnými koeficienty ε_{jk}^i .

Povšimněme si, že ve výše uvedených identitách (8), (9), (10) a (11) figurují jako koeficienty ε_{jk}^i pouze nuly, jedničky a minus jedničky a že v těchto identitách je zachyceno násobení komplexních čísel, kvaternionů a oktáv – viz (4).

Zavedeme další pojmy.

Definice. Normou prvku $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ reálné algebry $\mathbb{R}^n$ rozumíme reálné číslo

$$N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Definice. Reálná algebra $\mathbb{R}^n$ se nazývá *normovaná* (normed algebra), jestliže pro každé dva její prvky α, β platí rovnost

$$N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta). \quad (13)$$

Reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktávy jsou tedy reálnými normovanými algebrami, jejichž dimenze jsou 1, 2, 4, 8.

Uvědomme si, že existence identity (12) pro konkrétní n je ekvivalentní s existencí reálné normované algebry dimenze n .

Jednoduchým důsledkem předchozích úvah je následující poznatek.

Věta. Každá normovaná algebra konečné dimenze je algebrou s dělením.

Ze vztahu (13) a z definice normy totiž ihned vyplývá, že normovaná algebra nemůže mít netriviální dělitele nuly a podle předchozího je tedy algebrou s dělením.

Poznámka. Na problematiku vzorců pro součty čtverců se můžeme podívat i z hlediska teorie čísel. Z předchozího vyplývá, že

- součin přirozených čísel, která je možno vyjádřit jako součet dvou čtverců, lze opět vyjádřit jako součet dvou čtverců přirozených čísel – viz (9),
- součin přirozených čísel, která je možno vyjádřit jako součet čtyř čtverců, lze opět vyjádřit jako součet čtyř čtverců přirozených čísel – viz (10),
- součin přirozených čísel, která je možno vyjádřit jako součet osmi čtverců, lze opět vyjádřit jako součet osmi čtverců přirozených čísel – viz (11).

Tedy množina všech přirozených čísel, která je možno vyjádřit jako součet dvou (čtyř, osmi) čtverců, je uzavřená na násobení.

¹²Law of the modulí podle Hamiltona.

6. Aritmetizace roviny a prostoru

V článku [3], který vyšel v Pokrocích k 150. výročí objevu kvaternionů, je elementárním způsobem dokázáno, že rovinu lze aritmetizovat pouze třemi způsoby, z nichž pouze jeden dává komutativní těleso, a že prostor rozumným způsobem aritmetizovat nelze. Připomeneme tyto výsledky exaktními formulacemi.

Věta. *Existují právě tři neizomorfní reálné algebry dimenze 2, které mají jednotkový prvek: algebra duálních čísel, algebra dvojných čísel a algebra komplexních čísel.*

Jak jsme viděli v předchozích odstavcích, na komplexní čísla navazují kvaterniony a oktávy, na dvojná čísla antikvaterniony a antioktávy a na duální čísla semikvaterniony a semioktávy.

Věta. *Neexistuje reálná algebra s dělením dimenze 3, která má jednotkový prvek.*¹³

7. Maticové reprezentace

V matematice nezřídka nalézáme překvapivé souvislosti a nové pohledy, které nás vedou k hlubšímu porozumění jednotlivým pojmům a tvrzením.¹⁴ Dochází k němu často až s odstupem času, přichází postupně, většinou „per partes“.

I nadaní studenti mívají pocit, že když dané matematické tvrzení či významnou větu umí dokázat, že jim již rozumí. Nemusí tomu tak vždy být. Pochopení nejružnějších souvislostí a důsledků jim může ještě delší dobu unikat. A právě přes vidění souvislostí vede cesta k důkladnějšímu porozumění pojmům, tvrzením i samotným matematickým strukturám a teoriím.

Opravdové porozumění vyžaduje hlubší vhled do jádra daného problému. V následujících odstavcích poukážeme na strukturní souvislosti číselných oborů (algeber) komplexních, dvojných a duálních čísel, kvaternionů, antikvaternionů a semikvaternionů na jedné straně a okruhů (algeber) matic druhého, resp. čtvrtého řádu na straně druhé. Ukážeme, jak se prvky zmíněných číselných oborů dají reprezentovat maticemi.

Během druhé poloviny 19. století se postupně objevovaly příklady tzv. *reprezentací*, tj. představení prvků jedné struktury pomocí prvků jiné struktury. Jedním z velmi známých výsledků tohoto typu je *Cayleyova věta o reprezentaci* konečné grupy podgrupou symetrické grupy všech permutací jejího nosiče. Uvedme ji jako motivaci pro další výklad.

Nechť $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ je konečná grupa a S_k grupa všech permutací k -prvkové množiny G (tzv. *symetrická grupa stupně k* , která má $k!$ prvků).

Snadno se ukáže, že zobrazení

$$\Psi: G \rightarrow S_k, \quad x \rightarrow \psi_x = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_k \\ xg_1 & xg_2 & \dots & xg_k \end{pmatrix},$$

je grupový homomorfismus, tj.

$$\Psi(x \cdot y) = \psi_{x \cdot y} = \psi_x \circ \psi_y = \Psi(x) \circ \Psi(y).$$

¹³Zcela elementární důkaz podal Kenneth O. May (1915–1977) roku 1966 v práci [48].

¹⁴Hlubší porozumění elementární matematice je tématem studie [47], jejíž autorkou je Liping Ma (nar. 1957). Zdůrazňují je například články Vlastimila Dlabu [17] a [18], který před časem českou matematickou komunitu na výsledky Liping Ma upozornil.

Navíc se snadno nahlédne, že zobrazení Ψ je prosté. Jedná se tedy o monomorfismus, tedy o izomorfní vnoření grupy G do grupy $\mathbb{S}_k$, které vyjadřuje zmíněnou Cayleyovu větu o reprezentaci konečné grupy tzv. *permutační grupou*, tj. reprezentaci prvků grupy G permutacemi. Každou konečnou grupu tak můžeme chápat jako grupu nějakých permutací. Grupovému násobení v G odpovídá skládání permutací v $\mathbb{S}_k$ označené symbolem $\circ$.¹⁵

Předchozí stručné informace o komplexních číslech, kvaternionech a antikvaternionech nyní dáme do souvislosti s maticemi. Komplexní čísla budeme reprezentovat reálnými maticemi druhého řádu, rovněž tak antikvaterniony; navíc ukážeme souvislost těchto dvou reprezentací.

V první řadě zavedeme izomorfní vnoření tělesa $\mathbb{C}$ komplexních čísel do nekomutativního okruhu $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ čtvercových reálných matic druhého řádu:

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad F(a_1 + a_2 i) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Přitom je norma komplexního čísla (tj. dvojmoc absolutní hodnoty) rovna determinantu odpovídající matice. Těleso komplexních čísel tedy můžeme považovat za podtěleso okruhu reálných matic druhého řádu, které je tvořeno všemi maticemi výše uvedeného tvaru. Připomeňme, že těleso $\mathbb{C}$ je reálnou algebrou s dělením, která má dimenzi 2, a okruh $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ reálnou algebrou dimenze 4, v níž existují netriviální dělitelé nuly.

Bohatství algebry $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ oceníme již v tom okamžiku, když si uvědomíme, že uvedené izomorfní vnoření F tělesa $\mathbb{C}$ do algebry $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ není zdaleka jediné. Poměrně snadno ověříme, že existuje nekonečně mnoho izomorfních vnoření $F_{t,r}$ tělesa $\mathbb{C}$ do této algebry. Popsána jsou předpisem

$$F_{t,r}: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad F_{t,r}(a_1 + a_2 i) = \begin{pmatrix} a_1 + ta_2 & ra_2 \\ -sa_2 & a_1 - ta_2 \end{pmatrix}, \quad (14*)$$

kde t, r, s jsou reálná čísla, pro která je $t^2 = rs - 1$. Pro $r = s = 1, t = 0$ dostáváme předchozí speciální případ.

Na první pohled „jednoduchá“ algebra reálných matic druhého řádu v sobě obsahuje nekonečně mnoho podtěles izomorfních tělesu komplexních čísel.

Nyní se podíváme na vztah okruhu antikvaternionů, který označíme $\mathbb{H}(\oplus, \odot)$, a okruhu reálných matic druhého řádu $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.¹⁶ V obou, jak víme, existují netriviální dělitelé nuly.

Antikvaterniony budeme reprezentovat dvojicemi komplexních čísel, každému antikvaternionu přiřadíme pomocí zobrazení Φ reálnou matici druhého řádu:

$$\Phi: \mathbb{H}(\oplus, \odot) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad \Phi([a_1 + a_2 i, b_1 + b_2 i]) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & b_1 + a_2 \\ b_1 - a_2 & a_1 - b_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Toto zobrazení je bijekcí, neboť každá matice z $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ má jediný vzor:

$$\Phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right) = \left[\frac{p+s}{2} + \frac{q-r}{2}i, \frac{q+r}{2} + \frac{p-s}{2}i \right].$$

¹⁵ Arthur Cayley tento výsledek publikoval v krátké stati [9] roku 1878.

¹⁶ Připomeňme, že oba tyto okruhy jsou reálnými algebry dimenze 4.

Nyní je rutinní záležitostí ukázat, že Φ je okruhovým homomorfismem, tj. zobrazení Φ „komutuje“ se sčítáním a násobením.¹⁷ Pro libovolné $[z_1, z_2]$, $[w_1, w_2]$ totiž platí rovnosti

$$\begin{aligned}\Phi([z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2]) &= \Phi([z_1, z_2]) + \Phi([w_1, w_2]), \\ \Phi([z_1, z_2] \odot [w_1, w_2]) &= \Phi([z_1, z_2]) \cdot \Phi([w_1, w_2]).\end{aligned}$$

První rovnost lze snadno nahlédnout, neboť operace $\oplus$ je „jednoduchá“, druhou je třeba prověřit mechanickým výpočtem.¹⁸

Bijektivní zobrazení Φ je tedy okruhový izomorfismus, snadno si uvědomíme, že je rovněž izomorfismem algeber. Znamená to, že okruh (algebra) antikvaternionů (s operacemi $\oplus$, $\odot$ a s násobením antikvaternionu reálným číslem) není ničím jiným než okruhem (algebrou) čtvercových reálných matic (s obvyklými operacemi). Antikvaterniony jsme tedy pomocí izomorfismu Φ reprezentovali reálnými maticemi druhého řádu. Naopak, reálné matice druhého řádu s obvyklým sčítáním a násobením $+$, $\cdot$ můžeme pomocí izomorfismu Φ^{-1} reprezentovat antikvaterniony, tj. dvojicemi komplexních čísel s operacemi $\oplus$ a $\odot$.

Dejme dále do souvislosti izomorfismus Φ s výše uvedeným izomorfním vnořením F tělesa $\mathbb{C}$ komplexních čísel do okruhu $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ – viz (14) a (15). Podle definice zobrazení Φ je

$$\begin{aligned}\Phi([a_1 + a_2 i, 0]) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = F(a_1 + a_2 i), \\ \Phi([0, b_1 + b_2 i]) &= \begin{pmatrix} b_2 & b_1 \\ b_1 & -b_2 \end{pmatrix} = F(b_1 + b_2 i) \cdot J, \quad \text{kde } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Je tedy

$$\Phi([z_1, z_2]) = F(z_1) + F(z_2) \cdot J. \quad (16)$$

Izomorfismus Φ lze tedy popsat pomocí dvou exemplářů výše uvedeného vnoření F tělesa $\mathbb{C}$ komplexních čísel do okruhu matic $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Uvědomme si rovněž, že každý antikvaternion (resp. reálná matice druhého řádu, která jej reprezentuje) je rovností (16) vyjádřen jako dvojnásobek s maticovými koeficienty; novou „komplexní jednotkou“ je zde matice J , jejíž druhá mocnina je jednotkovou maticí.

Na vztah maticových operací v $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a operaci v $\mathbb{H}(\oplus, \odot)$ se můžeme podívat ještě trochu jinak. Jsou-li matice $A, B \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ obrazy dvojic $[z_1, z_2]$, $[w_1, w_2]$ komplexních čísel při izomorfismu Φ , je

$$\begin{aligned}A + B &= \Phi([z_1, z_2]) + \Phi([w_1, w_2]) = \Phi([z_1 + w_1, z_2 + w_2]) = \\ &= F(z_1 + w_1) + F(z_2 + w_2) \cdot J, \\ A \cdot B &= \Phi([z_1, z_2]) \cdot \Phi([w_1, w_2]) = \Phi([z_1 w_1 + \overline{w_2} z_2, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}]) = \\ &= F(z_1 w_1 + \overline{w_2} z_2) + F(w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}) \cdot J.\end{aligned}$$

¹⁷Jestliže nejprve zobrazíme, a pak sečteme, dojdeme ke stejnému výsledku, jako když nejprve sečteme, a pak zobrazíme. Stejně pro násobení. Poznamenejme, že proslulá věta *Mez stínu vrženého je vrženým stínem meze stínu vlastního* rovněž vyjadřuje záměnnost zobrazování (vržení stínu) a operace (utvoření meze stínu).

¹⁸Prověření obou vztahů přenecháváme laskavému, pilnému a vytrvalému čtenáři.

Tyto dva vztahy znovu ukazují vazbu maticových operací $+$, $\cdot$ s operacemi $\oplus$ a $\odot$ – viz (5) a (6), a vztah izomorfismu

$$\Phi: \mathbb{H}(\oplus, \odot) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

a izomorfního vnoření

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

který je zachycen identitou (16).

Na okruh $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se můžeme dívat jako na reálnou algebru dimenze 4. Uvedme nyní explicitně, jaké antikvaterniony, resp. dvojice komplexních čísel, odpovídají v izomorfismu Φ elementárním maticím tvořícím standardní bázi této algebry:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f, & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \left[\frac{1}{2}i, \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}e, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}e, & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}i \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}f. \end{aligned}$$

Nalezli jsme tedy bázi algebry $\mathbb{H}(\oplus, \odot)$, která při izomorfismu Φ odpovídá standardní bázi algebry $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Zcela na okraj ještě poznamenejme, že ke každému vnoření $F_{t,r}$, které bylo definováno předpisem (14*), je možno definovat izomorfismus

$$\Phi_{t,r}: \mathbb{H}(\oplus, \odot_{t,r}) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad (15*)$$

kde $\odot_{t,r}$ je patřičně definované násobení na množině všech uspořádaných dvojic komplexních čísel. Izomorfismů algebry antikvaternionů a algebry reálných matic druhého řádu tedy existuje nekonečně mnoho.

Na strukturu reálných čtvercových matic druhého řádu jsme se podívali z trochu jiného úhlu, v souvislostech s hyperkomplexními čísly. Snad jsme výše uvedenými úvahami přispěli k rozšíření obzorů a k hlubšímu porozumění struktuře nekomutativního okruhu (algebry) $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ reálných matic druhého řádu. Shrňme nyní předchozí poznatky v exaktní podobě:

Teorém. *Těleso komplexních čísel je izomorfní s nekonečně mnoha podtělesy algebry reálných matic druhého řádu. Jedním z možných izomorfismů je*

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad F(a_1 + a_2i) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Algebra antikvaternionů je izomorfní s algebrou reálných matic druhého řádu. Jeden z možných izomorfismů je

$$\Phi: \mathbb{H}(\oplus, \odot) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \quad \Phi([a_1 + a_2i, b_1 + b_2i]) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & b_1 + a_2 \\ b_1 - a_2 & a_1 - b_2 \end{pmatrix}.$$

Přitom je

$$\Phi([a_1 + a_2i, b_1 + b_2i]) = F(a_1 + a_2i) + F(b_1 + b_2i) \cdot J,$$

$$\text{kde } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vraťme se ještě ke kvaternionům, tj. k nekomutativnímu tělesu $\mathbb{H}(\oplus, \times)$. V první řadě zdůrazníme, že neexistuje izomorfismus algebry kvaternionů a algebry čtvercových reálných matic druhého řádu obdobný výše zmíněnému izomorfismu Φ algebry antikvaternionů a algebry matic. Algebra kvaternionů nemůže být izomorfní s algebrou matic, v níž existují netriviální dělitelé nuly. Nemůže být izomorfní ani s nějakou podalgebrou této algebry, neboť jak kvaterniony, tak matice jsou reálnými algebry dimenze 4.

Stejně tak algebra semikvaternionů, která má dimenzi 4, nemůže být izomorfní s algebrou reálných matic druhého řádu. Snadno se ukáže, že neexistují lineárně nezávislé matice A a B , pro které by bylo $A^2 = B^2 = AB = BA = 0$ a které by odpovídaly jednotkám e , f .

Připomeňme ještě, že algebry dvojných čísel a duálních čísel můžeme izomorfně vnořit do algebry reálných matic druhého řádu přiřazeními

$$a_1 + a_2 e \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad a_1 + a_2 e \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

a algebry kvaternionů, antikvaternionů a semikvaternionů lze izomorfně vnořit do algebry komplexních matic druhého řádu. Pro kvaterniony se jedná o zobrazení

$$\Gamma_K: \mathbb{H}(\oplus, \times) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad \Gamma_K(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & a_3 + a_4 i \\ -a_3 + a_4 i & a_1 - a_2 i \end{pmatrix}.$$

Kvaterniony jsou tímto způsobem reprezentovány komplexními maticemi druhého řádu, které mají uvedený tvar. Přitom je norma kvaternionu rovna determinantu odpovídající matice. Reálná algebra kvaternionů dimenze 4 je zobrazením Γ_K izomorfně vnořena do reálné algebry komplexních matic, která má dimenzi 8. Pro antikvaterniony, resp. semikvaterniony uvažujeme izomorfní vnoření

$$\Gamma_A: \mathbb{H}(\oplus, \odot) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad \Gamma_A(a_1 + a_2 i + a_3 e + a_4 f) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & a_3 + a_4 i \\ a_3 - a_4 i & a_1 - a_2 i \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_S: \mathbb{H}(\oplus, \otimes) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}), \quad \Gamma_S(a_1 + a_2 i + a_3 e + a_4 f) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & a_3 + a_4 i \\ 0 & a_1 - a_2 i \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme ještě, že algebry kvaternionů, antikvaternionů a semikvaternionů je možno izomorfně vnořit do algebry reálných matic čtvrtého řádu přiřazeními¹⁹

$$a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$a_1 + a_2 i + a_3 e + a_4 f \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

¹⁹Dvojmoc normy kvaternionu je v tomto případě rovna determinantu příslušné matice.

$$a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{e} + a_4\mathbf{f} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Na závěr zdůrazníme, že algebry oktáv, antioktáv a semioktáv, které nejsou asociativní, není možno vnořit do algeber matic, které jsou asociativní.

Uvedme ještě přehledné schéma:

Sčítání	Sčítání	Sčítání
$[z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] =$ $= [z_1 + w_1, z_2 + w_2]$	$[z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] =$ $= [z_1 + w_1, z_2 + w_2]$	$[z_1, z_2] \oplus [w_1, w_2] =$ $= [z_1 + w_1, z_2 + w_2]$
Násobení	Násobení	Násobení
$[z_1, z_2] \times [w_1, w_2] =$ $= [z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}]$	$[z_1, z_2] \odot [w_1, w_2] =$ $= [z_1 w_1 + \overline{w_2} z_2, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}]$	$[z_1, z_2] \otimes [w_1, w_2] =$ $= [z_1 w_1, w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}]$
Komplexní čísla	Dvojná čísla	Duální čísla
$a_1 + a_2\mathbf{i}, \mathbf{i}^2 = -1$	$a_1 + a_2\mathbf{e}, \mathbf{e}^2 = 1$	$a_1 + a_2\mathbf{e}, \mathbf{e}^2 = 0$
$\mathbb{C} = \mathbb{C}(\oplus, \times) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$	$\mathbb{C}(\oplus, \odot) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$	$\mathbb{C}(\oplus, \otimes) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$
Kvaterniony	Antikvaterniony	Semikvaterniony
$a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} + a_4\mathbf{k}$	$a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{e} + a_4\mathbf{f}$	$a_1 + a_2\mathbf{i} + a_3\mathbf{e} + a_4\mathbf{f}$
$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$	$\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{e}^2 = \mathbf{f}^2 = 1$	$\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{e}^2 = \mathbf{f}^2 = 0$
$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = \mathbf{j}$	$\mathbf{ie} = \mathbf{f}, \mathbf{fe} = \mathbf{i}, \mathbf{fi} = \mathbf{e}$	$\mathbf{ie} = \mathbf{f}, \mathbf{fi} = \mathbf{e}, \mathbf{fe} = 0$
$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$	$\mathbf{ei} = -\mathbf{f}, \mathbf{ef} = -\mathbf{i}, \mathbf{if} = -\mathbf{e}$	$\mathbf{ei} = -\mathbf{f}, \mathbf{if} = -\mathbf{e}, \mathbf{ef} = 0$
	$\mathbb{H}(\oplus, \odot) \simeq \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$	
	$\begin{pmatrix} a_1 + a_4 & a_3 + a_2 \\ a_3 - a_2 & a_1 - a_4 \end{pmatrix}$	
$\mathbb{H} = \mathbb{H}(\oplus, \times) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$	$\mathbb{H}(\oplus, \odot) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$	$\mathbb{H}(\oplus, \otimes) \subset \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$
$\begin{pmatrix} a_1 + a_2\mathbf{i} & a_3 + a_4\mathbf{i} \\ -a_3 + a_4\mathbf{i} & a_1 - a_2\mathbf{i} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 + a_2\mathbf{i} & a_3 + a_4\mathbf{i} \\ -a_3 - a_4\mathbf{i} & a_1 - a_2\mathbf{i} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 + a_2\mathbf{i} & a_3 + a_4\mathbf{i} \\ 0 & a_1 - a_2\mathbf{i} \end{pmatrix}$
$\mathbb{H} = \mathbb{H}(\oplus, \times) \subset \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$	$\mathbb{H}(\oplus, \odot) \subset \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$	$\mathbb{H}(\oplus, \otimes) \subset \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$
Oktávy	Antioktávy	Semioktávy
$\Omega(\oplus, \times)$	$\Omega(\oplus, \odot)$	$\Omega(\oplus, \otimes)$

8. Historie

Komplexní čísla se poprvé objevila roku 1545 v knize *Ars magna* italského matematika, lékaře, přírodovědce a filozofa Gerolama Cardana (1501–1576), který si s nimi ještě příliš nevěděl rady. Hlubšímu a úspěšnému zkoumání je podrobil italský matematik Rafael Bombelli (1526–1572) ve své učebnici *L'Algebra parte maggiore dell'Arimetica* z roku 1572. Během 16. až 18. století s nimi mnozí matematici pracovali stále odvážněji. Byli to zejména Albert Girard (1595–1632), René Descartes (1596–1650), který pro komplexní čísla užíval termín *imaginaire*, John Wallis (1616–1703), Isaac Newton (1643–1727), Johann Bernoulli (1667–1748), Abraham de Moivre (1667–1754), Roger Cotes (1682–1716), a posléze Leonhard Euler (1707–1783), který se roku 1777 inspiroval Descartovým termínem *imaginaire* a označil komplexní jednotku písmenem i . Teprve během první poloviny 19. století byla zásluhou několika matematiků pochopena geometrická podstata komplexních čísel; byli to především Caspar Wessel (1745–1818) roku 1797, Jean Robert Argand (1768–1822) roku 1806, John Warren (1796–1852) roku 1828 a 1829, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zejména roku 1831 v práci [27], William Rowan Hamilton (1805–1865) roku 1843 a Augustin Louis Cauchy (1789–1857) roku 1847. Z jejich prací vyplynulo, že komplexní čísla lze chápat jako body roviny opatřené kartézskou souřadnou soustavou, resp. jako odpovídající vektory, které tyto body spojují s počátkem. Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání těchto vektorů (vektorový rovnoběžník), násobení komplexních čísel souvisí s rotacemi roviny. Vyjádříme-li komplexní čísla α, β v goniometrickém tvaru, je součin $\alpha\beta$ čísel α, β určen součinem jejich absolutních hodnot a součtem jejich argumentů. Hovoříme o *Gaussově rovině*, *Cauchyho rovině* nebo o *Argandově rovině*.

Poznamenejme, že Gauss již roku 1831 uvažoval o tom, zda lze obor komplexních čísel rozšířit na nějaký větší číselný obor, v němž by platily všechny aritmetické zákony, tj. zda lze těleso $\mathbb{C}$ rozšířit na nějaké větší komutativní těleso (viz [27], s. 178). Tato otázka rovněž trápila Hamiltona, irského matematika, fyzika a astronoma, který se v třicátých letech marně pokoušel vytvořit rozumný číselný obor trojsložkových čísel, která by aritmetizovala prostor podobným způsobem jako komplexní čísla aritmetizují rovinu. Myšlenka čtyřsložkových čísel a vzorec pro násobení základních jednotek $1, i, j, k$ ho napadly v Dublinu 16. října 1843 na kamenném mostě přes tzv. *Canal*. Jeho objev kvaternionů dnes připomíná deska umístěná na tomto mostě.²⁰

Připojme ještě několik poznámek o dřívějším výskytu vzorce pro násobení čtveřic reálných čísel, který vyjadřuje násobení kvaternionů. Vzorec (10) pro součin součtů čtyř čtverců, v němž je implicitně obsažen vzorec pro násobení kvaternionů, zmínil Leonhard Euler v dopisu Christianu Goldbachovi (1690–1764) roku 1748.²¹ Rovnost (10) nacházíme až na nepodstatné změny ve znaménkách i v dalších Eulerových pracích (viz např. [22], s. 369).

Mírně modifikovanou rovnost (10) uvedl roku 1798 v knize *Théorie des nombres* Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Upozornil na to, že obdobný vzorec pro tři čtverce

²⁰O objevu kvaternionů viz Hamilton: *Papers* 3, 103–116, 142–144, xv–xvi.

²¹Eulerův dopis Goldbachovi ze 4. května 1748 viz [26], díl I, s. 452. Vzorec (9) znal Euler v souvislosti s komplexními čísly.

v oboru celých čísel neexistuje. Uvedl příklad

$$(1 + 1 + 1) \cdot (16 + 4 + 1) = 63$$

a zdůraznil, že číslo 63 dává při dělení osmi zbytek 7 a žádné číslo tvaru $8n + 7$ není možno vyjádřit jako součet tří čtverců celých čísel.²²

Gauss vyšetřoval roku 1819 násobení čtveřic reálných čísel téměř identické s násobením kvaternionů v souvislosti s transformacemi trojrozměrného prostoru (viz [29], s. 358). Vzorec (10) vyjádřil pomocí absolutních hodnot dvojic komplexních čísel (viz [28], s. 384). Hamilton dospěl k násobení kvaternionů a k identitě (10) (zákon modulů) až roku 1843.

Připojme ještě malou historickou poznámku o problematice součtu čtyř čtverců, který úzce souvisí s identitou (10).

Roku 1621 vydal Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638) Diofantovu *Aritmetiku*. Inspirován Diofantem poznamenal, že patrně každé přirozené číslo je součtem dvou, tří nebo čtyř čtverců a své tvrzení prověřil pro čísla menší než 325. Později bylo toto tvrzení označováno jako *Bachetova věta*. Dokázal ji až roku 1770 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) v práci [45]. O tři roky později podal jednodušší důkaz Euler v příspěvku [23]; tvrzení nejprve dokázal pro prvočísla a pomocí vzorce (10) je rozšířil na všechna přirozená čísla. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) doplnil v pracích roku 1828 a 1834 (viz [36], [38] a [37]) Bachetovu větu a Lagrangeův důkaz počtem takových vyjádření:

Nechť n je přirozené číslo a k součet všech jeho lichých dělitelů. Je-li n sudé, pak existuje $24k$ uspořádaných čtveřic celých čísel (a, b, c, d) , pro která je $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Je-li n liché, existuje takových čtveřic jen $8k$.²³

Adolf Hurwitz (1859–1919) podal roku 1896 ryze algebraický důkaz tohoto tvrzení v práci [33], v níž se věnoval dělitelnosti v okruhu tzv. *celých kvaternionů*, tj. kvaternionů

$$a + bi + cj + dk, \quad \text{resp.} \quad a + \frac{1}{2} + \left(b + \frac{1}{2}\right)i + \left(c + \frac{1}{2}\right)j + \left(d + \frac{1}{2}\right)k,$$

kde a, b, c, d jsou celá čísla. Problém převedl na hledání celých kvaternionů dané normy n . Podrobněji tyto otázky podal roku 1919 v knížce [35]. Viz též [20].

Hamiltonův objev kvaternionů motivoval další matematiky. Již koncem roku 1843 objevil oktávy irský právník a matematik John Thomas Graves (1806–1870), roku 1845 dospěl ke stejné struktuře britský právník a matematik Arthur Cayley (1821–1895). Proto se oktávám též říká *Cayleyova* nebo *Cayleyova–Gravesova čísla*.²⁴

Připomeňme, že dánský matematik C. P. Degen (1776–1825) publikoval roku 1818 v práci [12] dvě varianty vzorce (11) pro násobení dvou součtů osmi čtverců, které odpovídají násobení oktáv. Chybně se domníval, že obdobné vzorce existují pro čísla n , která jsou mocninou dvojky. Jeho práce však zcela zapadla. Později bylo nalezeno

²²Viz [46], 1. vydání: s. 200, 2. vydání: s. 184, 3. vydání: s. 213.

²³Laskavý čtenář může vzorec zkusmo prověřit pro malá přirozená čísla n .

²⁴Graves své výsledky publikoval až roku 1848, zatímco Cayley již roku 1845 (*Collected papers I*, s. 127, XI, s. 368–371).

několik dalších variant vzorce (11). Nedlouho po objevu kvaternionů dospěli k identitě (11) J. T. Graves a Cayley v souvislosti s objevem oktáv. Graves se neúspěšně pokoušel nalézt obdobný vzorec pro šestnáct čtverců.²⁵

Německý matematik Hermann Hankel (1839–1873) v knize [31] z roku 1867 ukázal, že odpověď na Gaussovu otázku z roku 1831 je záporná: komplexní čísla nelze rozšířit na větší číselný obor, v němž by platily všechny aritmetické zákony, tj. komutativní těleso komplexních čísel nelze rozšířit na větší komutativní těleso (viz [31], s. 106–108). Rovněž Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) se v šedesátých letech k tomuto problému vyjádřil v přednáškách na berlínské univerzitě. Ukázal, že každá reálná komutativní algebra dimenze větší než 2 má netriviální dělitele nuly (viz též [60]).

V bezprostřední návaznosti na Hamiltonův objev kvaternionů se v druhé polovině 19. století řada matematiků zabývala hledáním a vyšetřováním nejrozumnějších struktur *hyperkomplexních čísel*, tj. množin k -složkových čísel

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_k\xi_k.$$

Zvolili přirozené číslo k a zadávali nejrozumnější předpisy pro násobení jednotek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Některé takové struktury rozšiřovaly těleso komplexních čísel (tj. $\xi_1 = 1, \xi_2^2 = -1$), jiné na zachování struktury komplexních čísel rezignovaly. Koeficienty $a_1, \dots, a_k$ mohla být reálná čísla, ale i komplexní čísla, kvaterniony apod. Tak se postupně rodily další algebry – triplety (De Morgan 1844, 1849), grupové algebry (Cayley, 1854), matice (Cayley, 1858), dvojná čísla, duální čísla, různé typy kvaternionů, oktáv atd. Konkrétními algebry se zabývali například Augustus De Morgan (1806–1871), George Peacock (1791–1858), bratři John Thomas Graves, Charles Graves (1812–1899), Arthur Cayley a další.

Teorie hyperkomplexních čísel se ve druhé polovině 19. století bouřlivě rozvíjela. Od prvních příkladů konkrétních číselných struktur (komplexní čísla, kvaterniony, oktávy) přes zprvu podivné struktury, v nichž již nebylo možno bez omezení dělit, dospěla matematika v poslední třetině 19. století k budování abstraktní teorie lineárních algeber. Konkrétní materiál vyplynul z výzkumu většího množství různých systémů hyperkomplexních čísel. Významnou úlohu sehrála algebra matic, která se ukázala být mimořádně důležitou pro další vývoj matematiky a jejích nejrozumnějších aplikací.

Roku 1862 vydal Hermann Günther Grassmann (1809–1877) inovovanou verzi své knihy *Die Lineale Ausdehnungslehre* z roku 1844 pod modifikovaným názvem *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form begründet*. Mimo jiné se v ní objevila idea algebry, které se dnes říká Grassmannova (též vnější algebra) dimenze 2^n . Hankel ji prezentoval a popularizoval roku 1867 v knize [31].

Hamilton vydal velké monografie *Lectures on Quaternions* (1853) a *Elements of Quaternions* (1866). V té první (art. 669) zavedl tzv. *bikvaterniony*, tj. kvaterniony s komplexními koeficienty (tzv. hyperbolické bikvaterniony). Tato struktura obsahuje netriviální dělitele nuly, například

$$(i + I)(i - I) = 0,$$

²⁵O problematice součtů čtverců lze nalézt mnoho informací v Dicksonově knize *History of theory of numbers* [15]. Viz 2. díl, zejména kapitoly VI. *Sums of Two Squares*, s. 225–257, VII. *Sums of Three Squares*, s. 259–274, VIII. *Sums of Four Squares*, s. 275–303, IX. *Sums of n Squares*, s. 305–323.

kde i je komplexní jednotka a I kvaternionová jednotka. Vyšetřoval též antikvaterniony.

Anglický matematik a filozof William Kingdon Clifford (1845–1879) studoval od roku 1873 další dva typy bikvaternionů – čísla tvaru $\alpha + \beta\omega$, kde α, β jsou kvaterniony a pro jednotku ω je buď $\omega^2 = 0$, nebo $\omega^2 = 1$ (tzv. parabolické bikvaterniony, resp. eliptické bikvaterniony). V této práci se tak objevila idea duálních a dvojných čísel. Roku 1878 Clifford modifikoval Grassmannovu algebru a zavedl algebru, která nese jeho jméno. Je jistou modifikací Grassmannovy algebry, i její dimenze je 2^n .

S obecným pojmem *lineární asociativní algebra* přišel Benjamin Peirce (1809–1880) roku 1870 v přednášce, která se uskutečnila na půdě *National Academy of Sciences* ve Washingtonu. Sto exemplářů Peirceho práce bylo vydáno nedlouho poté. Roku 1881 – již po jeho smrti – vyšla pod názvem *Linear associative algebra* [53] v časopisu *American Mathematical Journal*. Poznamenejme, že Peirce vytvořil mimo jiné (neúplný) seznam 162 asociativních algeber dimenze nejvýše 6, které popsal multiplikativními tabulkami pro násobení „komplexních jednotek“. Přišel s důležitými pojmy (*nilpotentní* a *idempotentní* prvek) a s plodnými náměty pro studium strukturních otázek rodící se teorie algeber. V nových teoretických výsledcích rychle narůstala obecnost přístupu.

Ve 20. století výrazně přispěli k teorii algeber hlavně Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948), zejména prací *On hypercomplex numbers* z roku 1908, později Amalie Emmy Noetherová (1882–1935) a Emil Artin (1898–1962), kteří rozvíjeli obecnou teorii algeber nad libovolným tělesem.

Americký matematik Leonard Eugene Dickson (1874–1954) prezentoval výše zmíněný proces zdvojení například roku 1919 v práci [13]. Zdůraznil, že kvaterniony vznikají z komplexních čísel a oktávy z kvaternionů podle stejného principu jako komplexní čísla z čísel reálných. Tento princip je vyjádřen právě výše uvedenou dvojicí předpisů (1) a (2) pro operace sčítání $\oplus$ a násobení $\times$. Poznamenejme, že zdvojení oktáv již k rozumné číselné struktuře nevede, ve vzniklé algebře existují netriviální dělitelé nuly, tj. není v ní možno bez omezení dělit. O algebrách dimenze 16 viz např. [13]. Velký význam měly Dicksonovy knihy *Linear algebras* z roku 1914 a *Algebras and their arithmetics* z roku 1923.

Na počátku dvacátých let zavedl Dickson antioktávy jako dvojice kvaternionů, jejichž sčítání a násobení je definováno identitami (5) a (6): dvojná čísla vznikají z čísel reálných, antikvaterniony z čísel komplexních a antioktávy z kvaternionů.

9. Frobeniova věta, Hurwitzova věta

Věnujme se ještě historii popisu reálných algeber s dělením a popisu normovaných algeber. Již jsme ukázali, že každá normovaná algebra konečné dimenze je algebrou s dělením.

Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) dokázal roku 1878 v práci [25], že konečně-dimenzionální reálné asociativní algebry s dělením jsou pouze tři – reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony, tedy algebry, které již byly známé. Novým výsledkem však bylo, že neexistují žádné jiné. Zdůrazněme, že důležitým předpokladem byla asociativita. Jeho výsledek je známý pod názvem *Frobeniova věta*. Její pěkné důkazy později publikovali Charles Sanders Peirce (1836–1914) v krátkém článku [54], Élie Cartan

(1869–1951) v rozsáhlé práci [7], Franz X. Grisseman [30] a další matematici. Jednoduchý důkaz podal Richard Sheldon Palais (nar. 1931) roku 1968 v článku [51].

Německý matematik Adolf Hurwitz dokázal roku 1898 v práci [34], že reálné normované algebry dimenze n mohou existovat jen pro $n = 1, 2, 4, 8$. V té době již byly známé asociativní algebry reálných čísel, komplexních čísel a kvaternionů a alternativní algebra oktáv. Novým výsledkem bylo, že nemohou existovat normované algebry jiných dimenzí. Důkaz Hurwitzovy věty později modifikoval Dickson v práci [13]. Modernější důkaz lze nalézt například v Curtisově článku [10] z roku 1963, či v jeho učebnici [11], s. 306–314; Curtis využil výsledky Nathana Jacobsona (1910–1999) publikované v práci [39] z roku 1958. Odkázat můžeme i na důkaz Hanse Freudenthala (1905–1990) uvedený v knížce *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie* [24]. Připomeňme pro zajímavost, že se k problematice součtů čtverců vracel proslulý časopis American Mathematical Monthly – viz např. články [52], [58] a [61].

Francouzský matematik Élie Cartan (1869–1951) poznamenal roku 1808 v obsírném článku *Nombres complexes* otištěném ve francouzské encyklopedii matematických věd,²⁶ že ke kompletnímu popisu reálných algeber s dělením není možné dospět bez výrazného pokroku v algebře a analýze (viz [8], s. 362).

Ve 20. století byla problematika čtverců vyjádřena v řeči algeber v návaznosti na práci Benjamina Peirceho. Přispěl k tomu též Abraham Adrian Albert (1905–1972). Existence vzorce (9) byla dána do souvislosti s existencí normované algebry dimenze n .

Švýcarský matematik Heinz Hopf (1894–1971) dokázal v práci [32] z roku 1940 pomocí důmyslných metod algebraické topologie, že konečnědimenzionální reálné algebry s dělením nemohou mít jinou dimenzi než mocninu čísla 2. O jedenáct let později, roku 1951, publikovali Richard Hubert Bruck (1914–1991) a Erwin Kleinfeld (1927–2022) práci [6], v níž dokázali, že jediná reálná konečnědimenzionální alternativní a neasociativní algebra s dělením je algebra oktáv.²⁷ Toto tvrzení (případně spojené s výše uvedenou Frobeniovou větou) se obvykle nazývá *Zobecněná Frobeniova věta*. Její důkaz najdeme např. v Kurošově knize *Kapitoly z obecné algebry* [44], s. 218–226.

S dalším důležitým výsledkem přišli s pomocí výsledků algebraické topologie roku 1958 Michel André Kervaire (1927–2007) v článku [43] a nezávisle na něm Raoul Bott (1923–2005) a John Willard Milnor (nar. 1931) v pracích [50] a [49]. Dokázali, že reálné algebry s dělením dimenze n mohou existovat pouze pro $n = 1, 2, 4, 8$: jednu se o dvě asociativní a komutativní algebry (reálná čísla, komplexní čísla), jednu asociativní nekomutativní algebru (kvaterniony), jednu neasociativní, ale alternativní nekomutativní algebru (oktávy) a nekonečně mnoho algeber, které nejsou alternativní. Vzhledem k tomu, že normované algebry jsou algebrami s dělením, přispěly výše uvedené výsledky i k poznání normovaných algeber.

Bylo dokázáno, že všechny další normované algebry vzniknou z výše uvedených čtyř algeber zavedením nového násobení $\star$ rovností

$$\alpha \star \beta = f(\alpha) \cdot g(\beta),$$

kde f a g jsou izomorfismy zachovávající normu (ortogonální zobrazení).

²⁶Tento článek vznikl přepracováním a rozšířením článku [57] z německé matematické encyklopedie, jehož autorem je Eduard Study (1862–1930).

²⁷V této souvislosti je též citována práce [56] Lva Anatoljeviče Skornjakova (1924–1989).

Pro zajímavost uvedme, že existují pouze čtyři neizomorfní normované algebry dimenze 2 – algebra komplexních čísel a tři algebry, které z ní vzniknou zavedením nového násobení $\star$ rovností

$$\alpha \star \beta = \overline{\alpha} \cdot \beta, \quad \text{resp.} \quad \alpha \star \beta = \alpha \cdot \overline{\beta}, \quad \text{resp.} \quad \alpha \star \beta = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

Uvědomme si, že tato tři násobení nejsou alternativní (a neexistují jednotkové prvky). Těmto algebrám odpovídají mírně modifikované varianty vzorce (9):

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \\ (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (-a_1 b_2 + a_2 b_1)^2, \\ (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) &= (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (-a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

Pro dimenzi 4 je situace složitější. Reálné normované algebry dimenze 4 vzniknou z algebry kvaternionů zavedením nového násobení $\star$ podle některého z následujících předpisů:

$$\alpha \star \beta = \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \delta, \quad \alpha \star \beta = \gamma \cdot \overline{\alpha} \cdot \beta \cdot \delta, \quad \alpha \star \beta = \gamma \cdot \alpha \cdot \overline{\beta} \cdot \delta, \quad \alpha \star \beta = \gamma \cdot \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} \cdot \delta,$$

kde γ, δ jsou pevně zvolené kvaterniony, které mají jednotkovou normu. Těmto definicím násobení odpovídají modifikace identity (10).

Známe-li všechny normované algebry, známe i všechny rovnosti (12). Zavedeme-li například v algebře kvaternionů násobení rovností $\alpha \star \beta = i \cdot \alpha \cdot \beta \cdot j$, dostaneme mírnou modifikaci rovnosti (10), kde jsou jen pozměněná znaménka:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) &= \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)^2 + (-a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_4 + a_4 b_3)^2 + \\ &+ (-a_1 b_3 + a_2 b_4 - a_3 b_1 - a_4 b_2)^2 + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1)^2. \end{aligned}$$

O problematice číselných oborů a systémů hyperkomplexních čísel (z matematického i historického hlediska) se můžeme dočíst například v pracích [1], [2], [3], [5], s. 245–298, [13], [21], [31], [40], [42], [55] a [59], s. 177–217. Základní algebraické poznatky nalezneme v učebnicích [4] a [19]. O vývoji této problematiky v 19. století najdeme řadu informací v encyklopedických článcích [57] a [8].

Poděkování. Děkujeme Antonínu Slavíkovi za cenné podněty, které vedly k podstatnému rozšíření a k úpravě obsahu tohoto článku.

L i t e r a t u r a

- [1] ALBERT, A. A.: *Structure of algebras*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 24, New York, 1939.
- [2] BEČVÁŘ, J.: *Normované algebry a součty čtverců*. In: E. Fuchs a kol.: Světonázorové problémy matematiky IV, SPN, Praha, 1987, 17–30.
- [3] BEČVÁŘ, J.: *150 let od objevu kvaternionů*. PMFA 38 (1993), 305–317.
- [4] BEČVÁŘ, J.: *Lineární algebra*. MatfyzPress, Praha, 2000.

- [5] BEČVÁŘ, J.: *Z historie lineární algebry*. Edice Dějiny matematiky, sv. 35, MatfyzPress, Praha, 2007.
- [6] BRUCK, R. H., KLEINFELD, E.: *The structure of alternative division rings*. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 878–890.
- [7] CARTAN, É.: *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes*. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, Serie 1, 12 (1898), 1–99.
- [8] CARTAN, É., STUDY, E.: *Nombres complexes*. Encyclopédie des science mathématiques pures et appliquées I. I. 3, Paris, 1908, 329–488.
- [9] CAYLEY, A.: *The theory of groups*, Amer. J. Math. 1 (1878), 50–52.
- [10] CURTIS, C. W.: *The four and eight square problem and division algebras*. In: A. A. Albert (ed.): *Studies in modern algebra*, MAA Studies in Mathematics, Vol. 2, The Mathematical Association of America, Prentice-Hall, Inc., 1963, 100–125.
- [11] CURTIS, C. W.: *Linear algebra. An introductory approach*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1974, 1984.
- [12] DEGEN, C. F.: *Adumbratio demonstrationis theorematis arithmetici maxime universalis*. Mémoires de L'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg VIII, 1817–1818 (1822), 207–219.
- [13] DICKSON, L. E.: *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem*. Annals of Math. 20 (1918–1919), 155–171, 297.
- [14] DICKSON, L. E.: *History of theory of numbers I*. Carnegie Institution of Washington, Washington, 1919.
- [15] DICKSON, L. E.: *History of theory of numbers II*. Carnegie Institution of Washington, Washington, 1920.
- [16] DICKSON, L. E.: *History of theory of numbers III*. Carnegie Institution of Washington, Washington, 1923.
- [17] DLAB, V.: *Důkladné porozumění elementární matematice*. Učitel matematiky 17 (2008/2009), č. 3, 169–182.
- [18] DLAB, V.: *Důkladné porozumění pojmu ekvivalence*. Učitel matematiky 19 (2010/2011), č. 1, 9–13.
- [19] DLAB, V., BEČVÁŘ, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře*. Serifa, Praha, 2016.
- [20] DOLEŽÁLEK, M.: *Kvaterniony a důkaz Lagrangeovy věty o čtyřech čtvercích*. PMFA 64 (2019), 145–160.
- [21] EBBINGHAUS, H.-D., et al.: *Zahlen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [22] EULER, L.: *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum*. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5 (1754/1755), 13–58.
- [23] EULER, L.: *Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata*. Nova acta eruditorum (1773), 193–211.
- [24] FREUDENTHAL, H.: *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*. Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht, 1951.
- [25] FROBENIUS, F. G.: *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*. J. Reine Angew. Math. 84 (1878), 1–63.

- [26] FUSS, P. H.: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle I*. Pétersbourg, 1843.
- [27] GAUSS, K. F.: *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*. Göttingen gelehrte Anzeigen, 1831, Werke II, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1876, 169–178.
- [28] GAUSS, K. F.: *Nachlass. Fortsetzung der Untersuchungen. Über das arithmetisch geometrische Mittel*. Werke III, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1876, 375–403.
- [29] GAUSS, K. F.: *Mutationen des Raumes*. Werke VIII, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1900, 357–362.
- [30] GRISSEMAN, F. X.: *Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmstellung der Quaternionen unter den complexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten*. Monatsh. Math. Phys. 11 (1900), 132–147.
- [31] HANKEL, H.: *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, I. Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*. L. Voss, Leipzig, 1867.
- [32] HOPF, H.: *Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra*. Comment. Math. Helv. 13 (1940), 219–239.
- [33] HURWITZ, A.: *Über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1896, 313–340.
- [34] HURWITZ, A.: *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*. Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1898, 309–316.
- [35] HURWITZ, A.: *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Springer, Berlin, 1919.
- [36] JACOBI, C. G. J.: *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés*. J. Reine Angew. Math. 3 (1828), 191.
- [37] JACOBI, C. G. J.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Sumtibus fratrum Borntraeger, Regiomonti, 1829.
- [38] JACOBI, C. G. J.: *De compositione numerorum e quatuor quadratis*. J. Reine Angew. Math. 12 (1834), 167–172.
- [39] JACOBSON, N.: *Composition algebras and their automorphisms*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 11, 7 (1958), 55–80.
- [40] JAFARI, M., MOLAEI, H.: *Some properties of matrix algebra of semi-quaternions*. Science Journal (CSJ) 36 (2015), No. 5, 103–112.
- [41] KALINOVSKY, Y. O., LANDE, D. V., BOYARINOVA, Y. E., TURENKO, A. S.: *Clifford type algebra characteristics investigation*.
- [42] KANTOR, I. L., SOLODOVNIKOV, A. S.: *Giperkopleksnye čisla*. Nauka, Moskva, 1973.
- [43] KERVAIRE, M.: *Non-parallelizability of the n -sphere for $n > 7$* . Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958), 280–283.
- [44] KUROŠ, A. G.: *Kapitoly z obecné algebry*. Academia, Praha, 1968.

- [45] LAGRANGE, I. L.: *Démonstration d'un théorème d'arithmétique*. Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles Lettres (Berlin) (1770), 123–133.
- [46] LEGENDRE, A. M.: *Essai sur la théorie des nombres*. Paris, 1797–1798.
- [47] LIPING, MA: *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge, 2010.
- [48] MAY, K. O.: *The impossibility of a division algebra of vectors in three dimensional space*. Amer. Math. Monthly 73 (1966), 289–291.
- [49] MILNOR, J.: *Some consequences of a theorem of Bott on the parallelizability of the spheres*. Ann. of Math. 68 (1958), 444–449.
- [50] MILNOR, J., BOTT, R.: *On the parallelizability of the spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 87–89.
- [51] PALAIS, R. S.: *The classification of real division algebras*. Amer. Math. Monthly 75 (1968), 366–368.
- [52] PALL, G.: *On sums of squares*. Amer. Math. Monthly 40 (1933), 10–18.
- [53] PEIRCE, B.: *Linear associative algebra*. Amer. J. Math. 4 (1881), 97–221.
- [54] PEIRCE, C. S.: *On the algebras in which division is always possible*. Amer. J. Math. 4 (1881), 225–229.
- [55] PROVAZNÍKOVÁ, M.: *Algebry s dělením: jejich historie a aplikace*. Disertační práce. Přírodovědecká fakulta MU, Brno, 2010.
- [56] SKORNJAKOV, L. A.: *Alternativnye tela*. Ukraïn. Mat. Zh. 2 (1950), 70–85.
- [57] STUDY, E.: *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, I. Arithmetik und Algebra, 1. Teil, Leipzig, Teubner, 1898–1904, 147–183.
- [58] TAUSKY, O.: *Sums of squares*. Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.
- [59] VAN DER WAERDEN, B. L.: *A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [60] WEIERSTRASS, K. T.: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 1884, 395–414.
- [61] WEIL, A.: *Euler. An elementary proof for sums of squares*. Amer. Math. Monthly 91 (1984), 537–542.