Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Dva čtverce či obdélníky v obecném trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 2, 16–26

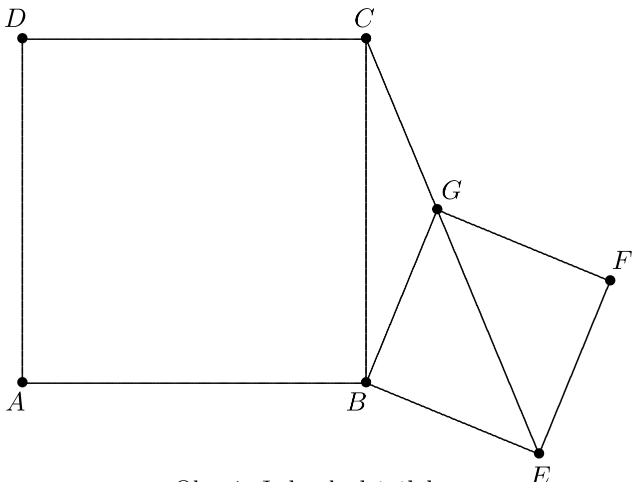
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152486`

Dva čtverce či obdélníky v obecném trojúhelníku

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Inspirace k napsání článku může přicházet z nejrůznějších zdrojů. Často je to malá poznámka, která se objevila v tisku. Tak je tomu zvláště tehdy, když taková poznámka nevyčerpává všechny možnosti, které by čtenáři přinesly hlubší porozumění danému problému. Zdá se mi též záslužné poukázat na to, jak se vyhnout překotnému užívání nabiflovaných vzorečků či zbytečnému (a často zatemňujícímu) užívání pojmů, jako jsou např. trigonometrické funkce v případech, kdy v daném řešení nehrají žádnou úlohu a nepomáhají porozumění (viz např. [2]). Důležitou roli v tomto procesu hraje *rozbor úlohy.* Ten odhalí podstatu úlohy a naznačí často cestu k jednoduššímu řešení mnohdy i obecnější úlohy. Jeden z významných matematiků své doby James Joseph Sylvester (1814–1897) poukázal na to, že obecné úlohy jsou často jednodušší než jejich konkrétní případy. Mohu jenom dodat, že mé zkušenosti jsou obdobné.

Následující jednoduchá úloha ilustruje popsanou situaci zcela věrně. Obr. 1 zobrazuje dva čtverce $\mathbb{C}_1 = ABCD$ a $\mathbb{C}_2 = BEFG$, které mají společný vrchol B a jsou položeny tak, že vrchol C leží na prodloužené úhlopříčce EG. Je-li $|GC| = 7$ a $|EG| = 10$, určete obsah čtverce $\mathbb{C}_1$.



Obr. 1: Jednoduchá úloha

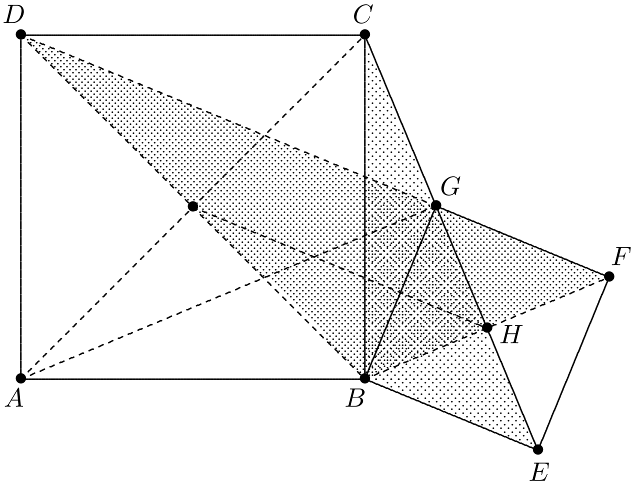
Určit obsah čtverce $\mathbb{C}_1$ znamená určit čtverec strany $|BC|$. Jaký přístup k řešení, patrně bez velkého rozmyšlení, současného studenta/studentku gymnázia napadne? Najdeme to popsáno v článku [3]. Zřejmě se soustředí na trojúhelník BGC, neboť vidí, že

$$|\sphericalangle BGC| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \quad |BG| = 5\sqrt{2}, \quad |GC| = 7.$$

Užitím *kosinové věty* tedy ihned určí, že

$$\text{obsah}(\mathbb{C}_1) = |BC|^2 = 50 + 49 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 169.$$

Naskýtá se ovšem bezprostřední otázka, zda je nutné použít poměrně náročného vzorce, který vyžaduje pojem goniometrické funkce? Článek [3] považuje takový postup za přirozený a postačující.



Obr. 2: Řešení úlohy (reference: `https://www.geogebra.org/m/zrazju2q`)

Zamyslíme-li se totiž nad úlohou pozorněji a označíme-li průsečík úhlopříček čtverce $\mathbb{C}_2$ písmenem H, vidíme ihned, že trojúhelník BHC je pravoúhlý (viz obr. 2) a Pythagorova věta nám dává odpověď

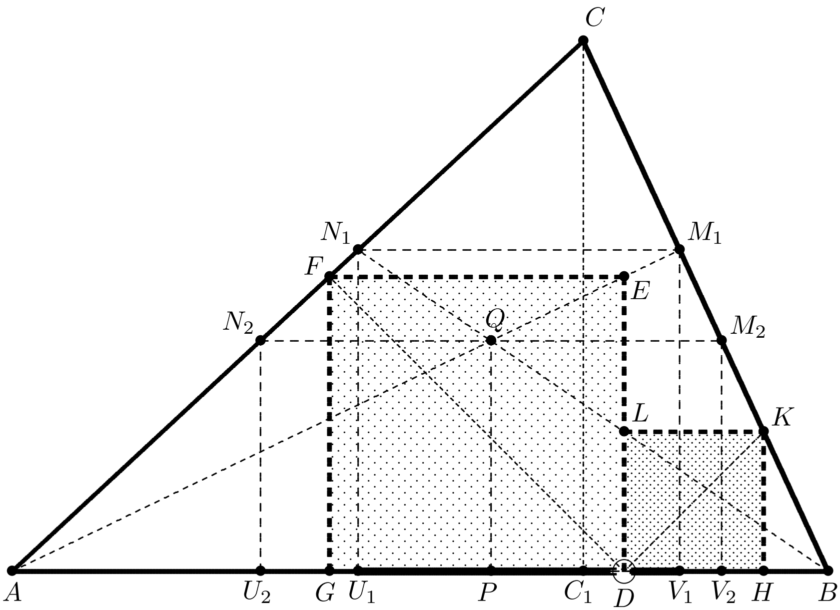
$$|BC|^2 = 5^2 + 12^2 = 169, \text{ a tedy } |BC| = 13.$$

Tento postup nám též usnadní zodpovědět zcela přirozenou otázku, proč jsou zadány pro úsečky $|GC|$ a $|EG|$ délky 7 a 10? Vidíme totiž ihned, že tyto hodnoty mohou být zcela libovolná nezáporná reálná čísla x a y. Označíme-li stranu čtverce $\mathbb{C}_1$ písmenem a, dostáváme

$$a^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 + xy + \frac{y^2}{2}.$$

Navíc vidíme, že velikosti úhlů splňují rovnosti $|\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle CBE|$ a $|\sphericalangle BFD| = |\sphericalangle BEC|$, a tedy $|\sphericalangle GDB| = |\sphericalangle ECB|$, tj. trojúhelníky BFD a BEC jsou podobné. Body F, G a D tedy leží na přímce. Laskavý čtenář jistě dokáže doplnit další trojúhelníky z obr. 2, které jsou podobné $\triangle BFD$.

Vraťme se nyní k hlavnímu tématu tohoto článku, který je naznačen v jeho titulu a inspirován příspěvkem [1]. Úlohou je popsat situaci znázorněnou na obr. 3.

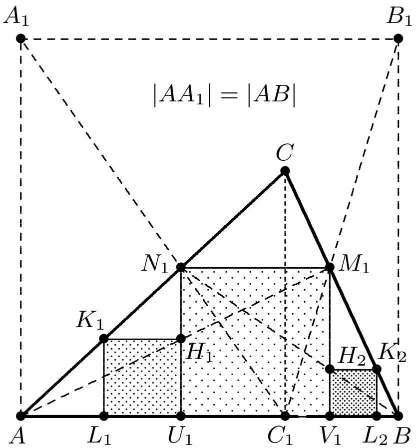


Obr. 3: Dva čtverce umístěné v trojúhelníku

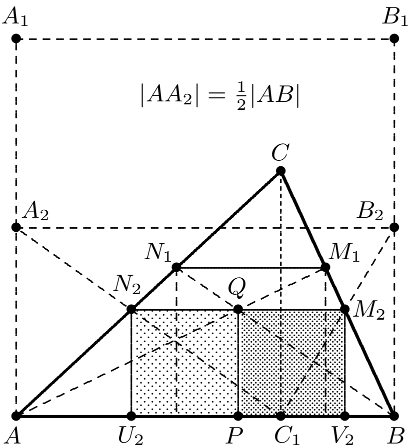
Zde jsou v daném (libovolném) trojúhelníku ABC umístěny dva čtverce $DEFG$ a $DHKL$. Připomeňme, že čtvercem umístěným v trojúhelníku ABC rozumíme čtverec, jehož jedna strana leží na jedné ze stran trojúhelníka (a tou bude převážně strana AB) a alespoň jeden z dvou zbylých vrcholů leží na další straně trojúhelníku.

Poloha dvojice čtverců je určena volbou bodu D. Vrcholy F a K (a tím strany trojúhelníků) jsou potom průsečíky stran trojúhelníku ABC a úseček (úhlopříček) DF a DK svírajících se stranou AB úhel 45°. Extrémní případy nastávají, když čtverec $DEFG$ nebo čtverec $DHKL$ zaujme pozici vepsaného čtverce $U_1V_1M_1N_1$ (viz obr. 4 naznačující též příslušnou konstrukci). Vrcholy U_1 a V_1 určují úsečku, která je definujícím oborem pro volbu bodu D.

Zvláštním případem je též situace, kdy vepsané čtverce jsou shodné (viz obr. 5 opět naznačující příslušnou konstrukci).



Obr. 4



Obr. 5

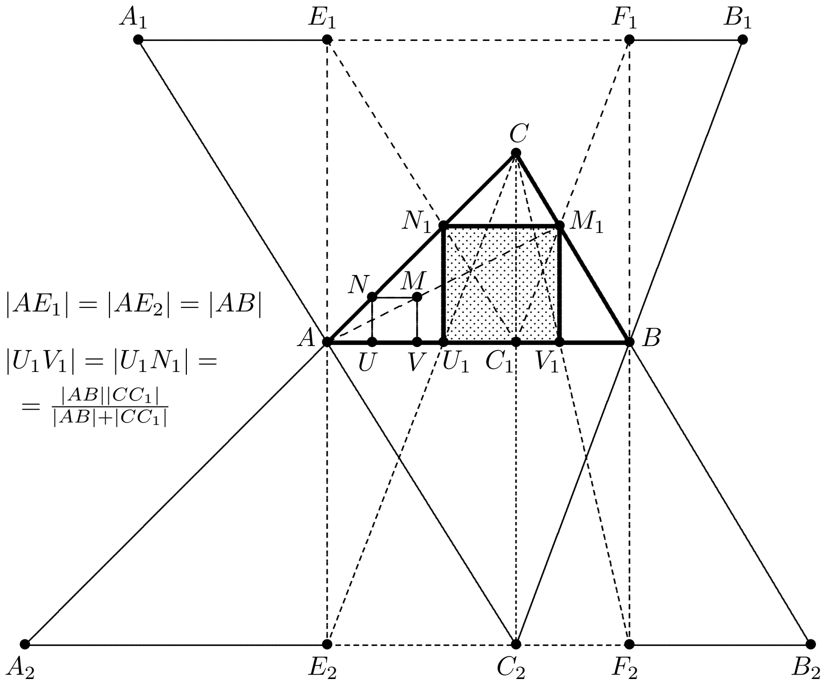
Čtverec $U_1V_1M_1N_1$ vepsaný do trojúhelníku ABC si zaslouží zvláštní pozornost. Tři konstrukce tohoto čtverce ilustruje obr. 6. První, využitím pomocného čtverce $UVMN$ a podobnosti trojúhelníků AVM a AV_1M_1, je zcela zřejmá. Nejvhodnější je konstrukce využívající podobnosti trojúhelníků CE_2F_2 a CU_1V_1. Odtud dostáváme vyjádření

$$|U_1V_1| = |U_1N_1| = \frac{|AB||CC_1|}{|AB| + |CC_1|} \tag{1}$$

a záhy, využitím podobnosti trojúhelníků AU_1N_1 a AC_1C,

$$|AU_1| = \frac{|AB||AC_1|}{|AB| + |CC_1|}. \tag{2}$$

Třetí konstrukci naznačenou na obr. 6, využívající podobnosti trojúhelníků $E_1F_1C_1$ a $A_1B_1C_2$, ponecháváme za úlohu popsat čtenáři.



Obr. 6: Tři konstrukce čtverce $U_1V_1M_1N_1$

Označme $|AB| = c$, $|CC_1| = h$, $|AC_1| = c_1$, $|BC_1| = c_2$ a $|AD| = d$. Aplikací vzorce (1) na pravoúhlý trojúhelník AU_1N_1 (obr. 4) dostáváme

$$|K_1L_1| = |L_1U_1| = \frac{cc_1h}{(c+h)(c_1+h)}.$$

Stejným způsobem odvodíme, že

$$|K_2L_2| = |L_2V_1| = \frac{cc_2h}{(c+h)(c_2+h)}.$$

Vraťme se nyní k obr. 3. Zde strana GD čtverce $DEFG$ splňuje

$$|GD| = s_1 = \frac{dh}{c_1+h}$$

a strana DH čtverce $DHKL$

$$|DH| = s_2 = \frac{(c-d)h}{c_2+h}.$$

První vztah plyne z podobnosti trojúhelníků AGF a AC_1C, druhý vztah užitím podobnosti trojúhelníků BKH a BCC_1.

Čtverce $DEFG$ a $DHKL$ jsou shodné pro $s_1 = s_2$, tj. pro d splňující

$$d(c_2+h) = (c-d)(c_1+h),$$

neboli

$$d = \frac{c(c_1+h)}{c+2h}.$$

Součet jejich obsahů, tj. obsah obdélníku $U_2V_2M_2N_2$, se rovná

$$2\left(\frac{ch}{c+2h}\right)^2.$$

Součet $\Sigma(d) = s_1^2 + s_2^2$ obsahů čtverců $DEFG$ a $DHKL$ je kvadratickou funkcí d, a tedy užitím Al-Chorezmího metody „doplnění na čtverec“ snadno najdeme hodnotu d, pro niž má tato funkce extrémní (zde minimální) hodnotu:

$$\Sigma(d) = \frac{d^2h^2}{(c_1+h)^2} + \frac{(c-d)^2h^2}{(c_2+h)^2} =$$
$$= w\left[d^2(c_2+h)^2 + c^2(c_1+h)^2 - 2cd(c_1+h)^2 + d^2(c_1+h)^2\right],$$

kde

$$w = \frac{h^2}{(c_1+h)^2(c_2+h)^2}.$$

Definujme

$$w_* = w\left[(c_1+h)^2 + (c_2+h)^2\right].$$

Potom

$$\Sigma(d) = w_*\left[d^2 - 2d\frac{c(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2+(c_2+h)^2} + \frac{c^2(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2+(c_2+h)^2}\right] =$$
$$= w_*\left[\left(d - \frac{c(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2+(c_2+h)^2}\right)^2 + \frac{c^2(c_1+h)^2(c_2+h)^2}{[(c_1+h)^2+(c_2+h)^2]^2}\right].$$

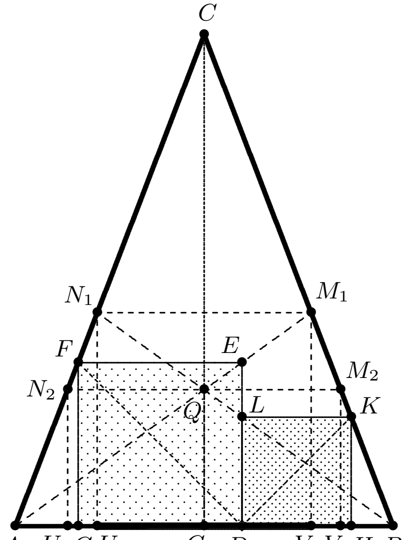
Tedy pro

$$d_* = \frac{c(c_1+h)^2}{(c_1+h)^2+(c_2+h)^2}$$

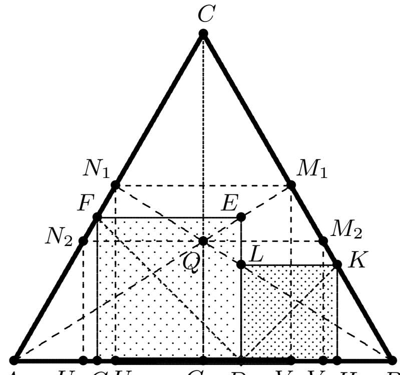
má součet obsahů čtverců minimální hodnotu

$$\Sigma_* = w_* \frac{c^2(c_1+h)^2(c_2+h)^2}{[(c_1+h)^2+(c_2+h)^2]^2} = \frac{c^2h^2}{(c_1+h)^2+(c_2+h)^2}.$$

Čtenáři doporučujeme užít tuto metodu k výpočtu minimální hodnoty součtu obsahů v jednodušších případech rovnoramenného ($c_1 = \frac{c}{2}$) a rovnostranného trojúhelníku ($c_1 = \frac{c}{2}$ a $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$); viz obr. 7 a 8.



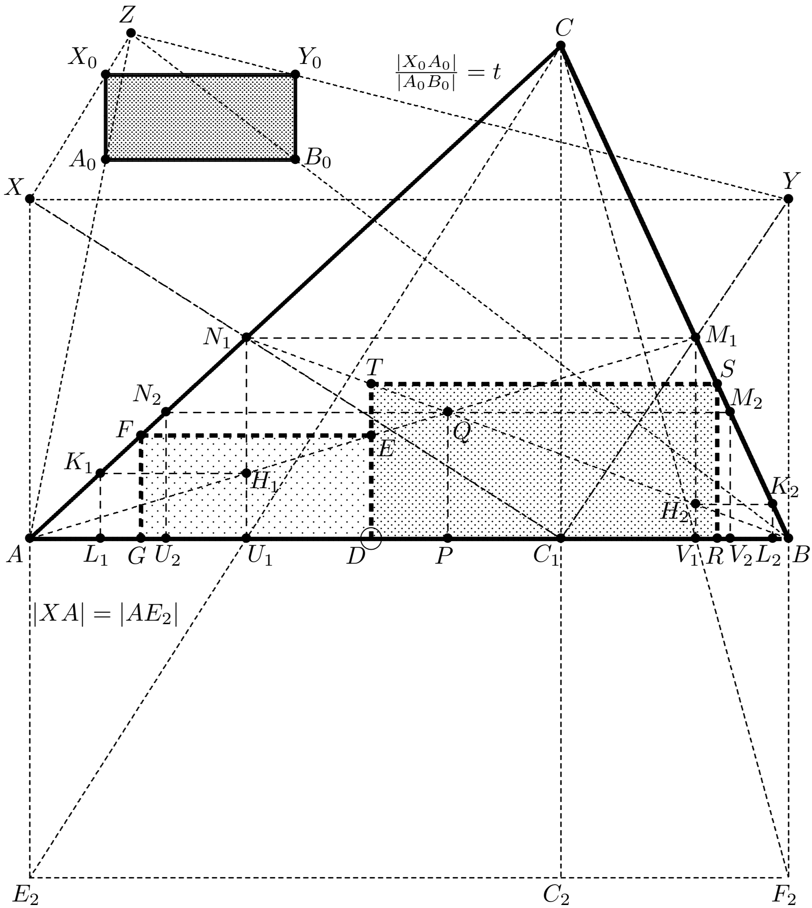
Obr. 7



Obr. 8

V závěrečné části článku nahradíme čtverce dvěma podobnými obdélníky. Poměr délek jejich stran označíme písmenem t. To je už zaznamenáno v obr. 9, který zobecňuje předchozí obrázky 3, 4, 5 a 6. Obdélníky $ABYX$, $U_1V_1M_1N_1$, PQN_2U_2, PQM_2V_2, $U_1H_1K_1L_1$, $V_1H_2K_2L_2$, AE_2F_2B, $DEFG$ a $DRST$ jsou všechny podobné. Jsou spjaty s podobností trojúhelníků AE_2C a N_1U_1C, trojúhelníků E_2F_2C a U_1V_1C, trojúhelníků AL_1K_1, AU_2N_2, AU_1N_1 a AC_1C, trojúhelníků AU_1H_1, ADE,

APQ a AV_1M_1. Stejným způsobem jsou podobností spjaty trojúhelníky BK_2L_2, BM_2V_2, BSR, BM_1V_1 a BCC_1, a konečně též trojúhelníky BH_2V_1, BQP, BTD a BN_1U_1.



Obr. 9: Dva podobné obdélníky v trojúhelníku

Zmíněné podobnosti trojúhelníků využijeme k odvození následujících vzorců, kde $m = tc + h$, $m_1 = tc_1 + h$ a $m_2 = tc_2 + h$:

$$|U_1V_1| = \frac{ch}{m}, \quad |U_1N_1| = \frac{tch}{m}, \quad |AU_1| = \frac{tcc_1}{m}, \quad |BV_1| = \frac{tcc_2}{m}.$$

$$|L_1U_1| = \frac{tcc_1h}{mm_1}, \quad |L_1K_1| = \frac{t^2cc_1h}{mm_1}, \quad |AL_1| = \frac{t^2cc_1^2}{mm_1}.$$

$$|L_2V_1| = \frac{tcc_2h}{mm_2}, \quad |L_2K_2| = \frac{t^2cc_2h}{mm_2}, \quad |BL_2| = \frac{t^2cc_2^2}{mm_2}.$$

Abychom určili rozměry obdélníku $U_2V_2M_2N_2$ a vzdálenosti vrcholů U_2 a V_2 od A a B, použijeme předchozí vzorce týkající se $U_1V_1M_1N_1$, nyní pro obdélník, jehož poměr stran je $\frac{t}{2}$. Tedy, píšeme-li $tc + 2h = m_0$,

$$|U_2V_2| = \frac{2ch}{m_0}, \quad |U_2N_2| = |PQ| = \frac{tch}{m_0},$$
$$|AU_2| = \frac{tcc_1}{m_0}, \quad |BV_2| = \frac{tcc_2}{m_0}.$$

Dále

$$|AP| = \frac{cm_1}{m_0} \quad \text{a} \quad |BP| = \frac{cm_2}{m_0}.$$

Zde si uvědomíme, že k výpočtu těchto hodnot nalezneme v obr. 9 celou řadu možností. Příkladem může být podobnost trojúhelníků AU_1H_1, ADE, APQ a AV_1M_1, nebo BV_1H_2, BPQ, BDT a BU_1N_1. Takové vztahy mohou též posloužit k ověřování správnosti obdržených vzorců.

Nyní se konečně dostáváme k obecnému vnoření obdélníků $GDEF$ a $DRST$ daném volbou bodu D, $|AD| = d$. Označme dále $s_1 = |GD|$ a $s_2 = |DR|$. Tedy $|DE| = t|GD| = ts_1$ a $|RS| = t|DR| = ts_2$. Podobnost trojúhelníků BN_1U_1 a BTD vede k rovnosti

$$|DT| = |RS| = \frac{t(c-d)h}{m_2},$$

a tedy

$$s_2 = \frac{(c-d)h}{m_2}.$$

Podobně

$$s_1 = \frac{dh}{m_1}.$$

Navíc

$$|AG| = \frac{tc_1d}{m_1} \quad \text{a} \quad |BR| = \frac{tc_2(c-d)}{m_2}.$$

Součet obsahů obou obdélníků je funkcí vzdálenosti d (jejíž hodnota splňuje podmínku $|AU_1| \leq d \leq |AV_1|$)

$$\Sigma(d) = ts_1^2 + ts_2^2 = t\left(\frac{d^2h^2}{m_1^2} + \frac{(c-d)^2h^2}{m_2^2}\right),$$

tj.

$$\Sigma(d) = \frac{th^2(m_1^2+m_2^2)}{m_1^2m_2^2}\left(d^2 - 2cd\frac{m_1^2}{m_1^2+m_2^2} + c^2\frac{m_1^2}{m_1^2+m_2^2}\right) =$$

$$= \frac{th^2(m_1^2+m_2^2)}{m_1^2m_2^2}\left[\left(d - \frac{cm_1^2}{m_1^2+m_2^2}\right)^2 - \frac{c^2m_1^4}{(m_1^2+m_2^2)^2} + \frac{c^2m_1^2}{m_1^2+m_2^2}\right].$$

Pro

$$d_{\min} = \frac{cm_1^2}{m_1^2+m_2^2}$$

má tedy součet obsahů minimální hodnotu

$$\Sigma_{\min} = \frac{tc^2h^2}{m_1^2+m_2^2}.$$

Nyní můžeme tyto podmínky přepsat pro speciální případy rovnoramenného či rovnostranného trojúhelníku. Např. pro dva čtverce v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku máme

$$d_{\min} = \frac{c}{2}$$

a

$$\Sigma_{\min} = \frac{c^2}{8}.$$

Závěrem poznamenejme, že článek poskytuje pro čtenáře celou řadu souvisejících úloh. Formulujme jednu, kterou naznačuje obr. 10.

Využitím předešlých výpočtů postupně dostáváme

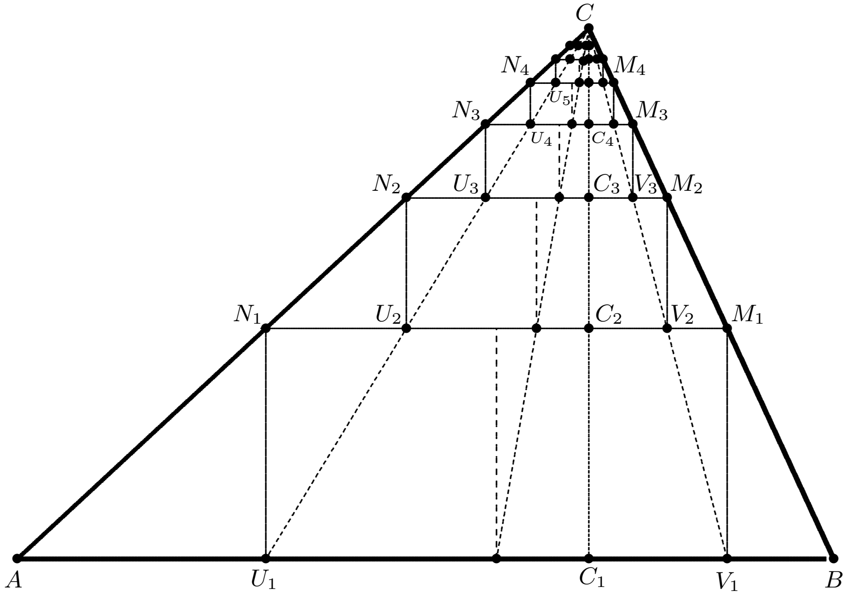
$$|U_1N_1| = \frac{tch}{tc+h}, \quad |U_2N_2| = \frac{tch^2}{(tc+h)^2}, \quad |U_3N_3| = \frac{tch^3}{(tc+h)^3}, \ \ldots$$

$$|U_1V_1| = \frac{ch}{tc+h}, \quad |U_2V_2| = \frac{ch^2}{(tc+h)^2}, \quad |U_3V_3| = \frac{ch^3}{(tc+h)^3}, \ \ldots$$

a tedy součet stran $|U_kN_k|$, stran $|U_kV_k|$ a obsahů $|U_kN_k||U_kV_k|$ vepsaných obdélníků je

$$\sum_{k=1}^{\infty} tc\left(\frac{h}{tc+h}\right)^k = h, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c\left(\frac{h}{tc+h}\right)^k = \frac{h}{t},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} tc^2\left(\frac{h}{tc+h}\right)^{2k} = \frac{ch^2}{tc+2h}.$$



Obr. 10: Posloupnost obdélníků umístěných v trojúhelníku

L i t e r a t u r a

[1] Calda, E.: Dva čtverce v rovnostranném trojúhelníku. *Učitel matematiky*, roč. 22 (2014), č. 4, s. 252–256.

[2] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.

[3] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky*, roč. 18 (2010), č. 1, s. 49–52.