

František Mošna

Základní principy bayesovských metod

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 1, 41–56

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152498>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

ZÁKLADNÍ PRINCIPY BAYESOVSKÝCH METOD

FRANTIŠEK MOŠNA

Důležitý pojem v počtu pravděpodobnosti představuje tzv. podmíněná pravděpodobnost a vztahy, které se nazývají věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec. Základní myšlenky o těchto poznatcích pocházejí od Thomase Bayese.¹ Významný francouzský matematik a fyzik Pierre-Simon Laplace,² který položil pevné základy počtu pravděpodobnosti, navázal na mnoho matematiků (zejména na Jacoba Bernoulliho, Abrahama de Moivre) a také znovu objevil Bayesovy myšlenky o podmíněné pravděpodobnosti a systematicky je rozpracoval.³

¹Thomas Bayes (1701–1761) studoval logiku a teologii v Edinburghu. Stal se presbyteriánským duchovním v Tunbridge a kromě toho byl vynikajícím matematikem. V jeho díle a pozůstalosti se objevují vedle úvah náboženských také úvahy matematické (o pravděpodobnosti a řadách). Nejvýznamnější jeho spis o pravděpodobnosti je *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, který vyšel v redakci velšského filosofa a matematika Richarda Price dva roky po Bayesově smrti.

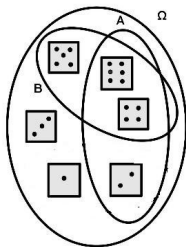
²Pierre-Simon Laplace (1749–1827) vykazoval neobyčejné matematické nadání už jako dítě. Zprvu studoval vojenskou školu, pak jeho genialitu rozpoznal sám d'Alembert a přijal ho mezi své žáky. Shrnul a završil úvahy o pravděpodobnosti ve svých spisech *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) a *Théorie analytique des probabilités* (1812, 1820). Kromě počtu pravděpodobnosti patřily do okruhu jeho zájmů též metody matematické analýzy, algebry, fyziky a zejména astronomie. Ve svém pětisvazkovém díle *Mécanique céleste* (1798–1825) vyvinul novou metodu výpočtu pohybu planet a podal teorii vzniku a vysvětlení stability Sluneční soustavy. Jakožto příznivec Napoleona byl občan Laplace jmenován ministrem vnitra, členem senátu a získal titul hrabě. Po pádu císaře se pragmaticky přidal na stranu Ludvíka XVIII. a byl povýšen na markýze.

³O Bayesových myšlenkách se Laplace zmiňuje ve třetím vydání svého díla *Théorie analytique des probabilités* z roku 1820 (Mačák, 1997).

Podmíněná pravděpodobnost, věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec

Princip podmíněné pravděpodobnosti by měl být dobře znám absolventům středních a vysokých škol. Přesto si tento pojem přiblížíme pomocí jednoduché úvahy.

Jeden student (Petr) hodí hrací kostkou, výsledek skryje rukou a vyzve svého kamaráda (Dušana), aby hádal, jestli padlo číslo sudé (jev A). Ten se snaží vyjádřit pravděpodobnost tohoto jevu pomocí klasické definice. Protože počet sudých čísel mezi jedničkou a šestkou je roven třem a počet všech možností je šest, vypočítá Dušan tuto pravděpodobnost jako příslušný poměr $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



Obr. 1: Hod kostkou

Pokud Petr navíc sdělí, že v tomto hodu padlo číslo větší než 3 (jev B), počet všech možností je tentokrát omezen pouze na tři a mezi nimi jsou dvě sudá čísla (jak vidíme z obrázku 1). Na základě stejné úvahy dostáváme nyní pravděpodobnost padnutí sudého čísla $\frac{2}{3}$. Podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B , lze pro $P(B) \neq 0$ zavést vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Původní pravděpodobnost $P(A)$ nazýváme *pravděpodobností apriorní* a podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ *pravděpodobností aposteriorní*.

Jednoduché úvahy o podmíněné pravděpodobnosti vedou ke dvěma základním vztahům, jež nazýváme věta (nebo vzorec)

o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta (nebo Bayesův vzorec).

Předpokládejme, že pro množinu všech výsledků Ω je dán rozklad na dvě části, tedy že máme její dvě podmnožiny B_1 a B_2 , které ji pokrývají ($B_1 \cup B_2 = \Omega$) a jsou neslučitelné ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$), nechť navíc $P(B_1) \neq 0$, $P(B_2) \neq 0$. Pro náhodný jev $A \subset \Omega$ platí dvě rovnosti:

1. **vzorec o úplné pravděpodobnosti**⁴

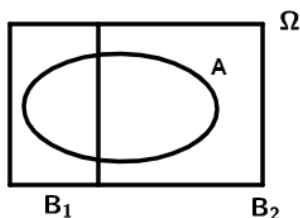
$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) \quad (2)$$

2. **Bayesův vzorec** (pro $P(A) \neq 0$)

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} \quad (3)$$

a podobný vzorec pro $P(B_2|A)$ (Caldá & Dupač, 2000, s. 124; Mošna, 2017, s. 11; Robová et al., 2013, s. 137, 140; Zvára & Štěpán, 2006, s. 28–29).

Odvození těchto tvrzení jsou jednoduchá, názorná a vychází přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti (1), stačí si pouze uvědomit, že s jevy pracujeme jako s množinami (viz obr. 2).



Obr. 2: K větě o úplné pravděpodobnosti

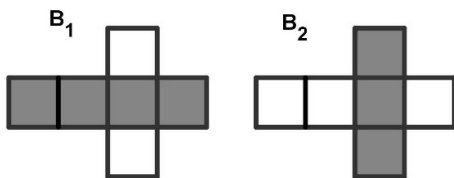
Oba vzorce lze zobecnit pro více než dva jevy, platí též pro konečné nebo spočetné rozklady Ω na jevy $B_1, B_2, \dots$

Nyní si ukážeme princip těchto formulí na velice jednoduché úloze.

⁴Vzorec připomíná něco jako „směšovací pravidlo pro koncentraci směsí či roztoků“, s čímž se studenti setkávají v chemii.

Úloha 1. V krabici jsou umístěny dvě kostky B_1 a B_2 . První z nich B_1 má čtyři stěny černé a dvě bílé, zatímco druhá B_2 má tři stěny černé a tři bílé (jak vidíme na obrázku 3). Vylosujeme jednu z těchto kostek a tou hodíme.

- Jaká je pravděpodobnost, že padne černá stěna?
- Jestliže při realizaci tohoto náhodného pokusu padla černá stěna, jaká je pravděpodobnost, že byla vylosována kostka B_1 ?



Obr. 3: Kostky, k úloze 1

Řešení. Označíme jevy

B_1 = [byla vylosována kostka B_1],

B_2 = [byla vylosována kostka B_2],

A = [padla černá stěna].

Losování proběhlo ze dvou možností a podle tzv. *principu indifference*⁵ není důvod, proč by jedna z nich měla být upřednostňována. Pravděpodobnosti jevů B_1 a B_2 proto položíme rovny $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

Pravděpodobnost padnutí černé stěny lze vypočítat v závislosti na tom, jaká kostka byla vylosována. Užijeme podmíněné pravděpodobnosti. V případě kostky B_1 bude příslušná pravděpodobnost jevu A rovna $P(A|B_1) = \frac{2}{3}$, v případě kostky B_2 bude příslušná pravděpodobnost jevu A rovna $P(A|B_2) = \frac{1}{2}$.

Jestliže nás v otázce a) zajímá celková pravděpodobnost padnutí černé stěny, využijeme větu o úplné pravděpodobnosti (2)

⁵Princip indifference (Principle of Indifference) je formulován například v Keynesově knize *A Treatise of Probability* z roku 1921, ale jeho myšlenky pocházejí od G. W. Leibnize, Jacoba Bernoulliho a zejména P. S. Laplace; někdy bývá také označován jako Principle of Insufficient Reason (více uvádí např. Marinoff, 1994).

a odtud vypočítáme

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

Odpověď na druhou otázku b) nám poskytne Bayesův vzorec (3). Pravděpodobnost toho, že bylo házeno první kostkou B_1 , když padla černá stěna, lze vyjádřit jako podmíněnou pravděpodobnost

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}.$$

Tím je úloha vyřešena.

V uvedeném příkladu jsme nejprve usuzovali, že (apriorní) pravděpodobnost vylosování B_1 a B_2 jsou stejné a rovné $\frac{1}{2}$. Na základě toho, že na vylosované kostce padla černá stěna (jev A), jsme upravili (aposteriorní) pravděpodobnost vylosování kostky B_1 na $\frac{4}{7}$ a kostky B_2 na $\frac{3}{7}$. Ta první je větší než $\frac{1}{2}$ a druhá naopak menší, což odpovídá intuitivní představě, neboť na té první je větší poměr černých stěn než na té druhé.

Větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu lze formulovat také pro náhodné veličiny. Začneme s náhodnými veličinami s diskrétním rozdělením. Pro náhodný jev $A \subset \Omega$, $P(A) \neq 0$, a náhodnou veličinu s diskrétním rozdělením s hodnotami $x_k = k = 1, 2, \dots, n$ a příslušnými pravděpodobnostmi $p_k = P(X = k)$ platí

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|X = k) \cdot p_k \quad (4)$$

a

$$P(X = k|A) = \frac{P(A|X = k) \cdot p_k}{P(A)}. \quad (5)$$

Tyto vzorce platí také pro náhodné veličiny se spojitým rozdělením.

Pro náhodný jev $A \subset \Omega$, $P(A) \neq 0$, a náhodnou veličinu se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti f_X platí

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = t) f_X(t) \, dt \quad (6)$$

a

$$f_{X|A}(p) = \frac{P(A|X=p) \cdot f_X(p)}{P(A)}. \quad (7)$$

Když si vzorce pozorně prohlédneme, lze nahlédnout, že formule (4) a (6) souvisejí se vzorcem (2) a podobně formule (5) a (7) odpovídají vzorci (3). Je zde také patrné, že ve spojitém případě jsou součty nahrazeny integrály a pravděpodobnosti hustotou pravděpodobnosti.

Ukážeme si nyní užití uvedených vztahů v následujících příkladech.

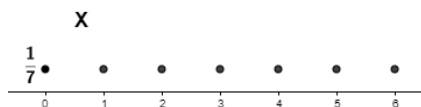
Bayesovské postupy pro náhodné veličiny

Základní myšlenky Bayesovských postupů spočívají v tom, že vycházíme z nějakého dosud známého rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny a na základě empirických výsledků pak toto rozdělení upravujeme. V následující úloze 2 využijeme uvedené formule (4) a (5) pro náhodný jev $A \subset \Omega$, $P(A) \neq 0$ a náhodnou veličinu s diskrétním rozdělením s hodnotami $x_k = k = 1, 2, \dots, n$ a pravděpodobnostmi $p_k = P[X = k]$.

Úloha 2. Víme, že v krabici je 6 kuliček černé nebo bílé barvy. Čtyřikrát byla vylosována jedna kulička, přičemž byla vždy vrácena do krabice zpět. Ve třech případech byla vylosovaná kulička černá a v jednom bílá. Zajímá nás, kolik (a s jakou pravděpodobností) je v krabici kuliček černých a kolik bílých. Jinými slovy, chtěli bychom zavést náhodnou veličinu Y popisující, kolik je v krabici černých kuliček, a chceme zjistit její rozdělení pravděpodobnosti. Neboli budeme počítat pravděpodobnost, že v krabici je právě k černých kuliček.

Řešení. Označíme X náhodnou veličinu popisující počet černých kuliček v krabici ještě před tím, než provedeme jakékoli losování. Na začátku máme pouze informaci, že v krabici jsou bílé a černé kuličky a že jejich počet je šest. Možnosti pro celkový počet černých kuliček jsou 0, 1, 2, 3, 4, 5, nebo 6, dohromady 7 možností. Nyní budeme aplikovat princip indiference. Nemáme totiž důvod,

proč by měla jedna možnost být upřednostňována před ostatními. Podle této úvahy budeme proto uvažovat pravděpodobnost všech 7 možností za stejnou a rovnou $\frac{1}{7}$. Hledaná veličina X bude nabývat hodnot $x_k = k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ s příslušnými pravděpodobnostmi $p_k = \frac{1}{7}$ pro všechna k . Takové rozdělení pravděpodobnosti nazýváme rovnoměrné diskrétní, můžeme si ho znázornit graficky (obrázek 4).



Obr. 4: Apriorní rozdělení pravděpodobnosti, k úloze 2

Pravděpodobnosti jednotlivých možností před realizací losování nazýváme apriorní pravděpodobnosti.

Nyní obraťme pozornost k situaci, kdy vylosujeme čtyřikrát jednu kuličku (vždy vracíme zpět). Zavedeme náhodnou veličinu S , která určuje, kolikrát jsme při těchto losováních vytáhli černou kuličku. Taková náhodná veličina nabývá hodnot 0, 1, 2, 3 a 4. Pravděpodobnost jednotlivých možností bude záviset na tom, kolik bylo celkově v krabici černých kuliček. Jestliže například byly v krabici 2 černé kuličky, pak pravděpodobnost, že černou vylosujeme ve všech čtyřech případech, je $(\frac{2}{6})^4$. Nebo pravděpodobnost, že černou kuličku vůbec nevylosujeme, je $(1 - \frac{2}{6})^4$. Pravděpodobnost, že vylosujeme celkem třikrát černou a jednou bílou kuličku vypočítáme podobně $\binom{4}{3} \cdot (\frac{2}{6})^3 \cdot (\frac{4}{6})^1$. Výpočty vedou k tzv. binomickému rozdělení $\text{Bi}(4; \frac{k}{6})$ (Caldá & Dupač, 2000, s. 115; Mošna, 2017, s. 42; Robová et al., 2013, s. 134; Zvára & Štěpán, 2006, s. 65). Rozdělení veličiny S v jednotlivých případech, neboli podmíněná pravděpodobnost veličiny S v závislosti na veličině X , je dána vzorcem

$$P(S = s | X = k) = \binom{4}{s} \left(\frac{k}{6}\right)^s \left(1 - \frac{k}{6}\right)^{4-s}.$$

Vypíšeme jednotlivé pravděpodobnosti do tabulky 1.

Tab. 1: Podmíněné pravděpodobnosti veličiny S za podmínky X ,
k úloze 2

$P(S = s X = k)$	$s = 0$	1	2	3	4	Σ
$k = 0$	1	0	0	0	0	1
1	$\frac{625}{1\,296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1\,296}$	1
2	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1
4	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$	1
5	$\frac{1}{1\,296}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{625}{1\,296}$	1
6	0	0	0	0	1	1

Nyní vypočítáme pravděpodobnost toho, že vylosujeme s černých kuliček a užijeme k tomu větu o úplné pravděpodobnosti (4). Dostaneme:

$$\begin{aligned}
 P(S = s) &= \sum_{k=0}^6 P(S = s|X = k) \cdot p_k = \\
 &= \sum_{k=0}^6 \binom{4}{s} \left(\frac{k}{6}\right)^s \left(1 - \frac{k}{6}\right)^{4-s} \cdot \frac{1}{7} = \begin{cases} \frac{325}{1\,296} & \text{pro } s = 0 \\ \frac{53}{324} & \text{pro } s = 1 \\ \frac{37}{216} & \text{pro } s = 2 \\ \frac{53}{324} & \text{pro } s = 3 \\ \frac{325}{1\,296} & \text{pro } s = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zadání naší úlohy nás vede k výpočtu opačné podmíněné pravděpodobnosti, tedy k podmíněné pravděpodobnosti hodnot veličiny X v závislosti na veličině S , což nám umožňuje Bayesův vzorec (5). Vyjádříme podle něho aposteriorní pravděpodobnost:

$$P(X = k|S = s) = \frac{P(S = s|X = k) \cdot p_k}{P(S = s)} =$$

$$= \frac{\binom{4}{s} \left(\frac{k}{6}\right)^s \left(1 - \frac{k}{6}\right)^{4-s} \cdot \frac{1}{7}}{P(S=s)} = \begin{cases} \frac{(6-k)^4}{2 \cdot 275} & \text{pro } s = 0 \\ \frac{k(6-k)^3}{371} & \text{pro } s = 1 \\ \frac{k^2(6-k)^2}{259} & \text{pro } s = 2 \\ \frac{k^3(6-k)}{371} & \text{pro } s = 3 \\ \frac{k^4}{2 \cdot 275} & \text{pro } s = 4 \end{cases}$$

Výsledné pravděpodobnosti opět zapíšeme souhrnně do tabulky 2.

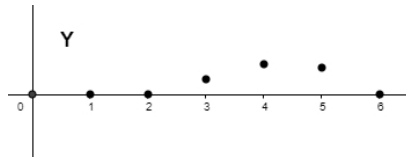
Tab. 2: Podmíněné pravděpodobnosti veličiny X za podmínky S ,
k úloze 2

$P(X = k S = s)$	$s = 0$	1	2	3	4
$k = 0$	$\frac{1296}{2 \cdot 275}$	0	0	0	0
1	$\frac{25}{91}$	$\frac{125}{371}$	$\frac{25}{259}$	$\frac{5}{371}$	$\frac{1}{2 \cdot 275}$
2	$\frac{256}{2 \cdot 275}$	$\frac{128}{371}$	$\frac{64}{259}$	$\frac{32}{371}$	$\frac{16}{2 \cdot 275}$
3	$\frac{81}{2 \cdot 275}$	$\frac{81}{371}$	$\frac{81}{259}$	$\frac{81}{371}$	$\frac{81}{2 \cdot 275}$
4	$\frac{16}{2 \cdot 275}$	$\frac{32}{371}$	$\frac{64}{259}$	$\frac{128}{371}$	$\frac{256}{2 \cdot 275}$
5	$\frac{1}{2 \cdot 275}$	$\frac{5}{371}$	$\frac{25}{259}$	$\frac{125}{371}$	$\frac{256}{2 \cdot 275}$
6	0	0	0	0	$\frac{625}{2 \cdot 275}$
Σ	1	1	1	1	1

Jestliže černá kulička byla vylosovaná právě třikrát, $s = 3$, jak je uvedeno v zadání úlohy, náhodná veličina Y , popisující kolik černých kuliček bylo původně v krabici, má rozdělení (odpovídající třetímu sloupci v tabulce 2)

$$P(Y = k) = \frac{k^3(6 - k)}{371}.$$

Tím je úloha vyřešena a hledané rozdělení je znázorněno na obrázku 5. K výsledné náhodné veličině jsme ještě vypočítali střední hodnotu $EY = \frac{207}{53} \doteq 3,9$.



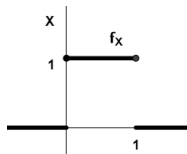
Obr. 5: Aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti, k úloze 2

Následující postupy budou technicky trochu komplikovanější, princip však zůstává podobný. Pro výpočty budeme potřebovat dvě známé integrální funkce. Uvedeme jejich definice a několik vztahů. Funkce gama zavádíme vzorcem $\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$ (tzv. Eulerův integrál 2. druhu) a funkci beta vzorcem $B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt$ (tzv. Eulerův integrál 1. druhu). Funkce gama má podobný průběh jako faktoriál, platí $\Gamma(m+1) = m!$. Dále platí $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ a souvislost obou funkcí vyjadřuje pravidlo $B(u, v) = \frac{\Gamma(u) \cdot \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ (Mošna, 2017, s. 72).

Provedeme malou změnu příkladu 2 a ukážeme si princip bayesovských postupů pro spojité rozdělení. Opět využijeme obě formule, tentokrát pro náhodný jev $A \subset \Omega$, $P(A) \neq 0$, a náhodnou veličinu se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti f_X .

Úloha 3. Víme, že v krabici jsou kuličky černé a bílé barvy, nevíme však, kolik je kterých. Čtyřikrát byla vylosována jedna kulička, přičemž byla vždy vrácena do krabice zpět. Ve třech případech byla vylosovaná kulička černá a v jednom bílá. Zaveďte náhodnou veličinu Y popisující poměr černých a všech kuliček v krabici.

Řešení. Opět uvažujeme, že X je náhodná veličina popisující poměr černých a všech kuliček v krabici ještě před tím, než z ní bude provedeno losování popsané v zadání úlohy 3. Taková veličina bude nabývat hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. O poměru černých a všech kuliček v krabici nemáme žádné informace. Opět se odkážeme na princip indiference a uvážíme, že není důvod, proč by měl být některý poměr upřednostňován. Pravděpodobnost by měla být pro všechny poměry stejná a její hustota bude rovna 1 na tomto intervalu a 0 jinde. Náhodná veličina X má tzv. spojité rovnoměrné rozdělení, jehož hustota je znázorněna na obrázku 6.



Obr. 6: Apriorní rozdělení pravděpodobnosti, k úloze 3

Pravděpodobnost jednotlivých možností nazýváme opět apriorní pravděpodobnost.

Podobně jako v předchozí úloze nyní obrátíme pozornost k situaci, kdy vylosujeme čtyřikrát kuličku (vždy vracíme zpět). Zavedeme náhodnou veličinu S , která bude popisovat, kolikrát jsme v těchto čtyřech tazích vylosovali černou. Taková náhodná veličina může opět nabývat hodnot 0, 1, 2, 3 a 4. Pravděpodobnost jednotlivých možností bude záviset na poměru černých a všech kuliček a můžeme ji opět počítat na základě binomického rozdělení $\text{Bi}(4, p)$. Pravděpodobnost hodnot veličiny S v závislosti na veličině X je rovna

$$P(S = s | X = p) = \binom{4}{s} p^s (1 - p)^{4-s}.$$

Celkovou pravděpodobnost toho, že vylosujeme s černých kuliček, vypočítáme podle věty o úplné pravděpodobnosti (6):

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(S = s | X = t) f_X(t) dt = \\ &= \binom{4}{s} \int_0^1 t^s (1 - t)^{4-s} dt = \binom{4}{s} B(s + 1, 5 - s) = \\ &= \binom{4}{s} \frac{\Gamma(s + 1) \cdot \Gamma(5 - s)}{\Gamma(6)} = \binom{4}{s} \frac{s! \cdot (4 - s)!}{5!} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme užili funkcí gama, beta a příslušných pravidel uvedených výše.

K popisu náhodné veličiny Y vyjadřující poměr černých kuliček v závislosti na výsledku provedeného pokusu nám poslouží Bayesův vzorec (7). Podle něho vypočítáme opačně podmíněnou

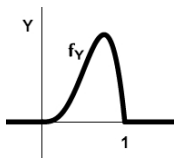
hustotu pravděpodobnosti – tzv. posteriorní hustotu pravděpodobnosti f_Y :

$$\begin{aligned} f_Y(p) &= f_{X|(S=s)}(p) = \frac{P(S=s|X=p) \cdot f_X(p)}{P(S=s)} = \\ &= \frac{\binom{4}{s} p^s (1-p)^{4-s} \cdot f_X(p)}{\frac{1}{5}} = \\ &= \begin{cases} \frac{5!}{s! \cdot (4-s)!} p^s (1-p)^{4-s} & \text{pro } p \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \end{aligned}$$

Jestliže černá kulička byla vylosována právě třikrát, $s = 3$, jak je uvedeno v zadání úlohy, náhodná veličina Y , popisující poměr černých a všech kuliček v krabici, má hustotu pravděpodobnosti:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & \text{pro } x \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Tím je úloha vyřešena, hustotu pravděpodobnosti hledaného rozdělení máme znázorněnou na obrázku 7.⁶ Také k této náhodné veličině můžeme vypočítat střední hodnotu $EY = \frac{2}{3} \doteq 0,67$.



Obr. 7: Aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti, k úloze 3

Výsledná rozdělení veličiny Y v předchozích dvou úlohách nám poskytují možnost činit na základě jednotlivého empirického výsledku závěry o původním počtu nebo poměru černých kuliček v krabici v obecném případě.

Inferenční (nebo též indukční) statistika užívá k testování hypotéz převážně metody klasické a neparametrické. První typ testů – klasické testy – vychází z vlastností normálního rozdělení.

⁶Takové rozdělení se nazývá beta, značíme $B(s+1, 5-s)$.

Druhá skupina testů užívá vlastností tzv. pořadových statistik, jako je například medián. S rozvojem počítačové techniky se kromě těchto dvou typů ve stále větší míře uplatňují metody nazývané bayesovské. Základem těchto testů je právě Bayesův vzorec a postupy podobné těm, které jsme se snažili přiblížit prostřednictvím předchozích úloh.

Pravidlo následnosti

*Pravidlo následnosti*⁷ se zabývá situací, kdy určitý jev byl v celkových n pokusech pozorován právě s krát. Tato formule odhaduje pravděpodobnost toho, že tento jev nastane také v dalším pokusu, podílem $\frac{s+1}{n+2}$. Na základě tohoto vzorce P. S. Laplace ve svém spise *Essai philosophique sur les probabilités* odvozuje pravděpodobnost jevu, že zítra vyjde Slunce (Childers, 2011, s. 138). Z toho, že historie existuje 5 000 let (tj. 1 826 213 dnů) vypočítal tuto pravděpodobnost jako $\frac{1\,826\,214}{1\,826\,215}$. Sám Laplace následně uznával, že tento příklad nebyl zvolen příliš vhodně.

Výpočty podobné těm předchozím můžeme užít též k odvození pravidla následnosti. Jeho odvození provedeme tak, že úlohu 3 zobecníme pro s černých kuliček při n celkových losováních a k výsledné náhodné veličině vypočítáme střední hodnotu.

Úloha 4. Víme, že v krabici jsou kuličky černé nebo bílé barvy. Vylosování jedné kuličky bylo provedeno n krát, přičemž kulička byla vždy vrácena do krabice zpět. Právě v s případech byla vylosována černá kulička. Zaveďte náhodnou veličinu Y popisující poměr černých a všech kuliček v krabici.

Řešení. Tato úloha je pouze zobecněním té předchozí. Náhodná veličina popisující poměr černých a všech kuliček v krabici ještě před tím, než z ní bude provedeno losování popsané v zadání úlohy, má z nám už známých důvodů (princip indiference) rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Příslušnou hustotu nazýváme apriorní hustota pravděpodobnosti.

⁷Název pravidlo následnosti (Rule of Succession) zavedl John Venn (Childers, 2011, s. 136).

Nyní budeme opět uvažovat situaci, kdy vylosujeme n -krát kuličku (a vrátíme vždy zpět). Zavedeme náhodnou veličinu S , která bude vyjadřovat, kolikrát jsme v těchto n losováních vylosovali černou. Taková náhodná veličina může nabývat hodnot $0, 1, 2, 3, \dots, n$. Pravděpodobnost jednotlivých možností bude záviset na poměru černých a všech kuliček a můžeme ji opět počítat na základě binomického rozdělení $\text{Bi}(n, p)$. Podmíněná pravděpodobnost hodnoty s veličiny S v závislosti na veličině X je rovna

$$P(S = s|X = p) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Celkovou pravděpodobnost vypočítáme opět podle věty o úplné pravděpodobnosti (6)⁸:

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(S = s|X = t) f_X(t) dt = \\ &= \binom{n}{s} \int_0^1 t^s (1-t)^{n-s} dt = \binom{n}{s} B(s+1, n-s+1) = \\ &= \binom{n}{s} \frac{\Gamma(s+1) \cdot \Gamma(n-s+1)}{\Gamma(n+2)} = \binom{n}{s} \frac{s! \cdot (n-s)!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Výslednou náhodnou veličinu Y opět získáme pomocí Bayesova vzorce. Vypočítáme opačně podmíněnou hustotu pravděpodobnosti – tzv. aposteriorní hustotu pravděpodobnosti f_Y :

$$\begin{aligned} f_Y(p) &= f_{X|(S=s)}(p) = \frac{P(S = s|X = p) \cdot f_X(p)}{P(S = s)} = \\ &= \frac{\binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s} \cdot f_X(p)}{\frac{1}{n+1}} = \\ &= \begin{cases} \frac{(n+1)!}{s! \cdot (n-s)!} p^s (1-p)^{n-s} & \text{pro } p \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \end{aligned}$$

a úloha 4 je vyřešena.

⁸Při výpočtech užíváme opět funkce gama, beta a příslušných pravidel.

Jak jsme uvedli, pravidlo následnosti získáme tím, že vypočítáme střední hodnotu této náhodné veličiny, přičemž opět užijeme funkcí gama a beta a jejich vlastností:

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t) \, dt = \binom{n}{s} \int_0^1 t^{s+1} (1-t)^{n-s} \, dt = \\ &= \binom{n}{s} B(s+2, n-s+1) = \binom{n}{s} \frac{\Gamma(s+2) \cdot \Gamma(n-s+1)}{\Gamma(n+3)} = \\ &= \binom{n}{s} \frac{(s+1)! \cdot (n-s)!}{(n+2)!} = \frac{s+1}{n+2} \end{aligned}$$

Tím jsme obdrželi hledaný vzorec.

Literatura

- [1] Calda, E., & Dupač, V. (2000). *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. Prometheus.
- [2] Childers, T. (2011). *Co je pravděpodobnost? Teorie, interpretace, usuzování*. Aleph.
- [3] Mačák, K. (1997). Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století. In J. Bečvář & E. Fuchs (Eds.), *Historie matematiky II. Seminář pro vyučující na vysokých školách* (s. 29–68). Prometheus.
- [4] Marinoff, L. (1994). A resolution of Bertrand's paradox. *Philosophy of Science*, 61(1), 1–24. <https://www.jstor.org/stable/188286>
- [5] Mošna, F. (2017). *Pravděpodobnost a náhodné veličiny*. PedF UK.
- [6] Robová, J., Hála, M., & Calda, E. (2013). *Matematika pro střední školy. Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Prometheus.
- [7] Zvára, K., & Štěpán, J. (2006). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Matfyzpress.

Abstract

This article covers the basic principles of Bayesian procedures based on Bayes' formula and the total likelihood theorem. It presents these formulas for random phenomena and random quantities, and in the form of simple problems, it approximates the ideas that make it possible to estimate the distribution of probability in a general situation based on an individual empirical result. One of the basic rules for probability – the so-called principle of indifference – is used in the considerations carried out. In the conclusion, a succession rule is derived based on Bayesian procedures.

František Mošna
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1 – Nové Město
e-mail: mosna@tf.czu.cz