Tomáš Schütz

O jedné zkušenosti s výukou diferenciálních rovnic na Pedagogické fakulte UK v Praze

Učitel matematiky, Vol. 2 (1994), No. 1, 8–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152550

k neúchylné důslednosti. V tomto navádění k samostatnosti a důslednosti je veliký ethický a tedy vychovatelský význam mathematického vzdělání.

Připravil: F. Janeček

O jedné zkušenosti s výukou diferenciálních rovnic na Pedagogické fakultě UK v Praze

Tomáš Schütz, PeF UK Praha

K napsání následujících řádků mě inspirovala jedna překvapivá zkušenost, kterou jsem učinil ve výuce obyčejných diferenciálních rovnic na naší fakultě.

Tento předmět tvoří součást kursu matematické analýzy pro studenty učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů aprobací s matematikou. Podle dobíhající koncepce studia je v příslušném ročníku věnováno jeho výuce přibližně 30 hodin přednášky a 30 hodin semináře. Podle klasického uspořádání učiva do didaktického systému stojí na počátku rovnice se separovanými proměnnými jako jeden z nejelementárnějších typů úloh a lineární diferenciální rovnice prvního řádu i vyšších řádů následují až poté. Podle mých opakovaných zkušeností ze seminářů však činí rovnice se separovanými proměnnými oproti dalším výše citovaným tématům studentům velké potíže. Pokoušel jsem se hledat příčiny tohoto jevu nejen analýzou výkonů studentů v kontrolních testech, nýbrž i několika individuálními rozhovory mimo výuku, ze kterých skutečně vyplynulo, že studenti subjektivně pociťují rovnice se separovanými proměnnými jako obtížnější téma ve srovnání s lineárními diferenciálními rovnicemi, přičemž základní příčina tkví v následujícím principu. Všechny úlohy na lineární rovnice prvního řádu a na lineární rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty jsou totiž řešitelné podle uniformního, rutinního a do podrobností propracovaného schématu, kde s výjimkou možnosti numericky obtížného výpočtu nečeká na studenta žádné úskalí, zatímco u rovnic se separovanými proměnnými je obecná metoda pouze rámcová a každá úloha je trochu jiná než všechny ostatní a vyžaduje individuální přístup. Užiji-li zjednodušené přirovnání s tematickými celky školské matematiky, lineární diferenciální rovnice se v uvedeném principu podobají např. řešení trojčlenky úměrou, zatímco rovnice se separovanými proměnnými se podobají např. konstrukčním úlohám z geometrie.

Podle klasického přístupu k rovnicím se separovanými proměnnými je dána spojitá funkce f(t) na otevřeném intervalu I a spojitá funkce g(y) na otevřeném intervalu J taková, že pro každé y $\in$ J je g(y) různé od nuly. Rovnici

$$\frac{dy}{dt}=f(t).g(y)$$

řešíme v následujících krocích.

i)

$$\frac{dy}{dt}=f(t).g(y)$$

ii)

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(t)dt$$

iii) nechť F(t) je primitivní funkce k f(t) na I, nechť funkce G(y) je primitivní funkcí k funkci 1 / g(y) na J. Integrací předchozí rovnosti dostáváme

G(y) = F(t) + C (C je integrační konstanta)

iv) y = G^{-1}(F(t) + C)

V řadě učebních textů (zejména v řešených úlohách ve sbírkách) není o rovnicích se separovanými proměnnými řečeno o mnoho více než právě popsané schéma i)-iv), které na první pohled budí dojem jednoduchosti a bezproblémové srozumitelnosti. Nejobtížnější momenty, které na první pohled patrné nejsou, avšak na které studenti často narážejí, bych shrnul do následujících bodů.

1. Málokterý učební text zdůrazní, že definičním oborem řešení je pouze množina všech takových reálných čísel t, pro která hodnota výrazu F(t) + C leží v definičním oboru funkce G^{-1}, tzn. v oboru hodnot funkce G. Při stanovování definičního oboru řešení potom většina studentů postupuje tak, že pouze mechanicky vyloučí takové případy, jako jsou nula ve jmenovateli, záporné číslo pod druhou odmocninou

atd., a tím někdy definiční obor řešení fakticky nedovoleně rozšíří. Výstižným příkladem je rovnice

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{(y^2+1)}}{y+\sqrt{(y^2+1)}}$$

kde řešení je popsáno formulí

$$y=\frac{(t+C)^2-1}{2.(t+C)}$$

Většina studentů v takovém případě prohlásí za definiční obor množinu $(-\infty, -C) \cup (-C, +\infty)$, zatímco skutečným definičním oborem je pouze $(-C, +\infty)$. Je pravda, že stanovení definičního oboru řešení přesně podle pravidla

$D = \{ t \in R \mid F(t) + C \in H_G \}$

může být obtížné (a při některých složitějších tvarech funkce F(t) prakticky nerealizovatelné) a stanovení definičního oboru provedením zkoušky může být početně zdlouhavé. Snad proto bývá v řadě řešených úloh v učebních textech stanovován definiční obor intuitivně podle principu "případ od případu zvlášť", což ovšem vyžaduje nadhled a zkušenost, která studentu-začátečníkovi pochopitelně chybí.

2. Schéma i)-iv) je odvozeno pro zidealizované podmínky týkající se funkcí f(t),g(y). Například v rovnici

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y^4-1}{y}\cdot\frac{1}{t}$$

má funkce g(y) nulové body +1, -1 a není definovaná v - bodě 0. Označme nyní

$I_1 = (-\infty, 0)$ $J_1 = (-\infty, -1)$
$I_2 = (0, +\infty)$ $J_2 = (-1, 0)$
$J_3 = (0, 1)$
$J_4 = (1, +\infty)$

Jedna možnost užití schématu i)-iv) je propočítat podrobně zvlášť každý z osmi dílčích případů

$[t,y] \in I_k \times J_m;\ 1 \le k \le 2,\ 1 \le m \le 4.$

(v každém z těchto dílčích případů jsou beze zbytku splněny příslušné předpoklady o funkcích f(t), g(y)). To je pochopitelně zdlouhavé. Druhá možnost je zkusit spočítat všechny eventuality najednou, což zase vyžaduje maximální opatrnost, abychom se nedopustili nějakého nekorektního obratu. Dále u uvedené úlohy je třeba uvážit konstantní řešení

$$y = +1 \text{ a } y = -1$$

a pomocí věty o existenci a jednoznačnosti pro rovnice prvního řádu rozřešené vzhledem k derivaci vyjasnit, že každé nekonstantní řešení dané rovnice definované na souvislém intervalu má všechny funkční hodnoty v některé z množin $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, +\infty)$. To rovněž není jednoduchá úvaha pro studenta - začátečníka.

3. U tzv. homogenních rovnic - např.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y+t}{y-t}$$

počítáme řešení pomocí substituce $y(t) = t \cdot z(t)$. Podle zmíněné věty o existenci a jednoznačnosti každým bodem

$$[t_0, y_0] \in R \times R, \text{ kde } t_0 \text{ je různé od } y_0,$$

prochází právě jedno maximální řešení. Avšak uvedenou substitucí ztrácíme každé řešení definované na intervalu obsahujícím bod $t_0 = 0$. Dopočítání řešení Y(t) procházejícího např. bodem [0,10] způsobem známým jako "slepování grafů" a zejména ověření podmínky

$$\frac{dY}{dt}(0) = \frac{Y(0)+0}{Y(0)-0}$$

činí rovněž značné potíže.

4. U některých úloh převoditelných na separaci proměnných např.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y+3}{t+y+1}$$

činí obtíž skutečnost, že k vyřešení úlohy je třeba dvakrát substituovat.

5. Vyskytují se též obtíže týkající se správného chápání významu roznásobení rovnice ve výchozím tvaru výrazem dt a - vidění integrálu

$$\int\left(\frac{1}{g(y(t))}\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right)dt$$

za integrálem

$$\int\frac{1}{g(y)}dy$$

Na základě popsaných zkušeností jsem se v letošním školním roce rozhodl pro zařazení rovnic se separovanými proměnnými do vyučování až po probrání lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu i vyšších řádů, tj. v okamžiku, kdy studenti získali určitý stupeň jistoty, cviku a sebevědomí v diferenciálních rovnicích zvládnutím celků subjektivně pociťovaných jako snazších. Dosavadní výkony studentů (zejména v průběžných zápočtových testech) hovoří ve prospěch tohoto přístupu.

Výše uvedený didaktický přístup pochopitelně nikomu nevnucuji, pouze jej vysokoškolským učitelům matematiky nabízím jako alternativní možnost uspořádání učiva obyčejných diferenciálních rovnic v případě, kdy se ve výuce podle klasického uspořádání učiva vyskytnou takové potíže, jaké byly popsány na začátku článku.

Uvítám rovněž co nejširší diskusi k dané problematice.

Základní kurikulum z matematiky pro evropského inženýra (SEFI-MWG 1992)

R. Grepl, VA Brno

SEFI (Societé Européenne pour la Formation des ingenieurs) je nevládní mezinárodní organizace, která byla založena v roce 1973. Její oblastí zájmu je inženýrské vzdělávání v Evropě, studium problematiky