

Antonín Slavík; Jiří Veselý
Ludwig Otto Blumenthal (1876-1944)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 69 (2024), No. 3, 153–166

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152594>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944)

Antonín Slavík, Jiří Veselý

Abstrakt. Před osmdesáti lety zemřel v Terezíně německý matematik Ludwig Otto Blumenthal, žák Davida Hilberta. Trochu kuriózní je fakt, že se do Terezína dostal na vlastní žádost. Mezi německými matematiky přelomu 19. a 20. století je jeho osud jedním z nejtragičtějších. V textu připomínáme jeho život a oblasti matematiky, kterým se věnoval.

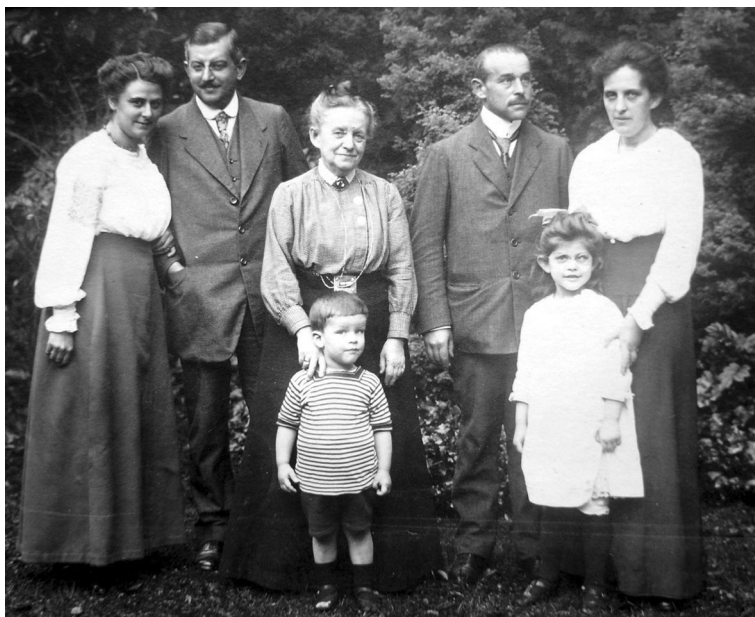
1. Blumenthalův život

Ludwig Otto Blumenthal se narodil v rodině židovského lékaře Ernsta Blumenthala ve Frankfurtu nad Mohanem. Po absolvování tamějšího gymnázia začal studovat v Göttingenu medicínu. Jeho zájem si však brzy získaly přírodní vědy a matematika. Z učitelů měli na něj největší vliv matematikové David Hilbert (1862–1943), Felix Klein (1849–1925) a fyzik Arnold Sommerfeld (1868–1951). Část studia matematiky absolvoval v Mnichově, kde navštěvoval např. přednášky Ferdinanda von Lindemanna (1852–1939) a také Alfreda Pringsheima (1850–1941).

Roku 1898 v Göttingenu obhájil doktorskou disertaci [3], kterou sepsal pod vedením Hilberta, v jejím závěru však děkuje též Sommerfeldovi. Zimní semestr školního roku 1899/1900 strávil Blumenthal v Paříži u Émila Borela (1871–1956) a Camilla Jordana (1838–1922). V roce 1901 se v Göttingenu habilitoval a působil tam jako soukromý docent až do roku 1905.

V roce 1901 bylo Sommerfeldovi nabídnuto místo vedoucího katedry mechaniky na Porýnsko-vestfálské technické univerzitě v Cáchách (*Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen*, dále jen RWTH). Sommerfeld toto místo přijal a později fyzikovi a rektorovi RWTH Adolfu Wüllnerovi (1835–1908) doporučil Blumenthala. Ten byl 1. října 1905 v Cáchách ve věku 29 let jmenován profesorem matematiky; předtím působil krátce v Marburgu. David Hilbert při této příležitosti pronesl projev, který začínal větou: *Když si představím přítele Blumenthala, celou jeho bytost, jednání a úmysly, zdá se mi, že nic není bližšího základnímu rysu jeho osobnosti nežli potěšení, které má ze své práce, a upřímná radost, s jakou ji tvůrčím způsobem vykonává.* Blumenthal se roku 1908 oženil s dcerou göttingenského lékaře Wilhelma Ebsteina (1836–1912) Amalií známou spíše jako Mali (1876–1943). Měli čtyři děti, synové Karl Wilhelm (nar. 1910) a Peter Paul (nar. 1920) však zemřeli velmi mladí a pouze dcera Margrete (1911–1980) a syn Ernst (1914–1974) se dožili dospělosti; viz [13]. První světové války se Blumenthal zúčastnil nejprve jako voják, pak pracoval asi dva roky jako ředitel vojenských meteorologických stanic a ve firmě Siemens-Schuckert na konstrukci letadel. Roku 1919 se vrátil na RWTH. V roce 1924 zastával funkci předsedy Německé matematické společnosti (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, dále DMV).

Doc. RNDr. ANTONÍN SLAVÍK, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: slavik@karlin.mff.cuni.cz, doc. RNDr. JIŘÍ VESELÝ, CSc., Kolínská 15, 130 00 Praha 3, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz



Obr. 1. Na snímku jsou postupně zprava Amalie a Otto Blumenthalovi s dětmi Margrete a Ernstem, vedle Amaliina matka Elfriede Ebsteinová a bratr Erich Ebstein s chotí Carolou (Göttingen, 1915). Originál foto je majetkem rodiny Blumenthalových

V roce 1930 navštívil na pozvání Charkov, o rok později pak Moskvu, Leningrad, Charkov a Tiflis (nynější Tbilisi).

Po nástupu nacistů k moci byl roku 1933 propuštěn, nebylo to však přímo z rasových důvodů, neboť to v té době v jeho případě ještě nešlo. Ve zdůvodnění se objevuje odkaz na jeho členství v Lize pro lidská práva (*Liga für Menschenrechte*), o kterém Blumenthal v dotazníku, který musel vyplnit, napsal: *Vstoupil jsem do Ligy pro lidská práva, protože jsem sympatizoval s jejími mírovými a prolidskými snahami. Aktivně jsem v ní ani pro ni nepracoval, stejně tak jako je mi cizí politická činnost. Neúčastnil jsem se jejích schůzí ani jiných akcí a nebyl jsem v kontaktu s žádným z jejích členů.*¹

Situace jeho rodiny se rázem změnila. Narůstající diskriminace, ztráta některých přátel, zaměstnání a perspektivy, chování některých studentů a kolegů, k tomu studující nezajištěné děti – to vše doléhalo na Blumenthalovu psychiku. Dcera Margrete měla štěstí: studovala v Kolíně nad Rýnem a mohla v roce 1934 dokončit doktorské zkoušky. Syna Ernsta, kterému bylo již v roce 1933 znemožněno pokračovat na RTWH, poslali rodiče studovat do Manchesteru a zakrátko se v Anglii ocitla i Margrete; viz [12].

Po roce 1933 Blumenthal přednášel již pouze mimo Německo. Na podzim roku 1934 navštívil Švýcarsko, později též Sofii, kde měl 20 hodin přednášek o integrálních rovnicích, a Prahu, kde spolek Lotos dne 29. dubna 1935 uspořádal jeho přednášku *David Hilberts Leben und Werke. Aus Anlaß der Herausgabe seiner gesammelten Werke* (viz [1], str. 341).

¹Blumenthal byl také členem Společnosti pro mír (*Friedensgesellschaft*), která se rovněž ideologicky rozcházela s nacismem.

Je ironií osudu, že v roce 1936 Blumenthal obdržel vyznamenání za válečné zásluhy (*Ehrenkreuz für Frontkämpfer*; dokument je reprodukován v [13], str. 28). Život v Německu se přitom pro jeho rodinu pomalu ale jistě stával čím dál hůře snesitelným. Měli sice stále dost věrných přátel a podporovatelů, ti však nemohli jejich blížícímu se tragickému osudu zabránit. Židé byli stále více vytlačováni na okraj společnosti a jakékoli jednání s úřady bylo stále těžší. Blumenthalovy snad alespoň trochu uklidňoval fakt, že se jim podařilo dostat děti do relativního bezpečí. Tak jako mnoho jiných v podobné situaci uvažovali o odchodu do Nizozemska, které tehdy bylo jakousi přestupní stanicí na cestě do bezpečí. Navíc Blumenthal měl např. v Delftu řadu dobrých přátel (M. Burgers, C. B. Biezeno, J. A. Schouten), kteří mu pomohli získat povolení ke vstupu do Nizozemska. A tak rozhodnutí odejít do této země postupně začalo nabývat konkrétní podoby.

2. Blumenthalova matematika

Přerušíme nyní na okamžik vyprávění o Blumenthalově životním osudu stručným popisem jeho odborných aktivit. Patřil k těm, jejichž práce není nápadná, ale je nepostradatelná. V období 1906–1938, tj. po dobu 32 let, byl výkonným redaktorem prestižního časopisu *Mathematische Annalen*. Od roku 1900 byl členem DMV a v období 1924–1933 redaktorem jejího časopisu *Jahresbericht der DMV*. Byl také autorem Hilbertova životopisu [6].

Matematické tvorbě Otto Blumenthala je věnována pozornost ve velmi obsáhlém článku [8], kterým je inspirován následující výklad, a dále v článcích [2], [30]. Zaměříme se pouze na vybrané aspekty jeho výzkumu s důrazem na výsledky, které jsou dodnes citovány.

Blumenthal se zabýval matematickou analýzou, zejména teorií funkcí komplexní proměnné, a v duchu göttingenské tradice jej zajímaly i aplikace. O tuto tradici se zasloužili nejen Klein a Hilbert, ale také Hermann Minkowski (1864–1909) a Carl Runge (1856–1927). Blumenthalova disertace byla věnována řetězovým zlomkům, které vznikají rozvojem funkcí ve tvaru Stieltjesova integrálu

$$f(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{d\Phi(\xi)}{z - \xi}. \quad (1)$$

V další sérii prací se zabýval fyzikálně-technologickými problémy. V některých zmiňuje podněty svých cášských kolegů, fyziků Theodora von Karmána (1881–1963), Ludwiga Hopfa (1884–1939)² či Eleonory Trefftz (1920–2017). Cáchy byly především inženýrským pracovištěm a to se odráželo i v doktorských pracích, které vedl. Jedna byla např. věnována otevřenému zásadnímu problému podélné nestability letadel. Za zmínku stojí fakt, že i dvě práce samotného Blumenthala byly věnovány problému napětí a namáhání v křídlech letadel.

²Hopfovi, který byl také roku 1933 propuštěn, se podařilo utéct s manželkou a dcerou z Německa do Anglie. Získal místo v irském Dublinu, kde v prosinci 1939 náhle zemřel; viz [13], str. 496–497.

2.1. Ortogonální systémy polynomů

Popíšeme podrobněji jedno tvrzení z Blumenthalovy disertační práce [3], které souvisí s nulovými body ortogonálních systémů polynomů. Blumenthal k této problematice dospěl při studiu polynomů, které představují čitatele a jmenovatele sblížených zlomků (konvergent) v rozvoji výše zmíněné funkce (1).

Nejprve připomeneme některé základní pojmy a výsledky související s ortogonálními systémy; podrobnější informace včetně předpokladů všech tvrzení lze najít v knize [19] a v digitální knihovně funkcí [24].

Nechť je dán interval $I \subset \mathbb{R}$ a váhová funkce $w: I \rightarrow [0, \infty)$, která není skoro všude nulová. Ortogonální systém polynomů vzhledem k funkci w na intervalu I je posloupnost $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, kde p_n je polynom stupně n a platí³

$$\int_I p_n(x) p_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0, \quad m \neq n.$$

Ortogonální systémy polynomů mají řadu aplikací v teorii obyčejných diferenciálních rovnic, matematické fyzice, teorii aproximace a dalších disciplínách. Z klasických ortogonálních systémů jsou historicky nejstarší Legendreovy polynomy P_n , které vzhledem k váhové funkci $w(x) = 1$ tvoří ortogonální systém na intervalu $[-1, 1]$ a splňují $P_n(1) = 1$; těmito podmínkami je již posloupnost jednoznačně určena. Z dalších známých ortogonálních systémů jmenujme např. ještě Hermiteovy polynomy (váhová funkce $w(x) = e^{-x^2}$, resp. $w(x) = e^{-x^2/2}$ na celé reálné ose) a Čebyševovy polynomy prvního druhu, které lze získat ze vztahu

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0, \quad m \neq n.$$

Pokud v integrálu provedeme substituci $x = \cos \theta$, pak je $dx = -\sin \theta d\theta$, neboli $d\theta = -dx / \sin \theta = -dx / \sqrt{1-x^2}$. Dostáváme

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = 0 \quad \text{pro } m, n \in \mathbb{N}_0, \quad m \neq n,$$

kde jsme zavedli označení

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

Ačkoliv to není na první pohled zřejmé, pomocí goniometrických vztahů lze ukázat, že funkce T_n představují polynomy a lze je tudíž uvažovat na celé reálné ose. Nazývají se Čebyševovy polynomy prvního druhu a vztah (2) ukazuje, že jde o ortogonální systém polynomů vzhledem k váhové funkci $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ na intervalu $(-1, 1)$.

V některých situacích potřebujeme informace o nulových bodech ortogonálního systému. Podle definice má polynom p_n v libovolném ortogonálním systému stupeň n . Dá se dokázat, že všechny jeho kořeny jsou reálné a navzájem různé; označme je $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$. Dále platí tzv. věta o oddělování, která říká, že mezi každými

³Obecněji je možné místo váhové funkce w uvažovat Lebesgueovu–Stieltjesovu míru μ generovanou jistou neklesající funkcí. Podmínka ortogonalitě má pak tvar $\int_I p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = 0$ pro $m \neq n$.

dvěma po sobě jdoucími kořeny polynomu p_{n+1} leží právě jeden kořen polynomu p_n , tj. platí

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1} \quad \text{pro } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Z monotonie plyne, že existují limity $\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i}$ a $\eta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-j+1}$, přičemž $-\infty \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \eta_2 \leq \eta_1 \leq \infty$. Hodnota ξ_i je limita i -tých kořenů polynomů p_n , počítáme-li kořeny od nejmenšího, a hodnota η_j je limita j -tých kořenů polynomů p_n , počítáme-li od největšího. Interval $[\xi_1, \eta_1]$ je nejmenší interval obsahující kořeny všech polynomů ortogonálního systému. Protože $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ je neklesající a $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$ je nerostoucí, můžeme ještě zavést označení

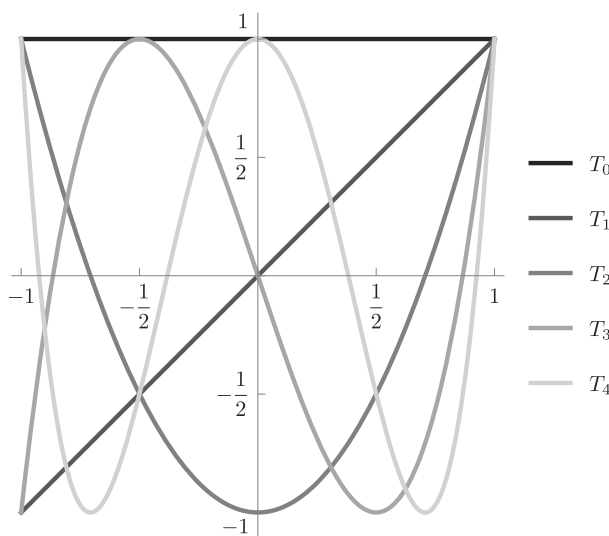
$$\sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i, \quad \tau = \lim_{j \rightarrow \infty} \eta_j,$$

které budeme později potřebovat.

V případě Čebyševových polynomů T_n je situace jednoduchá: Ze vztahu (2) snadno zjistíme, že T_n má n kořenů v bodech $\cos(\frac{\pi(k+1/2)}{n})$, kde $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Protože kosinus je klesající funkce na $[0, \pi]$, platí

$$x_{n,i} = \cos\left(\frac{\pi(n-i+1/2)}{n}\right), \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3)$$

Skutečnost, že kořeny po sobě jdoucích polynomů T_n a T_{n+1} se střídají, dokládá obr. 2. Ze vztahu (3) snadno zjistíme, že $\xi_i = -1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a $\eta_j = 1$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Platí tedy $[\sigma, \tau] = [-1, 1]$. Množina všech kořenů Čebyševových polynomů je hustá podmnožina tohoto intervalu; později uvidíme, že to není náhoda.



Obr. 2. Čebyševovy polynomy $T_0, \dots, T_4$

Případy, kdy známe přesné hodnoty kořenů p_n , jsou spíše výjimečné. Např. u Legendreových polynomů P_n lze kořeny přesně vypočítat jen pro nízké hodnoty n ; u vyšších

stupňů nezbyvá, než počítat numericky. I v takových případech je však možné dokázat, že množina všech kořenů je hustá v jistém intervalu, což je jeden z výsledků Blumenthalovy disertace [3].

Je známo, že každý ortogonální systém polynomů splňuje jistou lineární rekurentní rovnici ve tvaru

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

kde A_n, B_n, C_n jsou reálné konstanty a $p_{-1}(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Například pro Legendreovy polynomy P_n máme $A_n = \frac{2n-1}{n}$, $B_n = 0$, $C_n = \frac{n-1}{n}$, zatímco Čebyševovým polynomům T_n odpovídá volba $A_n = 2$ pro $n \neq 1$, $A_1 = 1$, $B_n = 0$, $C_n = 1$ (viz [24], oddíl 18.9 (i)).

Pokud chceme studovat nulové body ortogonálního systému $\{p_n\}_{n=0}^\infty$, můžeme předpokládat, že všechny polynomy jsou monické, tj. koeficient u nejvyšší mocniny je 1 (v opačném případě polynomy vydělíme příslušným koeficientem, čímž se neporuší ortogonalita ani poloha kořenů). Pro monické polynomy se předchozí rekurentní rovnice zjednoduší do tvaru

$$p_n(x) = (x - c_n)p_{n-1}(x) - \lambda_n p_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

pro jisté reálné konstanty c_n a λ_n . Nyní již můžeme zformulovat Blumenthalův výsledek: *Jestliže existují vlastní limity $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$, pak pro dříve zavedené hodnoty σ, τ platí*

$$\sigma = c - 2\sqrt{\lambda}, \quad \tau = c + 2\sqrt{\lambda}$$

a množina všech nulových bodů polynomů p_n je hustá podmnožina intervalu $[\sigma, \tau]$.

Důkaz je netriviální, dá se nalézt např. v Chiharově článku [18] a pozdější knize [19], s. 121. Tvrzení je zmiňováno i dalšími autory, byl to však patrně Chihara, kdo jej poprvé nazval Blumenthalovou větou. Podrobnosti a informace o souvisejících výsledcích může čtenář nalézt v [8].

Pro ilustraci uvažujme Legendreovy polynomy P_n . Necht k_n značí koeficient u x^n v polynomu P_n . Vydělením získáme monické polynomy $\tilde{P}_n = P_n/k_n$, které podle [24], oddíl 3.5 (vi) splňují rekurentní rovnici

$$\tilde{P}_n(x) = x\tilde{P}_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2 - 1} \tilde{P}_{n-2}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Srovnáním se vztahem (4) vidíme, že v tomto případě platí

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{4(n-1)^2 - 1} = \frac{1}{4}.$$

Z Blumenthalovy věty pak plyne $\sigma = -1$, $\tau = 1$ a skutečnost, že množina všech kořenů polynomů $\tilde{P}_n$, tudíž i Legendreových polynomů P_n , je hustá v intervalu $[-1, 1]$.

Je na místě ještě podotknout, že ne všechny výsledky o ortogonálních polynomech z Blumenthalovy disertace jsou správné; viz [18], s. 364 a [20].

2.2. Maximum modulu a věta o třech kružnicích

Během svého pobytu v Paříži se Blumenthal patrně blíže seznámil s teorií funkcí komplexní proměnné. Do této oblasti patří jeho další výsledek, kterému se budeme věnovat. Pro jednoduchost budeme pracovat s holomorfní (tj. diferencovatelnou) funkcí $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; úvahy je ovšem možné zobecnit na funkce, které jsou holomorfní pouze v kruhu nebo v mezikruží se středem v počátku.

Pokud nás zajímá chování funkce f , můžeme se ptát, jaké maximální hodnoty nabývá $|f|$ (neboli modulus f) na kružnici se středem v počátku a poloměrem r . Dostaneme tak funkci

$$M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad r \geq 0. \quad (5)$$

Je zřejmé, že M je spojitá funkce. Pokud f není konstantní, pak je M rostoucí. Skutečně, pro každé $r > 0$ nabývá spojitá funkce $|f|$ maxima v kruhu se středem v počátku a poloměrem r , a podle tzv. principu maxima modulu, což je jedna ze základních vět komplexní analýzy, toto maximum nemůže ležet uvnitř kruhu (jinak by f byla konstantní).

Nabízí se přirozená otázka, zda vhodnou volbou nekonstantní holomorfní funkce f lze získat zcela libovolnou jí přiřazenou rostoucí funkci M . Záporná odpověď plyne z Blumenthalovy práce [4], kde je dokázáno, že funkce

$$r \mapsto r \frac{d}{dr} \log M(r), \quad r > 0,$$

je vždy rostoucí (jde tedy po monotonii o další nutnou podmínku na funkci M).

Častěji bývá Blumenthalovo tvrzení formulováno jiným způsobem. Abychom mu porozuměli, učiníme následující pozorování: Mějme jistou reálnou funkci g takovou, že $x \mapsto xg'(x)$ je rostoucí na $(0, \infty)$. Definujeme-li funkci $h(t) = g(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, pak platí $h'(t) = e^t g'(e^t)$, což je podle předpokladu rostoucí funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Tudíž h je konvexní funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$ a přechodem zpět k funkci $g(x) = h(\log x)$ můžeme říct, že g je konvexní funkcí $\log x$.

Blumenthalovo tvrzení tedy vlastně znamená, že $\log M(r)$ je konvexní funkcí $\log r$. Ještě známější je varianta, které se říká Hadamardova věta o třech kružnicích. Uvažujme tři kružnice se středy v počátku a poloměry $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Pokud známe maxima $|f|$ na krajních kružnicích, tj. hodnoty $M(r_1)$ a $M(r_3)$, co lze říct o hodnotě $M(r_2)$, která je maximem $|f|$ na prostřední kružnici? Z výše uvedených úvah plyne, že funkce $h(t) = \log M(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, je konvexní. To podle definice znamená, že platí

$$h((1-\lambda)t_1 + \lambda t_3) \leq (1-\lambda)h(t_1) + \lambda h(t_3)$$

pro každou volbu $\lambda \in [0, 1]$ a $t_1 < t_3$. Zvolme t_1 a t_3 tak, aby platilo $e^{t_1} = r_1$ a $e^{t_3} = r_3$. Předchozí nerovnost pak bude mít tvar

$$\log M(e^{(1-\lambda)t_1 + \lambda t_3}) \leq (1-\lambda) \log M(r_1) + \lambda \log M(r_3). \quad (6)$$

Zvolíme-li

$$\lambda = \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}, \quad \text{tj. } 1 - \lambda = \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1},$$

pak snadno zjistíme, že $(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_3 = \log r_2$, a dosazením do levé strany nerovnosti (6) obdržíme

$$\log M(r_2) \leq (1 - \lambda) \log M(r_1) + \lambda \log M(r_3),$$

neboli po rozepsání

$$\log M(r_2) \leq \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_3). \quad (7)$$

To je zmíněná Hadamardova věta o třech kružnicích, která umožňuje odhadnout $M(r_2)$ pomocí $M(r_1)$ a $M(r_3)$. Někdy se lze setkat s ekvivalentní podobou, kterou získáme vynásobením $\log r_3 - \log r_1$ a použitím exponenciální funkce:

$$M(r_2)^{\log(r_3/r_1)} \leq M(r_1)^{\log(r_3/r_2)} M(r_3)^{\log(r_2/r_1)}. \quad (8)$$

Variantu (8) lze nalézt např. v článku J. E. Littlewooda [22] z roku 1912, autor však neuvedl její důkaz ani jakýkoliv odkaz na zdroj. Stejná nerovnost se objevila v článku H. Bohra a E. Landaua [7] z roku 1913, přičemž za jejího autora označili J. Hadamarda. Konečně G. H. Hardy uvedl v práci [16] z roku 1915 nerovnost (7) a napsal, že toto tvrzení objevili nezávisle na sobě Blumenthal, Faber a Hadamard, přičemž první formulace pochází od Hadamarda a první důkaz od Blumenthala.

Zmínění matematikové využívali větu o třech kružnicích např. ke zkoumání vlastností Riemannovy funkce zeta, o čemž svědčí i názvy článků [7], [22]. O souvislosti s Riemannovou funkcí se lze dočíst i v pěkné přehledové knize [10], oddíl 9.3. Závěrem ještě zmíníme úzce související výsledek, tzv. větu o třech přímkách. Ta umožňuje odhadnout maximum modulu holomorfní funkce na přímce $y = y_0$ pomocí maxim modulu na přímkách $y = a$ a $y = b$, kde $a < y_0 < b$. Větu o třech kružnicích lze pak jednoduše odvodit jako důsledek věty o třech přímkách, která se většinou dokazuje pomocí principu maxima modulu; viz např. [32], kapitola 23.

2.3. Maximální křivky

Funkce M zavedená vztahem (5), která popisuje maximum $|f|$ na kružnici o poloměru r , závisí na volbě f . Abychom tuto skutečnost zdůraznili, budeme nyní psát

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}, \quad r \geq 0.$$

Blumenthala zajímala nejen hodnota maxima $|f|$ na dané kružnici, ale také body, ve kterých se tohoto maxima nabývá. Studoval tedy množinu

$$\mathcal{M}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| = M(|z|, f)\}.$$

Není těžké si rozmyslet, že pro mocninnou funkci ve tvaru $f(z) = cz^n$, kde $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \geq 0$, platí $\mathcal{M}(f) = \mathbb{C}$, protože hodnoty $|f|$ jsou konstantní podél každé kružnice $|z| = r$.

Blumenthal ukázal [5], že pro všechny ostatní funkce f , které jsou holomorfní v celé komplexní rovině, nabývá $|f|$ maxima pouze v konečně mnoha bodech libovolné kružnice $|z| = r$. Jestliže tyto body vyznačíme na každé kružnici, získáme množinu $\mathcal{M}(f)$

a tato množina je sjednocením nejvýše spočetně mnoha křivek, které Blumenthal nazval maximálními křivkami funkce f . Studoval jejich obecné vlastnosti (diferencovatelnost, body nespojitosti a další vlastnosti), ale zabýval se i tím, jak tyto křivky tvoří množinu $\mathcal{M}(f)$ vypadají pro konkrétní funkce f .

Křivky lze sestavit tak, že označíme

$$G(r, \theta) = |f(re^{i\theta})|, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

a pro každé $r > 0$ hledáme maximum funkce $\theta \mapsto G(r, \theta)$ na intervalu $[0, 2\pi]$. K tomu lze využít například nutnou podmínku pro extrém a hledat body splňující $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) = 0$.

Blumenthal uvádí, že případ lineární funkce $f(z) = z + z_0$, kde $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, je velmi jednoduchý: Na každé kružnici $|z| = r$ má funkce $|f|$ právě jedno maximum a platí $M(r, f) = r + |z_0|$. Skutečně, použijeme-li goniometrický tvar a píšeme $z = re^{i\theta}$ a $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, pak máme

$$G(r, \theta) = |re^{i\theta} + r_0 e^{i\theta_0}| \leq |r + r_0| = r + r_0,$$

přičemž rovnost nastává jen pro $\theta = \theta_0$. Dostáváme tedy jedinou maximální křivku, kterou je polopřímka vycházející z počátku.

Nalezení maximálních křivek pro kvadratický polynom $f(z) = z^2 + az + b$ je zajímavější, ale mnohem pracnější úloha. Blumenthal rozlišuje několik případů v závislosti na polohách kořenů polynomu (komplexně sdružené, reálné se stejným znaménkem, reálné s opačnými znaménky a všechny ostatní případy). Pro zajímavost uvedme výsledek pro případ, kdy kvadratický polynom f má reálné kořeny $z_1 < 0$ a $z_2 > 0$, přičemž $z_1 + z_2 > 0$. Položíme-li

$$r_1 = \frac{(\sqrt{|z_2|} - \sqrt{|z_1|})\sqrt{|z_1 z_2|}}{\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|}}, \quad r_2 = \frac{(\sqrt{|z_1|} + \sqrt{|z_2|})\sqrt{|z_1 z_2|}}{\sqrt{|z_2|} - \sqrt{|z_1|}},$$

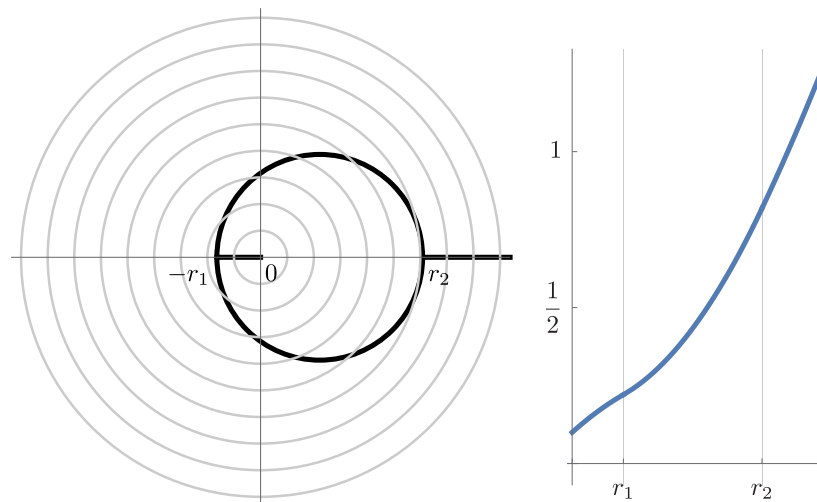
pak množina $\mathcal{M}(f)$ je sjednocením úsečky s koncovými body $(0, 0)$ a $(-r_1, 0)$, kružnice nad průměrem spojujícím body $(-r_1, 0)$ a $(r_2, 0)$ a polopřímky jdoucí z bodu $(r_2, 0)$ ve směru vodorovné osy; situaci znázorňuje obr. 3. Vidíme, že pro $r \in [0, r_1]$ dostáváme jako maximální křivku úsečku; ta se pro $r = r_1$ rozdělí na dva oblouky kružnic, které se pro $r = r_2$ spojí do polopřímky.

Blumenthala zajímalo, zda existují funkce f s nespojitými maximálními křivkami v tom smyslu, že pro jisté r skončí maximální křivka v jistém bodě roviny a poté pokračuje v jiném bodě. Vyslovil domněnku, že existuje kubický polynom s touto vlastností. První příklad holomorfní funkce s nespojitými maximálními křivkami našel G. H. Hardy [15]. Ukázal, že pro funkci

$$f(z) = \exp(\exp(z^2)) + \sin z$$

a dostatečně velká čísla r platí, že pro $\sin r > 0$ leží příslušná maximální křivka v kladné části osy x , zatímco pro $\sin r < 0$ v záporné části. Jedná se tedy o příklad s nekonečně mnoha body nespojitosti.

Správnost Blumenthalovy domněnky byla potvrzena až mnohem později: S. A. Jassim a R. R. London [21] dokázali, že maximální křivky polynomu $z^3 + az^2 - z + b$ nejsou spojitě pro $b > 0$ a $ab > 1 + 2b$.



Obr. 3. Vlevo je tučně vyznačena množina $\mathcal{M}(f)$ pro polynom $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ společně s kružnicemi centrovanými v počátku (slabé čáry); vpravo je příslušná funkce $M(r, f)$ složená ze tří částí parabol

Různým problémům spojeným s funkcí $M(r, f)$, maximálními křivkami a jejich tvarem se věnovala řada dalších autorů. Skutečnost, že se jedná o stále živé téma, dokládají např. novější publikace [17], [25], [31].

3. V Nizozemsku a v Terezíně

Následující popis další etapy Blumenthalova života vychází zejména z informací v [8], [12], [13]. Blumenthal byl perzekvován pro své levicové názory, ale i z rasových důvodů, a to přesto, že on i jeho rodiče konvertovali v roce 1895 k protestantismu. Sám Blumenthal byl v Cáchách aktivním členem protestantské komunity po mnoho let. Podle nacistických zákonů však konverze víry nebyla uznávána. Až do roku 1938 mohl pracovat jako výkonný redaktor *Mathematische Annalen*, ale pak mu byla jakákoliv práce znemožněna. Po mnoha letech obětavé práce pro DMV ztratil možnost být členem organizace, které kdysi předsedal! Po dlouhém rozvažování se Blumenthalovi rozhodli v březnu 1939 prodat svůj krásný dům se zahradou a opustit Německo. Jediná nabídka práce, kterou Blumenthal v té době měl, byla z nizozemského Delftu. A tak se Blumenthalovi 13. července 1939 vydali do Nizozemska.

V letech 1939 až 1944 si Blumenthal psal deník. Používal k tomu kapesní diáře, a tak zápisy mají převážně heslovitý charakter. Deník doplněný rozsáhlými komentáři [13] vyšel zásluhou Volkmar Felsche v roce 2011.⁴ Je překvapivé, jak nezaujatě Blumenthal k psaní přistupoval, jako by byl školený profesionální historik. Jako ukázkou uvádíme překlad zápisu o odjezdu z Německa dne 13. července 1939.

Velmi teplo. 8.15 odchod od paní Ruerové. Strašné hodiny doma, kde zůstala spousta důležitých věcí. M⁵ se v poslední hodině snažila uspořádat staré dopisy

⁴Podrobná a velmi pochvalná recenze komentovaného deníku vyšla v článku [9].

⁵Iniciála M značí Blumenthalovu manželku Mali.

a skoro zuřila. 11.30 odnesla zbytek zavazadel k Lauffovým. 12.15 doma. Stále jsou tu zbytky, se kterými je třeba něco udělat. 12.30 na Západním nádraží. Pan Tillmann tam autem přiváží dva šperky, které M od včerejšího večera marně hledala. Hladká celní kontrola. Hafeneth zařídil, že paní Ruerová a moje sestra mohou na nástupiště, ale nesmějí vstupovat do vlaku. Rozloučení s Němckem. Trčíme dvě hodiny v Simpelveldu, protože ještě nedorazilo moje povolení ke vstupu. M k smrti unavená. Telegrafoval jsem Wolffovi.⁶ Ze Simpelveldu 16.11. Chytily jsme v Maastrichtu zpožděný rychlík z Basileje. Setkání s Wolffem v Utrechtu 19.30, s ním domů, kde ale nebylo nic k jídlu. Telefonoval baronu van Tuyllovi a Friedě. Baron nás chtěl vyzvednout na nádraží, což byla hrozná příhoda. Kolem desáté večer v Zuilenveldu. Přátelské přijetí, poněkud zklamaní z místa. K smrti unavení. Kostky jsou vrženy.

Blumenthal se dokázal přenést přes ponižující chování některých kolegů či bývalých přátel. Život se stal na krátký čas příjemnější, až skoro normální. Poměrně rychle zapadl do nizozemské matematické komunity a porozuměl si s jejími členy. Podařilo se mu zúčastnit se kongresu v belgickém Lutychu, kde se objevili nejružnější staří známí, včetně Godeauxe, Lebesguea, Cartana, van der Woudea a van der Corputa. Do svého deníku si poznamenal: *Francouzi byli velmi přátelští, přestože jsem se Lebesguea bál.*

V srpnu 1939 Blumenthalovi navštívili své děti v Británii. S ohledem na napjatou politickou situaci jejich dcera Margrete (možná nepochopitelně) naléhala na rodiče, aby se urychleně vrátili do Nizozemska. A oni skutečně odjeli 26. srpna, pouhých pět dní před vypuknutím války. Šlo o tragický omyl, když uvážíme, že nacisté tehdy měli již Rakousko a v březnu 1939 obsadili Čechy a Moravu!

Začátek války 1. září zastihl Blumenthalovy v Utrechtu. V deníku se objevuje zápis:

Začátek druhé světové války. Nádherné počasí. Ráno zpráva o anexi Gdaňska. 10 hodin: Vůdcův projev v Říšském sněmu. . . . Večer rozhodnutí Anglie a Francie o odvolání jejich vyslanců. Je to děsivé a následky budou ještě děsivější.

K datu 10. května 1940, kdy bylo Nizozemsko napadeno Německem, si Blumenthal poznamenal:

Probuzen střelbou a hlukem letadel ve čtyři hodiny. Nejméně 10 letadel. Jedno letí velmi nízko, na něm železné kříže, z jednoho padají pomalu tři žluté předměty, pravděpodobně seskok padákem. Dole řve rádio. Značně proti své vůli jsem došel k přesvědčení, že je válka. V osm hodin jsem šel ven vhodit dopisy do schránky. Ihned zatčen a odvezen na stanici. Seděl jsem tam půldruhé hodiny, až se nade mnou slitoval jeden hodný poddůstojník a informoval Mali. Vrátil se s mým pasem a krátce nato jsem byl zdvořile propuštěn. Během zatčení mě Mali hledala u [delftského profesora matematiky] Schoutena, který byl údajně bílý jako stěna. Odpoledne opakovaná protiletadlová a kulometná palba.

⁶Julius Wolff (1882–1945) byl nizozemský matematik židovského původu. Blumenthal s ním napsal své poslední dvě matematické práce, které byly věnovány izoperimetrické úloze. Wolffa s rodinou později Němci převezli do Bergen-Belsenu, kde zemřel na tyfus.

Po marné snaze dostat se do bezpečí se Blumenthalovi v dubnu roku 1943 ocitli ve sběrném táboře ve Vughtu, odkud byli po 18 dnech převezeni do tábora ve Westerborku.⁷ Tam Mali 21. května zemřela. Zpráva, kterou Blumenthal odeslal dětem prostřednictvím Červeného kříže, byla stručná:

Tábor Westerbork 73 (Drente Holland)
Matka dnes zemřela v nemocnici v táboře Westerbork (Holandsko) na zápal plic. Je spasena, hodně na vás myslela. Zůstaňte silní, uctěte její památku! Přeji vám co nejlepší budoucnost!
21. 5. 1943
*Otto Blumenthal*⁸

Když se Blumenthal dozvěděl, že jeho sestra Anna Bettina byla poslána do Terezína, požádal o převoz tamtéž a bylo mu vyhověno. Transportem č. 84 byl 18. ledna 1944 převezen a o dva dny později umístěn do terezínského ghetta. Když tam dorazil jen s několika posledními věcmi – učebnicemi matematiky, rodinnými fotografiemi a Biblí – byla jeho sestra již mrtvá; zemřela 13. června 1943.⁹

Blumenthal byl do poslední chvíle velmi aktivní. V Terezíně se začal učit desátý jazyk – češtinu. Neuhasl tam kulturní život a dokonce se tam i přednášelo. Podrobně o tom pojednává kniha příznačně nazvaná *University over the abyss* [23], která uvádí, že v letech 1942–1944 v Terezíně zaznělo 2 430 přednášek od 520 osob. Blumenthal vystoupil celkem jedenáctkrát s následujícími přednáškami (viz [29], s. 77):

- *Das Gesetz im Unfall* (3. března 1944);
- *Irrtümer als Erkenntnisquellen für die Mathematik* (4. března 1944);
- Matematika a experimentování (16. února 1944, původní název neznáme);
- *Funktionen und Kurven* (17. a 24. června 1944);
- *Konforme Abbildung* (20. června 1944);
- *Die Welt des Differentials und Integrals* (1. července 1944);
- *Kreisverwandtschaft und stereometrische Projektion* (10. července 1944);
- *Integralsätze der Funktionentheorie* (8., 15. a 22. srpna 1944).

V Terezíně našel také nové přátele. Byli mezi nimi např. český inženýr Emil Jílovský (1882–1962) a jeho žena Marie (1884–1958), kteří se mu snažili usnadnit těžký osud. Blumenthal zemřel 13. listopadu 1944 v terezínské nemocnici.¹⁰ Jeho příbuzní se o tom dozvěděli až po válce, když požádali o pomoc pražského advokáta Jaroslava Jínu. Tomu se podařilo vypátrat Jílovského, který v dopise popsal své vzpomínky na Blumenthala a jeho poslední dny. Podle pitevního nálezu trpěl Blumenthal tuberkulózou a měl edém mozku, takže zřejmě zemřel „přirozenou“ smrtí. Každodenní utrpení, strach, hrůzy, hlad a zima však jeho odchod bezpochyby uspíšily.¹¹

⁷Informace o Westerborku a Židech žijících v tehdejším Nizozemsku uvádí česká historička Anna Hájková [14].

⁸Fotokopie zprávy je reprodukována v [13], str. 470.

⁹Viz <https://www.pamatnik-terezin.cz/vezen/te-storm-anna>.

¹⁰Viz <https://www.pamatnik-terezin.cz/vezen/te-blumenthal-ludwig>.

¹¹Jílovského dopis Jínovi z 5. října 1945 je reprodukován v [29] na s. 543–544. Na dalších stranách knihy je dopis německého chemika Gerta Salomona adresovaný Ernstu Blumenthalovi (6. října 1945) a dopis českého fyzika Bedřicha Goldschmieda adresovaný Margrete Blumenthalové (1. prosince 1946), které obsahují další vzpomínky na Blumenthala a jeho pobyt v Terezíně.

Podobný osud jako Blumenthal mělo mezi oběťmi rasové a politické diskriminace Hitlerova režimu mnoho matematiků, ale k němu byl osud obzvláště krutý (viz [26], [27]). Byl to člověk, který se celý život rozdával jiným a který mnoho vytrpěl, a tak je snad jen dobře, že jeho konec byl rychlý. Čest jeho památce!

4. Závěr

Je škoda, že se Blumenthal nedožil doby, kdy se jeho vlast změnila a docenila výsledky jeho práce. K seznámení širší matematické veřejnosti s Blumenthalovým dílem a osudem podstatně přispěli Paul L. Butzer a Lutz Volkmann, autoři článku [8], a také Volkmar Felsch, který se zasloužil o vydání Blumenthalových deníků a biografie v knize [13]; deníky vypátral v roce 2003 v britském Northwichi, kde je opatrovala vdova po Ernstovi. Všichni tři jmenovaní působili na RWTH. Zájemcům doporučujeme též vynikající knihy [28], [29] obsahující kromě jiného výběr z Blumenthalovy korespondence; jejich autorem je americký matematik a historik David E. Rowe (spoluautorem druhého svazku je opět V. Felsch).

Poděkování. Autoři děkují Josefu Danešovi za poskytnutí cenných pramenů, pracovníkům Židovského muzea v Praze za zapůjčení literatury, Ivaně Rapavé a Tomáši Fedorovičovi z Památníku Terezín za pomoc při pátrání po terezínských dokumentech spojených s Blumenthalem a Volkmaru Felschovi za zaslání rodinné fotografie Blumenthalových.

L i t e r a t u r a

- [1] BEČVÁŘOVÁ, M.: *Matematika na Německé univerzitě v Praze v letech 1882–1945*. Karolinum, 2016.
- [2] BEHNKE, H.: *Otto Blumenthal zum Gedächtnis*. Math. Ann. 136 (1958), 387–392.
- [3] BLUMENTHAL, O.: *Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^0 (z - \xi)^{-1} \phi(\xi) d\xi$* . Disertační práce. Georg-August-Universität Göttingen, 1898.
- [4] BLUMENTHAL, O.: *Über ganze transzendente Funktionen*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 16 (1907), 97–109.
- [5] BLUMENTHAL, O.: *Sur le mode de croissance des fonctions entières*. Bull. Soc. Math. France 35 (1907), 213–232.
- [6] BLUMENTHAL, O.: *Lebensgeschichte von David Hilbert*. In: D. Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen III*, Springer, 1935, 388–429.
- [7] BOHR, H., LANDAU, E.: *Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion*. Math. Ann. 74 (1913), 3–30.
- [8] BUTZER, P., VOLKMANN, L.: *Otto Blumenthal (1876–1944) in retrospect*. J. Approx. Theory 138 (2006), 1–36.
- [9] VAN DALEN, D.: *Volkmar Felsch: Otto Blumenthals Tagebücher*. Math. Semesterber. 64 (2017), 105–112.
- [10] EDWARDS, H. M.: *Riemann's zeta function*. Dover Publications, 2001.
- [11] EVDORIDOU, V., PARDO-SIMÓN, L., SIXSMITH, D. J.: *On a result of Hayman concerning the maximum modulus set*. Comput. Methods Funct. Theory 21 (2021), 779–795.

- [12] FELSCH, V.: *Der Aachener Mathematikprofessor Otto Blumenthal* [online]. Dostupné z: <https://www.math.rwth-aachen.de/~Blumenthal>
- [13] FELSCH, V.: *Otto Blumenthals Tagebücher. Ein Aachener Mathematikprofessor erleidet die NS-Diktatur in Deutschland, den Niederlanden und Theresienstadt*. Hartung-Gorre Verlag, 2011.
- [14] HÁJKOVÁ, A.: *Die Juden aus den Niederlanden in Theresienstadt*. Theresienstädter Studien und Dokumente 9 (2002), 135–201.
- [15] HARDY, G. H.: *The maximum modulus of an integral function*. Q. J. Math. 41 (1909), 1–9.
- [16] HARDY, G. H.: *The mean value of the modulus of an analytic function*. Proc. Lond. Math. Soc. 14 (1915), 269–277.
- [17] HAYMAN, W. K., TYLER, T. F., WHITE, D. J.: *The Blumenthal conjecture*. Contemp. Math. 591 (2013), 149–157.
- [18] CHIHARA, T. S.: *Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals*. J. Math. Anal. Appl. 24 (1968), 362–371.
- [19] CHIHARA, T. S.: *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [20] IFANTIS, E. K., SIAFARIKAS, P. D.: *A counterexample to an assertion due to Blumenthal*. Univ. Iagell. Acta Math. 39 (2001), 249–254.
- [21] JASSIM, S. A., LONDON, R. R.: *On the maximum modulus paths of a certain cubic*. Quart. J. Math. Oxford Ser. 37 (2) (1986), 189–191.
- [22] LITTLEWOOD, J. E.: *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$* . C. R. Acad. Sci. 154 (1912), 263–266.
- [23] MAKAROVA, E., MAKAROV, S., KUPERMAN, V.: *University over the abyss. The story behind 520 lecturers and 2430 lectures in KZ Theresienstadt 1942–1944*. 2. vydání, Verba Publishers, 2004.
- [24] NIST Digital Library of Mathematical Functions [online]. Dostupné z: <https://dlmf.nist.gov/>
- [25] PARDO-SIMÓN, L., SIXSMITH, D. J.: *The maximum modulus set of a polynomial*. Comput. Methods Funct. Theory 22 (2022), 207–214.
- [26] PINL, M.: *Kollegen in einer dunkler Zeit*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. I: 71 (1969), 167–228; II: 72 (1971), 165–189; III: 73 (1972), 153–208.
- [27] PINL, M., DICK, A.: *Kollegen in einer dunkler Zeit, Schluss*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 75 (1973/1974), 166–208; Nachtrag und Berichtigung 77 (1976), 161–164.
- [28] ROWE, D. E.: *Otto Blumenthal: Ausgewählte Briefe und Schriften I. 1897–1918*. Springer, 2018.
- [29] ROWE, D. E., FELSCH, V.: *Otto Blumenthal: Ausgewählte Briefe und Schriften II. 1919–1944*. Springer, 2019.
- [30] SOMMERFELD, A., KRAUS, F.: *Otto Blumenthal zum Gedächtnis*. Jahrbuch der RWTH Aachen 4 (1951), 21–25.
- [31] TYLER, T. F.: *Maximum curves and isolated points of entire functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 2561–2568.
- [32] ULLRICH, D. C.: *Complex made simple*. American Mathematical Society, 2008.