Luděk Spíchal

Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravoúhlém trojúhelníku

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 3, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152601

Pythagorejské průměry, kontraharmonický průměr a zlatý řez v pravoúhlém trojúhelníku

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Postupy určování průměrů (průměrných hodnot) byly pravděpodobně vynalezeny brzy poté, co lidé začali počítat. Ačkoliv je původ těchto výpočtů často připisován starověkým řeckým matematikům, jejich historie sahá patrně mnohem dále.

Není snad nikoho, kdo by neznal pojem aritmetického průměru, například při výpočtu průměrné mzdy. Geometrický a harmonický průměr, označované často společně s průměrem aritmetickým jako pythagorejské průměry, jsou možná o něco méně známé. Geometrický průměr je ovšem ve skutečnosti vhodným nástrojem pro popis proporcionálního růstu, a to jak exponenciálního růstu, kdy je míra růstu konstantní, tak proměnlivého růstu. Harmonický průměr je vhodnější než aritmetický průměr v případech, kdy pracujeme s poměry. Může se jednat např. o stanovení průměrné rychlosti nebo odporu v elektrickém obvodu s paralelně zapojenými odpory.

Připomeňme si definice *aritmetického* ($\mathcal{A}$), *geometrického* ($\mathcal{G}$) a *harmonického* ($\mathcal{H}$) *průměru* kladných reálných čísel a, b

$$\mathcal{A}(a,b) = \frac{a+b}{2},$$
$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{ab},$$
$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b},$$

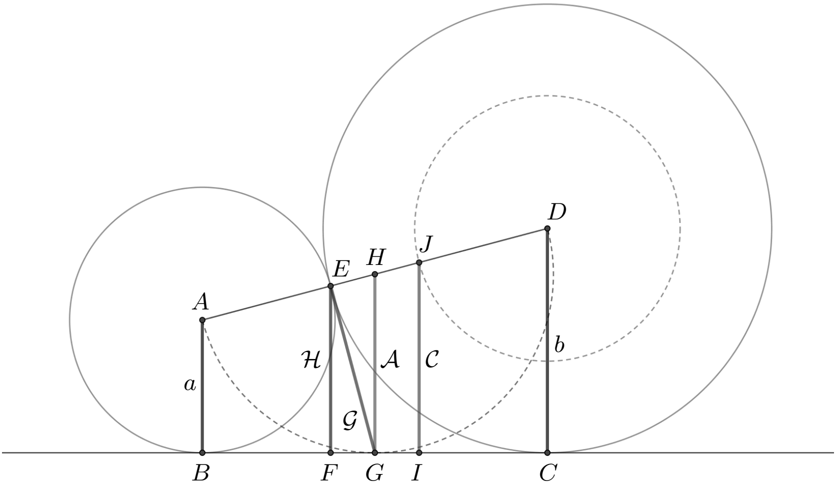
pro které dále platí, že

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A}, \tag{1}$$
$$\mathcal{G}^2 = \mathcal{A}\mathcal{H}. \tag{2}$$

Řecký matematik Eudoxos z Knidu (asi 408 př. n. l.– asi 355 př. n. l.) doplnil výše uvedenou trojici o tzv. *kontraharmonický průměr*, pro který platí

$$\mathcal{C}(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Kontraharmonický průměr jako méně běžný typ střední hodnoty nalézá použití např. při filtrování šumu (redukci zrnění) na obrázcích [12].



Obr. 1: Konstrukce pythagorejských průměrů $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ a kontraharmonického průměru $\mathcal{C}$ [7]

Problém 1. Ukažte, že pro součet harmonického a kontraharmonického průměru čísel a, b platí

$$\mathcal{H} + \mathcal{C} = a + b.$$

Výše uvedené průměry ještě pro potřeby článku doplníme o *kvadratický průměr* $\mathcal{Q}$ čísel a, b, pro který platí

$$\mathcal{Q}(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Kvadratický průměr nalézá uplatnění v takových oblastech, jako je např. statistika, fyzika (akustika) či elektrotechnika.[1)]

Zlatý řez (zlatý poměr, zlatý průměr) je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé

[1)] Ve statistice hraje důležitou roli při analýze dat a pochopení rozložení hodnot v datových souborech (např. rozptyl či směrodatná odchylka). V oblasti elektrotechniky můžeme zmínit např. výpočet efektivní hodnoty střídavého napětí nebo střídavého proudu.

úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší [1]. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y $(x > y)$ jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3}$$

pro jejíž kořeny platí

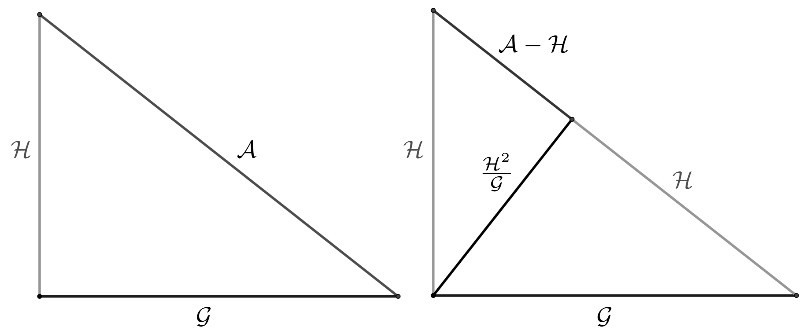
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zlatým řezem φ je kladný kořen

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pythagorejské průměry a kontraharmonický průměr v pravoúhlém trojúhelníku

Domenico v článku [2] dokázal následující zajímavou větu (obr. 2 vlevo).



Obr. 2: Pythagorejské průměry $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ v pravoúhlém trojúhelníku, kde $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$

Věta. *Aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných reálných čísel jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku právě tehdy, když je poměr aritmetického a harmonického průměru roven zlatému řezu.*

Podle Pythagorovy věty platí

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{G}^2 = \mathcal{A}^2.$$

Použitím rovnosti (2) dostáváme

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{A}\mathcal{H} = \mathcal{A}^2,$$

kde pro kladný kořen platí

$$\mathcal{A} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathcal{H} = \varphi\mathcal{H}.$$

Opačnou implikaci bychom dokázali obrácením uvedeného postupu.

Klademe si za cíl uvést výše zmíněnou větu do širších souvislostí, kde zahrneme do úvah rovněž kontraharmonický průměr, kvadratický průměr a tzv. Keplerovy trojúhelníky.

Pro některé dále zmíněné úvahy může být užitečné vyjádřit vztah mezi čísly a a b v případě, že $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$. Zjednodušením rovnice

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b}\varphi,$$

dostáváme $(a+b)^2 = 4\varphi ab$, a dále[2)]

$$\frac{b}{a} = 2+\sqrt{5} = 2\varphi + 1, \quad \text{nebo} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{5} - 2 = 2\varphi - 3.$$

Ve zbývající části textu budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b > a$, tj. $b/a = 2+\sqrt{5} = 2\varphi+1$, kde pro pythagorejské průměry čísel a, b platí

$$\mathcal{A}(a,b) = \frac{a+b}{2} = a\varphi^2,$$
$$\mathcal{G}(a,b) = \sqrt{ab} = a\varphi\sqrt{\varphi},$$
$$\mathcal{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = a\varphi.$$

[2)]Kořen $2+\sqrt{5}$ je současně řešením rovnice $x^2 - 4x - 1 = 0$. Rovnice ve tvaru $x^2 - px - 1 = 0$ ($p \in \mathbb{N}$) mají kořeny $x_{1,2} = (p \pm \sqrt{p^2+4})/2$. Kladné kořeny ($\sigma_p$) se obvykle označují jako *kovové řezy* (popř. *kovové průměry*), např. $\sigma_1 = (1+\sqrt{5})/2$ je výše zmíněný *zlatý řez*, $\sigma_2 = 1+\sqrt{2}$ je *stříbrný řez*, $\sigma_3 = (3+\sqrt{13})/2$ je *bronzový řez*, $\sigma_4 = 2+\sqrt{5}$ je *měděný řez* atd. [8, 9].

Problém 2. Ukažte, že platí

$$2\varphi + 1 = \varphi^3.$$

Problém 3. Ukažte, že platí

$$\mathcal{C}(a, b) = a(\varphi + 2).$$

Problém 4. Ukažte, že platí

$$\mathcal{Q}(a, b) = a\varphi\sqrt{\varphi + 2}.$$

Výše uvedenou větu můžeme nyní doplnit o následující důsledek.

Důsledek. *Jestliže aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných reálných čísel jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníku, kde poměr aritmetického a harmonického průměru je zlatý řez, pak výška dělí přeponu o délce $\mathcal{A}$ na úseky o délkách $\mathcal{H}$ a $\mathcal{A} - \mathcal{H}$.*

Důsledek (obr. 2 vpravo) platí, jestliže

$$\mathcal{H}^2 - (\mathcal{A} - \mathcal{H})^2 = \mathcal{G}^2 - \mathcal{H}^2.$$

Použitím substituce $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$ a dalším zjednodušením dále dostáváme rovnici ve tvaru

$$1 + \varphi = \varphi^2,$$

která je ekvivalentní s rovnicí (3). Pro délku výšky dále podle Euklidovy věty o výšce platí

$$\sqrt{\mathcal{H}(\mathcal{A} - \mathcal{H})} = \sqrt{\mathcal{H}(\varphi\mathcal{H} - \mathcal{H})} = \mathcal{H}\sqrt{\varphi - 1} = \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\varphi}} = \frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{G}} = a\sqrt{\varphi}.$$

Následující tvrzení shrnuje některé další vztahy mezi výše zmíněnými průměry v pravoúhlém trojúhelníku, kde $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$. Důkazy jednotlivých tvrzení přenecháváme laskavému čtenáři jako cvičení.

Tvrzení 1. *Jestliže $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$, pak*

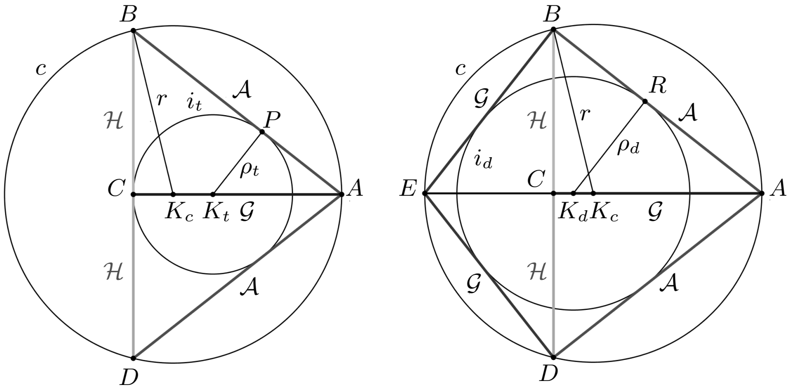
1. $\mathcal{A} - \mathcal{H} = a$,
2. $\mathcal{A} + \mathcal{H} = b$.
3. $\mathcal{C} - \mathcal{A} = a$,
4. $\mathcal{C} + \mathcal{A} = 2a + b$.

Keplerovy trojúhelníky

Pokud platí, že $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$, pak $\mathcal{A}/\mathcal{G} = \mathcal{G}/\mathcal{H} = \sqrt{\varphi}$. Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří geometrickou posloupnost, kde pro poměr délek stran platí

$$1 : \sqrt{\varphi} : \varphi.$$

Pravoúhlé trojúhelníky splňující uvedený poměr délek stran se označují jako *Keplerovy trojúhelníky.*[3)] Z vlastností těchto trojúhelníků můžeme zmínit, že pokud vezmeme dvě kopie Keplerova trojúhelníku a přiložíme je k sobě druhou nejdelší stranou, pak výsledný rovnoramenný trojúhelník má největší poloměr vepsané kružnice ze všech rovnoramenných trojúhelníků s danou délkou ramen [11].



Obr. 3: Kružnice opsaná a vepsaná (vlevo: trojúhelník ABD tvořený dvěma kopiemi Keplerova trojúhelníku, vpravo: pravoúhlý deltoid $ABED$; $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$, $|AC| = \mathcal{G}$)

Vzhledem k situaci znázorněné na obr. 3 (vlevo) můžeme konstruovat kružnici opsanou a vepsanou trojúhelníku ABD, který tvoří dvě shodné kopie Keplerova trojúhelníku. Snadno lze ověřit, že obsah a obvod trojúhelníku ABD je $S = \mathcal{H}\mathcal{G}$, $o = 2(\mathcal{H} + \mathcal{A})$ a pro poloměry vepsané (ρ_t) a

[3)] Johannes Kepler (1571–1630) se o trojúhelnících v roce 1597 zmiňuje v dopise svému učiteli Michaelu Mästlinovi. Průřez Velké pyramidy v Gíze je podle Keplera tvořen rovnoramenným trojúhelníkem složeným ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, jejichž strany jsou v poměru $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. Existují ovšem i starší zmínky o těchto trojúhelnících, např. v knize *Liber mensurationum* perského matematika Abú Bakr al-Karajiho (953–1029) nebo knize *Practica geometriae* italského matematika Leonarda Pisánského zvaného Fibonacci (okolo 1170 – okolo 1240) [10].

opsané (r) kružnice proto platí[4)]

$$\rho_t = \frac{\mathcal{H}\mathcal{G}}{\mathcal{H}+\mathcal{A}} = \frac{a}{\sqrt{\varphi}},$$
$$r = \frac{2\mathcal{H}\mathcal{A}^2}{4\mathcal{H}\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{A}^2}{2\mathcal{G}} = \frac{\varphi^2\sqrt{\varphi}}{2}a,$$

tj. poměr jejich poloměrů je

$$\frac{r}{\rho_t} = \frac{\varphi^3}{2}.$$

Středy kružnic leží na výšce rovnoramenného trojúhelníku ABD, pro vzdálenosti středů kružnic od základny platí $|K_tC| = \rho_t = a/\sqrt{\varphi}$,

$$|K_cC| = \sqrt{r^2 - \mathcal{H}^2} = \sqrt{\frac{\varphi^2\mathcal{G}^2}{4} - \frac{\mathcal{G}^2}{\varphi}} = \sqrt{\frac{a^2\varphi^5}{4} - a^2\varphi^2} =$$
$$= \frac{a\varphi\sqrt{\varphi^3 - 4}}{2} = \frac{a\varphi\sqrt{2\varphi - 3}}{2}.$$

Poměr vzdáleností středů kružnic od základny trojúhelníku je konstantní a roven

$$\frac{|K_tC|}{|K_cC|} = \frac{2}{\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{2\varphi - 3}},$$

kde

$$\varphi\sqrt{\varphi}\sqrt{2\varphi - 3} = \sqrt{\varphi^3(2\varphi - 3)} = \sqrt{(2\varphi + 1)(2\varphi - 3)} =$$
$$= \sqrt{4\varphi^2 - 4\varphi - 3} = \sqrt{4(\varphi + 1) - 4\varphi - 3} = 1,$$

proto

$$\frac{|K_tC|}{|K_cC|} = 2.$$

Na obr. 3 (vpravo) přímka AC protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABD v bodě E, kde délka úsečka AE je průměrem opsané kružnice.

[4)] Při odvození jsme využili známé vzorce pro poloměr kružnice trojúhelníku vepsané a opsané.

Body $ABED$ tvoří pravoúhlý tečnový čtyřúhelník (deltoid) s páry shodných stran $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ a úhlopříčkami délek $|AE| = 2r$ a $|BD| = 2\mathcal{H}$. Podle Pythagorovy věty pro délku delší úhlopříčky AE platí

$$|AE| = \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{G}^2} = \sqrt{\varphi\mathcal{G}^2 + \mathcal{G}^2} = \mathcal{G}\sqrt{\varphi + 1} = \varphi\mathcal{G}.$$

Délka úsečky AC ($|AC| = \mathcal{G}$) je tedy zlatým řezem délky úsečky AE.

Poloměr kružnice vepsané deltoidu, který určíme jako poměr obsahu deltoidu a poloviny jeho obvodu, je $\rho_d = a(\varphi+1)/(\sqrt{\varphi}+1)$. Z podobnosti trojúhelníků ABE a ARK_d plyne, že

$$|AK_d| = a\varphi\frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi} + 1}.$$

Vzdálenost středu K_d kružnice vepsané deltoidu $ABED$ od průsečíku úhlopříček C je

$$|K_dC| = |AC| - |AK_d| = a\varphi\sqrt{\varphi} - a\varphi\frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varphi} + 1} = a\varphi\frac{\sqrt{\varphi} - 1}{\sqrt{\varphi} + 1}.$$

Poměr vzdáleností středu kružnice opsané a vepsané deltoidu od průsečíku C je konstantní a roven přibližně

$$\frac{|K_cC|}{|K_dC|} = \frac{\sqrt{2\varphi - 3}(\sqrt{\varphi} + 1)}{2(\sqrt{\varphi} - 1)} \approx 2,$$

Vzdálenosti středů kružnic (obr. 3) od bodu C jsou tedy přibližně v poměru $1 : 2 : 4$.

V následujícím tvrzení popíšeme vztah mezi pythagorejskými průměry v pravoúhlých trojúhelnících tvořících deltoid $ABED$ (obr. 3 vpravo).

Tvrzení 2. *Nechť $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$. Aritmetický a geometrický průměr tvoří délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku právě tehdy, když harmonický průměr tvoří délku výšky nad přeponou trojúhelníku.*

Tvrzení dokážeme pro obě implikace.
"$\Rightarrow$" Úseky přepony $\varphi\mathcal{G}$ mají délky $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}(\varphi - 1)$. Použitím Euklidovy věty o výšce dostáváme AE délky

$$\mathcal{G}^2(\varphi - 1) = \frac{\mathcal{G}^2}{\varphi} = \frac{\varphi\mathcal{H}^2}{\varphi} = \mathcal{H}^2.$$

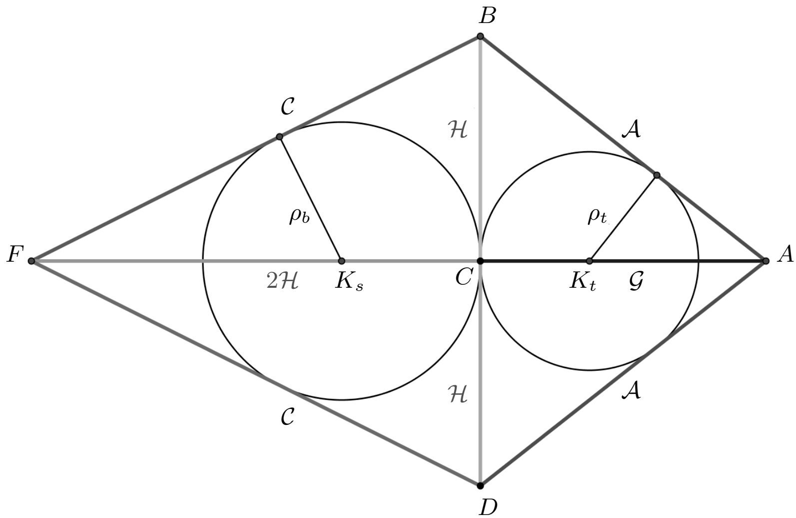
"⇐" V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami o délkách x, y, přeponou o délce z a výškou nad přeponou o délce $\mathcal{H}$ platí $xy = z\mathcal{H}$. Podle předpokladu je trojúhelník keplerovský ($z = y\sqrt{\varphi}$, $y = x\sqrt{\varphi}$), proto

$$x = \mathcal{H}\sqrt{\varphi} = \mathcal{G}, \qquad y = \mathcal{G}\sqrt{\varphi} = \mathcal{A}.$$

Na obr. 4 je ke dvojici Keplerových trojúhelníků základnou přiložen rovnoramenný trojúhelník DBF, jehož ramena mají délku $\mathcal{C}$ a výšku k základně o délce

$$|CF| = \sqrt{\mathcal{C}^2 - \mathcal{H}^2} = 2a\varphi = 2\mathcal{H},$$

kde poslední rovnost vyplývá z tvrzení 1.



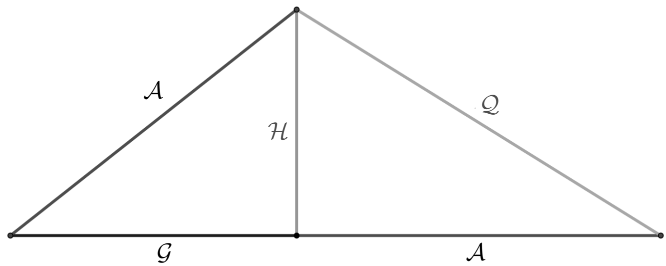
Obr. 4: Pythagorejské průměry $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ a kontraharmonický průměr $\mathcal{C}$ v deltoidu ($\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$, $|CF| = 2\mathcal{H}$)

Složením vzniká deltoid s páry shodných stran o délkách $\mathcal{A}$ a $\mathcal{C}$. Kratší úhlopříčka má délku $2\mathcal{H}$, delší pak $\mathcal{G} + 2\mathcal{H}$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ABD a DBF tvořících deltoid $ABFD$ mají poloměry $\rho_t = a/\sqrt{\varphi}$ a

$$\rho_b = \frac{2\mathcal{H}^2}{\mathcal{H} + \mathcal{C}} = \frac{2a^2\varphi^2}{a\varphi + a(\varphi + 2)} = a\frac{\varphi^2}{\varphi + 1} = a,$$

tj. jejich poloměry jsou v poměru $1 : \sqrt{\varphi}$.

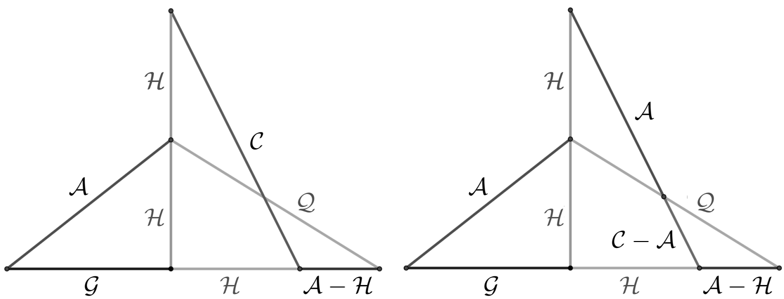
Poslední poznámku v této sekci věnujeme vztahu mezi pythagorejskými průměry a průměrem kvadratickým opět v případě, kdy $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$. Laskavý čtenář si sám může snadno ověřit, že v daném případě platí následující tvrzení (obr. 5).



Obr. 5: Pythagorejské průměry $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ a průměr kvadratický $\mathcal{Q}$ v trojúhelníku s výškou $\mathcal{H}$ ($\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$)

Tvrzení 3. *Jestliže* $\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$, *pak* $\mathcal{A}^2 + \mathcal{H}^2 = \mathcal{Q}^2$.

Na obr. 6 (vlevo) je doplněn do konstrukce průměrů rovněž průměr kontraharmonický.



Obr. 6: Pythagorejské průměry $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, kontraharmonický $\mathcal{C}$ a kvadratický průměr $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{A}/\mathcal{H} = \varphi$)

Problém 5. Ukažte (obr. 6 vpravo), že kvadratický průměr dělí průměr kontraharmonický na úseky o délkách $\mathcal{A} = a\varphi^2$ a $\mathcal{C} - \mathcal{A} = a$, tj. v poměru druhé mocniny (čtverce) zlatého řezu.

Závěr

Mezi pravoúhlými trojúhelníky, pythagorejskými průměry, průměrem kontraharmonickým, kvadratickým a zlatým řezem je jistě mnoho dalších vztahů a souvislostí a nabízí se tak možnost k dalším úvahám. Některé pěkné příklady vztahů mezi pravoúhlými trojúhelníky a zlatým řezem lze nalézt například v článku [6].

Ukažme nyní na závěr, jakým způsobem Pythagoras uvažoval o výše zmíněných průměrech. Metoda proporcí, kterou použil k jejich konstrukci, je následující. Uvažujme čísla $a > b > c > 0$, pro která vypočítáme rozdíly $a - b$ a $b - c$ a jejich poměr $(a - b)/(b - c)$ postupně porovnáme s poměry původních čísel. Číslo b je pak [3]

- aritmetickým průměrem čísel a a c, jestliže
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c},$$
- geometrickým průměrem čísel a a c, jestliže
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$
- harmonickým průměrem čísel a a c, jestliže
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c},$$
- kontraharmonickým průměrem čísel a a c, jestliže
$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}.$$

Kvadratický průměr čísel a a c, jehož původ lze vysledovat až k Pythagorově větě, lze zavést jako rovnost poměrů

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{b+c}{a+b}.$$

K výše uvedeným poměrům by bylo možné doplnit i další, které zde neuvádíme, neboť nenalezly v moderní matematice konkrétní uplatnění (více např. [4]).

Literatura

[1] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel.* Dokořán, Praha, 2015.

[2] Domenico, Di A.: The golden ratio–the right triangle–and the arithmetic, geometric, and harmonic means. *The Mathematical Gazette*, roč. 89 (2005), č. 515, s. 261–261.

[3] Gielis, J.: *The Geometrical Beauty of Plants.* Atlantis Press, Paris, 2017.

[4] Høibakk, R., Lukkassen, D., Meidell, A., Persson, L. E.: Geometric construction of some Lehmer means. *Mathematics*, roč. 6 (2018), č. 11, s. 251, https://doi.org/10.3390/math6110251.

[5] Lokesha, V., Padmanabhan, S., Nagaraja, K. M., Simsek, Y.: Relation between Greek means and various means. *General Mathematics*, roč. 17 (2009), č. 3, s. 3–13.

[6] Scimone, A.: Some nice relations between right-angled triangles and the Golden Section. *Teaching Mathematics and Its Applications*, roč. 30 (2011), s. 85–94.

[7] Spíchal, L.: The geometric constructions of the Greek means. *Symmetry: Culture and Science*, roč. 34 (2023), č. 4, s. 407–416.

[8] de Spinadel, V. W.: *From the golden mean to chaos.* Nueva Librería, Buenos Aires, 1998.

[9] de Spinadel, V. W., Paz, J. M.: A new family of irrational numbers with curious properties. *Humanistic Mathematics Network Journal*, roč. 19 (1999), s. 33–37.

[10] Sugimoto, T.: Inducing the Symmetries Out of the Complexity: The Kepler Triangle and Its Kin as a Model Problem. In: Darvas, G. (eds): *Complex Symmetries.* Birkhäuser, Cham, 2021.

[11] *Kepler triangle.* Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle`. [cit. 2024-06-11].

[12] *Contraharmonic mean.* Wikipedia, `https://en.wikipedia.org/wiki/Contraharmonic_mean`. [cit. 2024-06-05].