Jan Fiala; Marika Hrubešová; Tomáš Roskovec

Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 3, 13–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152603

Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole

Jan Fiala, Marika Hrubešová, Tomáš Roskovec
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice

Abstrakt. Článek představuje základní poznatky o harmonickém průměru a demonstruje jeho možná využití při řešení středoškolských úloh z matematiky. V navazujícím příspěvku se zaměříme na využití harmonického průměru ve fyzice a finančnictví.

Harmonický průměr

Definice 1. Prostý harmonický průměr, označený $\overline{x}_H$, n kladných[1)] reálných čísel (hodnot sledovaného kvantitativního znaku x) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je definován jako podíl počtu hodnot n a součtu n převrácených hodnot k hodnotám $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj.

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}. \tag{1}$$

Vzorec (1) lze volně slovy vyjádřit tak, že harmonický průměr je „převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot znaku“. To je patrné z následujícího vzorce

$$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Speciálně pro $n = 2$ bude mít vzorec (1) tvar

$$\overline{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}. \tag{2}$$

Vzorec (2) lze snadno převést do tvaru

$$\frac{1}{\overline{x}_H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right). \tag{3}$$

---

1) Blíží-li se aspoň jedna z hodnot x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nule, blíží se také hodnota harmonického průměru nule.

Vážený harmonický průměr

Jsou-li data již setříděna do tabulky rozdělení četností, tj. hodnota x_1 se vyskytuje k_1-krát, x_2 se vyskytuje k_2-krát atd., můžeme vzorec (1) psát ve tvaru

$$\overline{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{x_i}}, \tag{4}$$

kde k_i jsou četnosti jednotlivých hodnot, a mluvíme o váženém harmonickém průměru. Na rozdíl od vzorce (1) je celkový počet dat $\sum_{i=1}^{n} k_i$ a nikoli n, n značí počet různých hodnot dat, která se v sadě vyskytují. Obecně: přiřadíme-li hodnotám x_i váhy $w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak je vážený harmonický průměr definován jako podíl

$$\overline{x}_H = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \ldots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}. \tag{5}$$

Pro $w_1 = w_2 = \ldots = w_n$ dostaneme vzorec (1) a pro $w_i = k_i$ vzorec (4). Rozdíl mezi vzorcem (4) a (5) je ten, že váhy w_i mohou být na rozdíl od četností k_i neceločíselné, což je výhodné například při řešení úloh na výpočet průměrné hustoty při míchání různých látek.

Geometrická interpretace

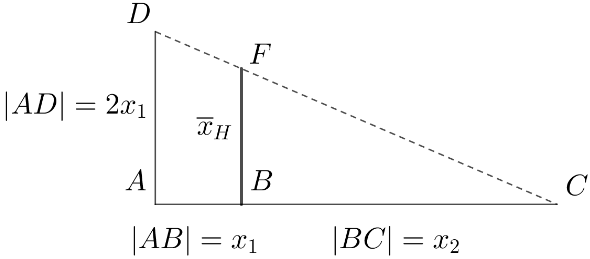
Harmonický průměr dvou čísel x_1 a x_2 lze geometricky interpretovat. K tomuto účelu upravíme vztah (2) do tvaru

$$\frac{2x_1}{\overline{x}_H} = \frac{x_1 + x_2}{x_2}.$$

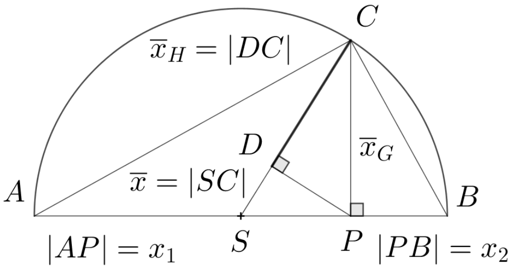
Tento vztah vyjadřuje poměr odpovídajících si stran v podobných trojúhelnících ACD a BCF na obr. 1 se shodným úhlem u vrcholu C, kde délky odvěsen trojúhelníku ACD jsou rovny $2x_1$ a $x_1 + x_2$.

Geometrická interpretace harmonického průměru dvou kladných reálných hodnot x_1 a x_2 se často uvádí spolu se znázorněním aritmetického a geometrického průměru. Označme $\overline{x}$ jako aritmetický průměr hodnot x_1 a x_2 a $\overline{x}_G$ jako geometrický průměr těchto hodnot. Jedna z možných interpretací je na obr. 2.

Příklad 1. Výpočtem ověřte, že pro harmonický průměr čísel x_1, x_2 platí na obr. 2 vztah (2).



Obr. 1: Geometrická interpretace harmonického průměru čísel x_1, x_2



Obr. 2: Geometrická interpretace aritmetického, geometrického a harmonického průměru čísel x_1, x_2

Řešení. Máme ukázat, že v obr. 2 platí $\overline{x}_H = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$. Podle Euklidovy věty o výšce je na obr. 2 geometrický průměr délek úseček x_1, x_2 roven $|PC| = \overline{x}_G = \sqrt{x_1x_2}$. Aritmetický průměr délek x_1, x_2 je roven $|SC| = \overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník SPC s pravým úhlem u vrcholu P. Z Eukleidovy věty o odvěsně vyplývá $\overline{x}_G^2 = \overline{x}_H \cdot \overline{x}$, tedy $\overline{x}_H = \frac{\overline{x}_G^2}{\overline{x}}$. Z toho po dosazení a drobné úpravě dostaneme ověřovaný vztah (2).

Příklad 2. Upravte vzorec (2) pro harmonický průměr tří čísel x_1, x_2, x_3.

Řešení. Pro tři kladná reálná čísla x_1, x_2, x_3 platí vztah

$$\overline{x}_H = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}.$$

Některé vlastnosti harmonického průměru

Harmonický průměr je na rozdíl od aritmetického průměru definován pouze pro kladná reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jeho určující vlastností je stálost součtu převrácených hodnot při jejich nahrazení harmonickým průměrem, což je vlastnost každého průměru. Platí totiž

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\overline{x}_H} + \frac{1}{\overline{x}_H} + \ldots + \frac{1}{\overline{x}_H}}_{n\text{-krát}}.$$

Tento vzorec lze stručně zapsat ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{n}{\overline{x}_H},$$

z něhož po vyjádření $\overline{x}_H$ získáme výše uvedený vzorec (1) pro výpočet prostého harmonického průměru.

Násobíme-li všechny hodnoty x_i libovolnou konstantou k, $k \neq 0$, pak se hodnota harmonického průměru také vynásobí k-krát (podobně platí i pro aritmetický a geometrický průměr). Platí tedy

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{k \cdot x_1} + \frac{1}{k \cdot x_2} + \ldots + \frac{1}{k \cdot x_n}} = \frac{k \cdot n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}.$$

Uvažujme vážený aritmetický průměr s váhami $k_1, k_2, \ldots, k_n$, který je definován vzorcem

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \tag{6}$$

kde w_i je váha i-té hodnoty a n je počet všech hodnot. Snadno lze ověřit, že násobíme-li váhy w_i ve vzorci (5) pro vážený harmonický průměr stejnou konstantou k, $k > 0$, hodnota výsledného harmonického průměru se nezmění, stejně jako v případě váženého aritmetického průměru, definovaného vzorcem (6).

Zřejmou výhodou harmonického průměru je skutečnost, že hodnota harmonického průměru není – na rozdíl od aritmetického průměru – výraznou měrou ovlivněna jednou nenulovou hodnotou (či několika málo hodnotami), která je výrazně větší než všechny zbylé hodnoty ze souboru.

Harmonický průměr je vhodný při výpočtu střední hodnoty nerovnoměrně rozložených dat kolem aritmetického průměru, nebo když jsou v souboru dat některé hodnoty extrémně vysoké. Využití harmonického průměru je však značně omezené jeho definicí a vychází z povahy otázky, kterou v úloze řešíme. Harmonický průměr lze použít pouze tehdy, když má smysl uvažovat o součtu převrácených hodnot znaku. I když je užití harmonického průměru často prezentováno jako značně omezené ([4, s. 34]), ukážeme nejprve jeho využití při řešení matematických úloh, v pokračování článku pak představíme, jak lze harmonický průměr použít například ve fyzice, finančnictví a ekonometrii.

Vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem

V příkladu 1 jsme uvedli vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem čísel x_1 a x_2. Pro dvě kladná čísla x_1, x_2 lze psát

$$\overline{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(\sqrt{x_1x_2})^2}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \frac{\overline{x}_G^2}{\overline{x}},$$

kde $\overline{x}_G$ je geometrický a $\overline{x}$ je aritmetický průměr čísel x_1, x_2. Tento vztah je unikátní pro sadu dvou čísel, pro větší sady obecně neplatí.

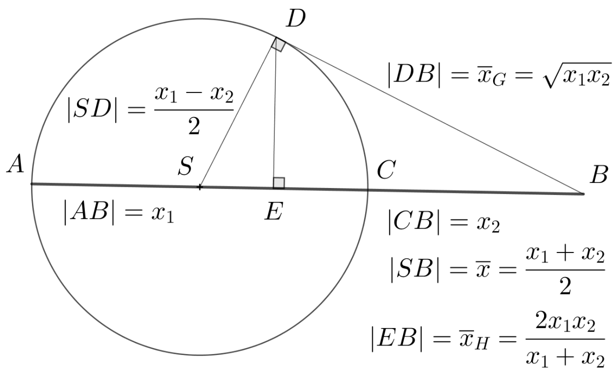
Pro aritmetický a geometrický průměr definovaný předpisem

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{a} \quad \overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

platí tzv. AGH-nerovnost:

$$\overline{x} \geq \overline{x}_G \geq \overline{x}_H. \tag{7}$$

Rovnost zde nastává, právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pro $\overline{x}_H, \overline{x}_G$ a $\overline{x}$ platí, že jsou větší než minimum hodnot x_i a současně menší než maximum hodnot x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Důkaz nerovnosti (7) zde kvůli svému rozsahu neuvádíme, lze však nalézt v četných literárních pramenech, například [8, s. 17]. Platnost vztahu (7) pro $n = 2$ lze snadno geometricky ověřit například na obr. 2. Hned čtyři různé geometrické důkazy beze slov složené nerovnosti (7) pro $n = 2$ uvádí Nelsen ([7, s. 63–67]). Z nich za didakticky vhodný do výuky na střední škole lze považovat následující důkaz vztahu (7). Přestože jde o „důkaz beze slov“, odvozujeme s využitím obr. 3 postupně délky úseček SB, DB a EB, které jsou po řadě



Obr. 3: Geometrická interpretace nerovnosti harmonického, geometrického a aritmetického průměru dvou čísel x_1, x_2 (podle [7, s. 63])

aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem úseček délek x_1 a x_2.

Uvažujme úsečku AB délky x_1, úsečku BC délky x_2, $0 < x_2 \leq x_1$.

Je-li $|AB| = x_1$ a $|BC| = x_2$, pak $|AC| = x_1 - x_2$, $|SC| = \frac{x_1 - x_2}{2}$, a tedy hledaná délka úsečky SB je $|SB| = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, což je aritmetický průměr délek úseček AB a BC.

Délku úsečky DB lze odvodit takto: předně platí $|SC| = |SD| = \frac{x_1 - x_2}{2}$, pak z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník SBD s pravým úhlem při vrcholu D vyplývá

$$|DB|^2 = |SB|^2 - |SC|^2.$$

Po dosazení dostaneme

$$|DB|^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2$$

a po úpravách $|DB| = \sqrt{x_1 x_2}$, což je geometrický průměr délek úseček AB a BC.

Úsečka EB je úsekem přepony SB v pravoúhlém trojúhelníku SBD. Z Eukleidovy věty o odvěsně pro délku EB platí

$$|EB| = \frac{|DB|^2}{|SB|}.$$

Po dosazení dostaneme

$$|EB| = \frac{x_1x_2}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2},$$

což je harmonický průměr délek úseček AB a BC. Z obr. 3 tedy vyplývá nerovnost (7).

Příklad 3. Pro dvě libovolná kladná reálná čísla x_1 a x_2 dokažte algebraickými úpravami nerovnost (7).

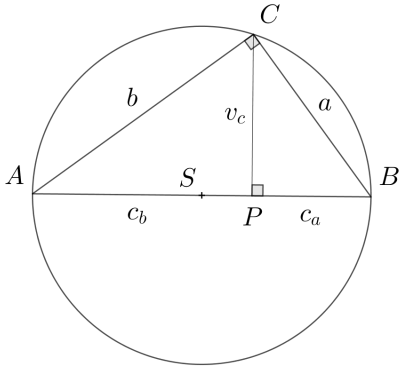
Řešení. Pro každé dvě kladné reálné proměnné x_1, x_2 máme řešit soustavu nerovnic

$$\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}. \tag{8}$$

Nerovnici vlevo stačí umocnit na druhou, vydělit celou nerovnici nenulovým součinem x_1x_2 a po úpravách dostaneme nerovnici $\frac{(x_1-x_2)^2}{(x_1+x_2)^2} \geq 0$, která platí vždy. Nerovnici vpravo také umocníme na druhou a po úpravách dostaneme nerovnici $\frac{(x_1-x_2)^2}{4} \geq 0$, která rovněž platí pro libovolná x_1, x_2. Rovnosti u soustavy nerovnic (8) nastávají pro $x_1 = x_2$.

Aplikace harmonického průměru v matematice

Příklad 4. Ověřte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C (obr. 4) je druhá mocnina velikosti výšky v_c vedené bodem C na přeponu c rovna polovině harmonického průměru druhých mocnin odvěsen a, b.



Obr. 4: Trojúhelník ABC s vyznačenou výškou v_c

Řešení. Máme ukázat, že platí

$$v_c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{9}$$

V pravoúhlém trojúhelníku na obr. 4 podle Eukleidovy věty o výšce platí

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \tag{10}$$

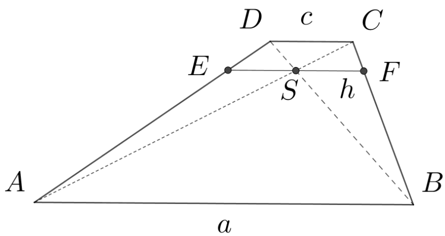
a dále podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$a^2 = c \cdot c_a, \qquad b^2 = c \cdot c_b. \tag{11}$$

Z (11) vyjádříme postupně c_a a c_b, které dosadíme do (10) a s využitím Pythagorovy věty dostaneme hledaný vztah (9)

$$v_c^2 = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c} = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Příklad 5. Pomocí délek základen a, c vypočítejte délku h příčky lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$), která prochází průsečíkem jeho úhlopříček S (viz obr. 5).[2)]



Obr. 5: Lichoběžník $ABCD$ s vyznačenou příčkou h

Řešení. Trojúhelníky ABS a CDS jsou podobné podle věty (uu) a pro poměry odpovídajících si stran tedy platí

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}.$$

Označme u příčky h její krajní body E, F. Délka příčky EF je součtem délek úseček ES a SF. Trojúhelníky BFS a BCD a trojúhelníky ASE

[2)] Příčkami v lichoběžníku se podrobně zabývají Vallo a Leischner v [9].

a ACD jsou dvojice podobných trojúhelníků podle věty (uu). Z podobnosti trojúhelníků první dvojice vyplývá $\frac{|SF|}{|CD|} = \frac{|SB|}{|DB|}$, z toho po úpravě dostaneme

$$|SF| = \frac{|SB| \cdot |CD|}{|DB|}.$$

Z druhé dvojice podobných trojúhelníků obdobně plyne $\frac{|ES|}{|CD|} = \frac{|AS|}{|AC|}$ a po úpravě dostaneme

$$|ES| = \frac{|AS| \cdot |CD|}{|AC|}.$$

S ohledem na výše zmíněnou podobnost trojúhelníků ABS a CDS nahradíme poměry

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|DS|}{|BS|} = \frac{|CD|}{|AB|}.$$

Pro celkovou délku příčky EF tedy platí

$$|EF| = \frac{|AS| \cdot |CD|}{|AC|} + \frac{|BS| \cdot |CD|}{|BD|}.$$

Po vydělení $|AS|$ a $|SB|$ a protože je $|AC| = |AS| + |SC|$ a $|BD| = |BS| + |SD|$, dostaneme

$$|EF| = \frac{|CD|}{\frac{|AC|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{\frac{|BD|}{|BS|}} = \frac{|CD|}{\frac{|AS|+|CS|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{\frac{|BS|+|DS|}{|BS|}} = \frac{|CD|}{1 + \frac{|CS|}{|AS|}} + \frac{|CD|}{1 + \frac{|DS|}{|BS|}}.$$

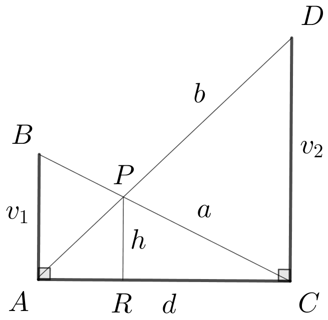
Pomocí označení délek stran dostaneme

$$h = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} + \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{ac}{a+c} + \frac{ac}{a+c} = \frac{2ac}{a+c},$$

což je harmonický průměr délek základen a, c lichoběžníku $ABCD$.

Příklad 6. Problém zkřížených žebříků: Dva žebříky délek a, b jsou umístěny ve výkopu šířky d tak, že jejich paty jsou vždy v krajním místě výkopu a jejich druhé konce se opírají o konce protilehlých stěn, jejichž výšky jsou v_1 a v_2 (obr. 6). Žebříky se v řezu protínají v bodě P. Pomocí délek v_1 a v_2 vyjádřete vzdálenost h průsečíku P od vodorovné základny dna výkopu. [3)]

[3)] Podrobně se řešení úlohy věnuje Leischner v [6].



Obr. 6: Model situace zkřížených žebříků s vyznačenou vzdáleností h

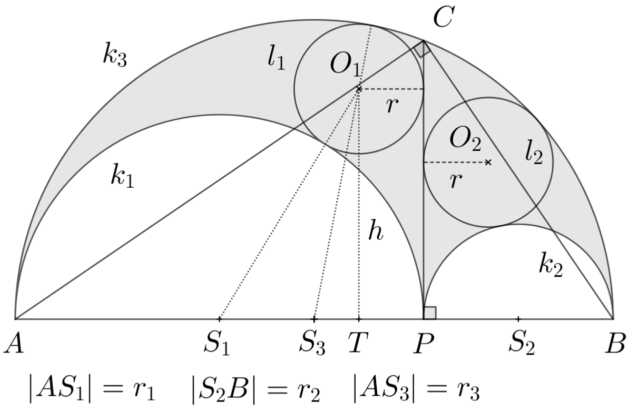
Řešení. Představíme-li si na obr. 6 spojnici BD, vznikne pravoúhlý lichoběžník $CDBA$, v němž jsou žebříky jeho úhlopříčky. K řešení úlohy 6 tedy lze využít poznatky z předchozí úlohy 5, z jejíhož řešení vyplývá, že bod S rozděluje úsečku EF na obr. 5 na dvě stejně dlouhé části. Tedy hledaná délka h v obr. 6 je polovinou harmonického průměru délek v_1 a v_2.

Příklad 7. „Archimédova dvojčata" (nazývané také Archimédovy kruhy) je pojmenováním dvou kružnic l_1 a l_2 téhož poloměru r, které jsou vepsány do tzv. *arbelu*[4] APB, kterým se rozumí rovinný útvar ohraničený polokružnicemi k_1, k_2 a k_3 po řadě nad průměry AP, PB a AB v téže polorovině s hraniční přímkou AB, kde P je vnitřní bod úsečky AB ([2, s. 513], [5, s. 88], [10]), přičemž kružnice l_1 se dotýká polokružnic k_1 (vnější dotyk) a k_3 (vnitřní dotyk) a přímky PC a kružnice l_2 se dotýká polokružnic k_2 (vnější dotyk) a k_3 (vnitřní dotyk) a přímky PC, kde PC je výška na přeponu AB v pravoúhlém trojúhelníku ABC, jemuž je opsána Thaletova kružnice k_3 (obr. 7).[5] Ověřte, že průměr $2r$ kružnic l_1 a l_2 je harmonickým průměrem poloměrů r_1 a r_2 kružnic po řadě k_1 a k_2, a tedy lze psát

$$2r = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}. \tag{12}$$

[4] Slovo *arbelos* znamená v řečtině ševcovský nůž, knejp.

[5] Applet v [1] výstižně demonstruje polohu archimedovských dvojčat v závislosti na velikosti poloměrů polokružnic k_1 a k_2.



Obr. 7: Arbelos APB (útvar zvýrazněný šedou barvou) s vepsanými kružnicemi l_1 a l_2

Řešení. Platnost vztahu (12) ověříme nejdříve pro kružnici l_1. Vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku S_1TO_1 s odvěsnami délek $r_1 - r$ a h a s přeponou délky $r_1 + r$ a dále z pravoúhlého trojúhelníku S_3TO_1 s odvěsnami délek $r_1 - r - r_2$ a h a přeponou délky $r_1 - r + r_2$. Pro poloměry r_1, r_2 a r_3 platí: $r_1 + r_2 = r_3$. Proto mají odvěsny trojúhelníku S_3TO_1 délky $r_3 - 2r_2 - r$ a h a přepona má délku $r_3 - r$. Pro oba trojúhelníky platí Pythagorova věta, lze tedy psát

$$(r_1 + r)^2 = h^2 + (r_1 - r)^2 \quad \text{a} \quad (r_3 - r)^2 = h^2 + (r_3 - 2r_2 - r)^2.$$

Po odečtení obou rovnic eliminujeme h^2 a ze soustavy vyjádříme r:

$$r = \frac{r_2 \cdot (r_3 - r_2)}{r_1 + r_2}.$$

Vynásobíme-li celou rovnici dvěma, dostaneme hledaný vzorec (12)).[6] Kružnice l_1 a l_2 jsou shodné. Důkaz této skutečnosti uvádí například Bečvář a Švrček ([2, s. 517, 518]), proto ověření vztahu (12) pro kružnici l_2 zde neprovádíme, probíhá však podobně jako pro kružnici l_1.

[6] Obdobný důkaz lze nalézt např. v [3, s. 210]. Tamtéž je mnoho informací k dalším specifickým kružnicím vzniklým v arbelu.

Závěr

Učivo o harmonickém průměru je zajímavým a užitečným nástrojem, který nachází své nezastupitelné uplatnění při řešení specifických výpočetních úloh z matematiky a který přispívá k rozvoji mnohých matematických znalostí a dovedností žáků střední školy. Harmonický průměr bývá často naivně a chybně nahrazován aritmetickým průměrem. Tato chyba není specifická jen pro žákovská řešení, ale objevuje se i v aplikacích a výjimečně i v učebnicích. Jsou-li vstupní data podobná, dávají aritmetický, geometrický a harmonický průměr podobné výsledky. Rozdíly v hodnotách jednotlivých průměrů se projeví až při větších rozdílech v průměrovaných hodnotách.

Literatura

[1] Alpert, B.: Archimedes' twin circles in an arbelos. Wolfram Demonstrations Project, 2011. `https://demonstrations.wolfram.com/ArchimedesTwinCirclesInAnArbelos/`.

[2] Bečvář, J., Švrček, J.: Arbelos. *Matematika–fyzika–informatika*, roč. 14 (2004/05), č. 9, s. 513–523.

[3] Dodge, C. W., Schoch, T., Woo, P. Y., Yiu, P.: Those ubiquitous Archimedean circles. *Mathematics Magazine*, roč. 72 (2018), č. 3, s. 202–213. `https://doi.org/10.1080/0025570X.1999.11996731`.

[4] Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.: *Statistika v ekonomii.* Professional Publishing, Příbram, 2018.

[5] Leischner, P.: *Polibky kružnic: Archimedes. Matematika–fyzika–informatika*, roč. 24 (2015), č. 5, s. 87–94.

[6] Leischner, P.: *Zkřížené žebříky. MFI*, roč. 31 (2022), č. 4, s. 241–252.

[7] Nelsen, R. B.: *Důkazy beze slov I.* Young Scientist, Washington, 1993.

[8] Rolínek, M., Šalom, P.: *Zdolávání nerovností.* Přírodovědecká fakulta, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 2012.

[9] Vallo, D., Leischner, P.: *Priečky rovnobežné so základňou lichobežníka. MFI*, roč. 20 (2010/11), č. 6, s. 321–328.

[10] Weisstein, E. W.: *Arbelos.* MathWorld – A Wolfram Web Resource. 2024 [online]. `https://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html`.