Jan Fiala; Marika Hrubešová; Tomáš Roskovec

Některá využití harmonického průměru ve výuce fyziky a ve finančnictví a ekonomii

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 4, 16–27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152706

Některá využití harmonického průměru ve výuce fyziky a ve finančnictví a ekonomii

Jan Fiala, Marika Hrubešová, Tomáš Roskovec
Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita, České Budějovice

Abstrakt. Článek navazuje na publikovaný příspěvek o harmonickém průměru a rozšiřuje jej o další aplikace harmonického průměru. Tentokráte se autoři zaměřili na využití harmonického průměru při řešení středoškolských úloh z fyziky a v oblasti finančnictví a v ekonomii. Širokou paletou praktických početních úloh je doloženo specifické a praktické využití harmonického průměru.

Úvod

V článku [1] jsme se podrobně zabývali harmonickým průměrem: bylo představeno jeho zavedení a geometrická interpretace a byly připomenuty některé jeho vlastnosti. Pro potřebu dále v článku řešených úloh připomene pouze definici harmonického průměru a jeho vážené varianty.

Definice 1. Prostý harmonický průměr, označený $\overline{x}_H$, n kladných[1)] reálných čísel (hodnot sledovaného kvantitativního znaku x) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je definován jako podíl počtu hodnot n a součtu n převrácených hodnot čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tj.

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}. \tag{1}$$

Speciálně pro $n = 2$ bude mít vzorec (1) tvar

$$\overline{x}_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

Jsou-li data setříděna do tabulky rozdělení četností, tj. hodnota x_1 se vyskytuje k_1-krát, x_2 se vyskytuje k_2-krát atd., můžeme vzorec (1) psát ve tvaru

$$\overline{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{x_i}}, \tag{2}$$

[1)] Blíží-li se aspoň jedna z hodnot x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nule, blíží se také hodnota harmonického průměru nule.

kde k_i jsou četnosti jednotlivých hodnot, a mluvíme o váženém harmonickém průměru. Na rozdíl od vzorce (1) je celkový počet dat $\sum_{i=1}^{n} k_i$ a nikoli n, n značí počet různých hodnot dat, která se v sadě vyskytují. Obecně: přiřadíme-li hodnotám x_i váhy $w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak je vážený harmonický průměr definován jako podíl

$$\overline{x}_H = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \ldots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}. \tag{3}$$

Pro $w_1 = w_2 = \ldots = w_n$ dostaneme vzorec (1) a pro $w_i = k_i$ vzorec (2). Rozdíl mezi vzorcem (2) a (3) je ten, že váhy $w_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, mohou být na rozdíl od k_i neceločíselné, což je výhodné například při řešení úloh na výpočet průměrné hustoty při míchání různých látek.

Úvodem pouze zopakujeme, že harmonický průměr je vhodný při výpočtu střední hodnoty nerovnoměrně rozložených dat kolem aritmetického průměru, nebo když se v souboru dat vyskytují extrémně vysoké hodnoty. Využití harmonického průměru je však značně omezené jeho definicí a vychází z povahy otázky, kterou v úloze řešíme. Harmonický průměr lze použít pouze tehdy, má-li smysl uvažovat o součtu převrácených hodnot znaku. I když je užití harmonického průměru značně specifické ([3, s. 34]), ukážeme v úlohách, jak je používán například ve fyzice či finančnictví a ekonomii.

Harmonický průměr ve fyzice

Ve fyzice se harmonický průměr využívá například při výpočtu průměrné rychlosti, v úlohách o společné práci, hustotách sloučenin, při výpočtech hodnot odporů zapojených paralelně, nebo v optice.

Příklad 1. Řidič jel trasu z Jindřichova Hradce do Českého Krumlova průměrnou rychlostí 80 km/h a cestu zpět průměrnou rychlostí 64 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé trase?

Řešení. Při řešení využijeme poznatků z fyziky. Průměrná rychlost je podíl celkové vzdálenosti uražené za určitý čas a tohoto času. Vyjdeme ze známého vzorce $s = v \cdot t$. Cestou tam ujelo auto dráhu $s = v_1 \cdot t_1$, cestou zpět ujelo dráhu $s = v_2 \cdot t_2$, $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 64$ km/h. Celková dráha je $2s$, celkový čas je $t_1 + t_2$. Vyjádříme t_1 a t_2: $t_1 = s/v_1$, $t_2 = s/v_2$. Průměrná rychlost v_p je tedy

$$v_\mathrm{p} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{80} + \frac{s}{64}}\ \mathrm{km/h},$$

odkud po úpravě máme

$$v_\mathrm{p} = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{64}}\ \mathrm{km/h} = 71{,}\overline{1}\ \mathrm{km/h}. \tag{4}$$

Auto dosáhlo průměrné rychlosti $71{,}\overline{1}$ km/h.

Poznámka. Zlomek v rovnosti (4) vyjadřuje prostý harmonický průměr podle vzorce (1) obou zadaných rychlostí, tedy v čitateli je počet zadaných hodnot a ve jmenovateli jejich převrácené hodnoty. Pro n úseků téže délky s lze pak průměrnou rychlost vyjádřit vztahem

$$v_\mathrm{p} = \frac{n \cdot s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \ldots + \frac{s}{v_n}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \ldots + \frac{1}{v_n}}. \tag{5}$$

Ze vztahu (5) poněkud překvapivě vyplývá, že výsledná průměrná rychlost v vlastně na celkové dráze s vůbec nezávisí.

Příklad 2. Cyklistický závod je rozdělen na tři stejně dlouhé etapy, na nichž jel závodník postupně rychlostí 12 km/h, 20 km/h a 32 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost na trase v celé délce závodu?

Řešení. Průměrná rychlost cyklisty je dána vztahem (5) a je rovna prostému harmonickému průměru podle vzorce (1) zadaných rychlostí

$$v_\mathrm{p} = \frac{3}{\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{32}}\ \mathrm{km/h} \doteq 18{,}2\ \mathrm{km/h}.$$

Po zaokrouhlení na desetiny byla průměrná rychlost cyklisty 18,2 km/h.

Příklad 3. Cyklistický závod je rozdělen na čtyři různě dlouhé etapy, na nichž jel závodník různou průměrnou rychlostí (viz tab. 1). Jaká byla jeho průměrná rychlost na trase v celé délce závodu?

Etapa	1.	2.	3.	4.
Délka trasy [km]	40	25	20	10
Rychlost [km/h]	12	20	32	34

Tabulka 1: Délky tras a průměrné rychlosti cyklisty v závodu

Řešení. Celková dráha cyklisty je rovna součtu délek jednotlivých etap závodu. Celkový čas je roven součtu časů strávených cyklistou na jednotlivých úsecích. Jednotlivé časy jsou rovny poměrům jednotlivých drah a příslušných rychlostí. Z předchozích úvah vyplývá, že průměrná rychlost cyklisty je podle (3) rovna váženému harmonickému průměru zadaných rychlostí s váhami odpovídajícími délce úseků $w_1 = 40$ km, $w_2 = 25$ km, $w_3 = 20$ km a $w_4 = 10$ km:

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}} = \frac{40+25+20+10}{\frac{40}{12}+\frac{25}{20}+\frac{20}{32}+\frac{10}{34}}\,\mathrm{km/h} \doteq 17,3\,\mathrm{km/h}.$$

Průměrná rychlost cyklisty byla po zaokrouhlení na desetiny $17,3$ km/h.

Poznámka. V následujících příkladech řešíme slitiny či směsi a jejich objem a hmotnost. Zatímco hmotnost směsi je nutně součet hmotností částí, u objemu to tak v některých případech být nemusí (např. 1 litr hrachu a 1 litr písku vytvoří menší objem než očekávané 2 litry, 1 litr vody a 1 litr cukru také nebude mít objem 2 litry). Vzorce, které používáme, s touto redukcí objemu nepočítají. V některých aplikacích, jako je například slévání kovů, je tato nepřesnost nepatrná a je zanedbávána.

Příklad 4. Uvažujte slitinu dvou kovů o hmotnostech $m_1 = m_2 = 10\,000$ kg a objemech $V_1 = 1$ m^3 a $V_2 = 2$ m^3. Jaká bude výsledná hustota takto vzniklé směsi?

Řešení. Vyjdeme ze vzorce pro výpočet hustoty $\rho = m/V$. Celková hmotnost směsi bude součtem hmotností obou složek, tedy 20 000 kg, celkový objem bude součtem objemů jednotlivých složek směsi, tedy 3 m^3. Výsledná směs bude mít hustotu

$$\rho = \frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} = \frac{20\,000\ \mathrm{kg}}{3\ \mathrm{m}^3} = 6\,666{,}\overline{6}\ \mathrm{kg/m}^3.$$

Odvoďme obecný vzorec, jak spočítat hustotu celku z hustoty částí. Uvažujme vzorec pro výpočet hustoty $\rho = m/V$, m_1, m_2 jsou hmotnosti složek, V_1, V_2 objemy složek a $w = m_1/(m_1+m_2) = m_1/m$ je hmotnostní zlomek první složky slitiny, tj. kolik z celkové hmotnosti směsi tvoří první látka. Analogicky hmotnostní zlomek druhé složky je $1-w$. Platí:

$$\rho = \frac{m_1+m_2}{V_1+V_2} = \frac{m}{V_1+V_2}.$$

Převraťme hodnoty na obou stranách a za m dosaďme $m = m_1/w$ a $m = m_2/(1-w)$. Postupně upravíme:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_1}{m} + \frac{V_2}{m} = \frac{wV_1}{m_1} + \frac{(1-w)V_2}{m_2} = \frac{w}{\frac{m_1}{V_1}} + \frac{(1-w)}{\frac{m_2}{V_2}}.$$

Při označení hustot složek ρ_1 a ρ_2 dostáváme vzorec výsledné hustoty slitiny se dvěma složkami ρ ve tvaru

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w}{\rho_1} + \frac{1-w}{\rho_2}, \tag{6}$$

kde w je hmotnostní zlomek první složky, zde $w = 0{,}5$ (nebo také 50 %), neboť jsou oba kovy zastoupeny na celkové hmotnosti slitiny stejným dílem. Ze vzorce (6) vyjádříme ρ a dosadíme $w = 0{,}5$, $\rho_1 = 10\,000$ kg/m^3 a $\rho_2 = 5\,000$ kg/m^3:

$$\rho = \frac{2}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = \frac{2}{0{,}000\,3}\ \text{kg/m}^3 = 6\,666{,}\overline{6}\ \text{kg/m}^3. \tag{7}$$

Hustota slitiny je po zaokrouhlení na setiny 6 666,67 kg/m^3.

Poznámka. Vzorec (7) je prostý harmonický průměr hustot ρ_1 a ρ_2 podle vzorce (1), který bylo možné využít s ohledem na to, že váhy obou složek jsou stejné (0,5).

Příklad 5. Uvažujte slitinu dvou kovů o hmotnostech $m_1 = 30\,000$ kg a $m_2 = 20\,000$ kg a objemech $V_1 = 4$ m^3 a $V_2 = 5$ m^3. Jaká bude výsledná hustota takto vzniklé slitiny?

Řešení. Stejně jako u příkladu 4 lze vyjít z jednoduché úvahy: slitina bude mít celkovou hmotnost $m = 50\,000$ kg a celkový objem $V = 9$ m^3. Hledaná hustota slitiny je tedy

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{50\,000\ \text{kg}}{9\ \text{m}^3} = 5\,555{,}\overline{5}\ \text{kg/m}^3.$$

Ve vzorci (6) představují koeficienty w a $1 - w$ váhy, kterými jsou procentuální části hmotností kovů zastoupených ve slitině, zde platí $w = m_1/(m_1 + m_2) = 30\,000/(30\,000 + 20\,000) = 0{,}6$. Hustota $\rho_1 = 7\,500$ kg/m^3 a $\rho_2 = 4\,000$ kg/m^3. Ze vzorce (6) vyjádříme ρ a po dosazení dostaneme

$$\rho = \frac{1}{\frac{w}{\rho_1} + \frac{1-w}{\rho_2}} = \frac{1}{\frac{0{,}6}{7\,500} + \frac{0{,}4}{4\,000}}\ \text{kg/m}^3 = 5\,555{,}\overline{5}\ \text{kg/m}^3. \tag{8}$$

Hustota slitiny je po zaokrouhlení na setiny 5 555,56 kg/m^3.

Poznámka. Vzorec (8) je vážený harmonický průměr hustot ρ_1 a ρ_2 s vahami w a $1 - w$ (tj. podíly hmotností jednotlivých složek ve slitině, jejichž součet je vždy 1) podle vzorce (3). Vzorec (8) lze rozšířit pro konečný přirozený počet n složek slitiny, jejichž hmotnostní podíly označíme hmotnostním zlomkem $w_i = m_i/m$. Tento vzorec lze odvodit

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\rho_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m}\frac{1}{\rho_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{1}{\rho_i}},$$

což je vážený harmonický průměr hustot jednotlivých složek, jejichž zastoupení ve směsi je dáno hmotnostními zlomky w_i.

Alternativně lze úlohy řešit objemovými zlomky, kde $\varphi_i = V_i/V$ je podíl objemu složky v celkovém objemu, dostáváme

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i\rho_i}{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{V}\rho_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\rho_i,$$

což je vážený aritmetický průměr hustot jednotlivých složek s váhami rovnými objemovým zlomkům $\varphi_i = V_i/V$.

Příklad 6. První, nejstarší, stroj vyrobí výrobek za 4 hodiny, druhý za 3 hodiny, třetí za 2,5 hodiny a čtvrtý, nejmodernější, za 2 hodiny. Jak dlouho by průměrně trvalo vyrobit daný výrobek jednomu stroji?

Řešení. První stroj vyrobí za hodinu $\frac{1}{4}$ výrobku, druhý stroj vyrobí $\frac{1}{3}$ výrobku, třetí stroj vyrobí $\frac{1}{2{,}5}$ výrobku a čtvrtý stroj vyrobí $\frac{1}{2}$ výrobku. Úvahou lze tedy spočítat průměrné trvání výroby jako součet těchto zlomků vydělený čtyřmi, jeho převrácená hodnota je doba nutná k výrobě jednoho výrobku. Podrobněji řečeno, označme x dobu, za kterou by výrobek vyrobil průměrný stroj. Pak průměrná doba x je řešením rovnice

$$x \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2}\right) = 4,$$

z toho

$$x = \frac{4}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2}} \doteq 2{,}7. \tag{9}$$

Průměrný stroj potřebuje na výrobu výrobku po zaokrouhlení na desetiny 2,7 hodiny.

Poznámka. Zlomek (9) je prostý harmonický průměr časů výroby daného výrobku jednotlivými stroji podle vzorce (1). Při řešení úlohy lze postupovat i tak, že uvažujeme např. dobu 30 hodin a ptáme se, kolik výrobků vyrobí jednotlivé stroje za tuto dobu. První stroj vyrobí 7,5 výrobku, druhý 10 výrobků, třetí 12 výrobků a čtvrtý, nejrychlejší, stroj vyrobí 15 výrobků, tedy za 30 hodin vyrobí všechny stroje dohromady 44,5 výrobku. Celková doba práce všech strojů byla $4 \cdot 30 = 120$ hodin, tedy na jeden výrobek je potřeba průměrně $\frac{120}{44{,}5} \doteq 2{,}7$ hodiny.

Příklad 7. Celkem čtyři výrobní stroje pracovaly po různou dobu a vyrobily různý počet týchž výrobků (viz tab. 2). Jaká je průměrná doba, za kterou vyrobí průměrný stroj jeden výrobek?

Stroj	1	2	3	4
Doba práce stroje [h]	8	6	4	2
Počet výrobků	6	5	4	3

Tabulka 2: Doby práce strojů a počty vyrobených výrobků

Řešení. Počty výrobků, které vyrobí jednotlivé stroje za jednu hodinu, jsou po řadě $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{4}$ a $\frac{3}{2}$ výrobku. Za jednu hodinu společné práce je tedy souhrnný čas práce 4 h, na všech strojích se vyrobí dohromady $\frac{6}{8} + \frac{5}{6} + 1 + 1{,}5 = \frac{49}{12}$ výrobku. Průměrná doba potřebná na výrobu jednoho výrobku je tedy v hodinách

$$\frac{4}{\frac{49}{12}} = \frac{48}{49} \doteq 0{,}976. \tag{10}$$

Průměrná doba potřebná na výrobu jednoho výrobku je po zaokrouhlení na tisíciny 0,976 hodiny.

Poznámka. Zlomek $\frac{4}{\frac{49}{12}}$ v rovnosti (10) je prostým harmonickým průměrem časů potřebných na výrobu jednoho výrobku na jednotlivých strojích podle vzorce (1):

$$\frac{4}{\frac{49}{12}} = \frac{4}{\frac{1}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{3}}}.$$

Příklad 8. Bazén se pouze čerpadlem A vyčerpá za 8 hodin (t_1), samostatně čerpadlem B za 6 hodin (t_2). Za jak dlouho (t) se bazén vyčerpá, budou-li pracovat obě čerpadla současně?

Řešení. Odvoďme nejdříve vzorec pro obecný případ s více čerpadly, do něhož pak snadno dosadíme hodnoty ze zadání. Označme $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ průtoky při zapojení prvního, druhého až n-tého čerpadla. Pak

$$Q_1 = \frac{V}{t_1},\ Q_2 = \frac{V}{t_2},\ \ldots,\ Q_n = \frac{V}{t_n},$$

kde V je objem bazénu. Pro zapojení všech n čerpadel je celkový průtok roven součtu jednotlivých průtoků, tedy $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$, a výsledný čas čerpání je

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} Q_i} = \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} \frac{V}{t_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}}. \tag{11}$$

Vzorec (11) má pro $n = 2$ tvar:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}. \tag{12}$$

Pravá strana vzorce (12) naznačuje, že výsledný čas je polovinou harmonického průměru obou časových údajů. Po dosazení hodnot ze zadání do vztahu (12) dostaneme v hodinách

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2} = \frac{6 \cdot 8}{6 + 8} \doteq 3{,}43.$$

Vyčerpání bazénu pomocí obou čerpadel bude trvat přibližně 3,43 hodiny.

Příklad 9. Uvažujme dva rezistory zapojené paralelně[2)], první s odporem 30 Ω a druhý s odporem 70 Ω. Jakou hodnotu odporu by musely mít dva totožné rezistory, aby nahradily původní rezistory s různou hodnotou odporu při zachování stejného celkového odporu?

Řešení. Při paralelním zapojení je napětí U na všech takto zapojených rezistorech stejné a celkový proud I je roven součtu proudů na jednotlivých rezistorech, tedy hodnota výsledného odporu je

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sum_{i=1}^{n} I_i} = \frac{U}{\sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}. \tag{13}$$

[2)] V paralelním zapojení jsou spolu spojeny vstupní svorky vedle sebe zapojených zařízení a výstupní svorky vedle sebe zapojených zařízení.

Pro dva rezistory R_1 a R_2 má vztah (13) tvar

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}. \tag{14}$$

Vzorec (14) lze upravit do tvaru

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \tag{15}$$

který je studentům znám z hodin fyziky. Po dosazení do některého ze vzorců (14) nebo (15) dostaneme $R = 21\ \Omega$. Každý z rezistorů zapojených paralelně tedy musí mít hodnotu odporu $42\ \Omega$, aby byl zachován celkový odpor $21\ \Omega$.

Poznámka. Pokud by byly rezistory zapojeny sériově, pak průměrný odpor je aritmetickým průměrem zapojených rezistorů. Celkový odpor je v případě sériového zapojení rezistorů roven součtu odporů jednotlivých zapojených rezistorů.

Harmonický průměr ve finančnictví a ekonomii

Příklad 10. Jeden kus zboží prvního druhu stojí 2,5 €, 1 kus druhého druhu zboží stojí 3 €. Nakoupíte zboží prvního druhu za 30 € a zboží druhého druhu také za 30 €. Kolik činí průměrná jednotková cena zboží z výše uvedených dvou druhů zboží?[3)]

Řešení. Snadno spočteme, kolik kusů kterého zboží jsme koupili. Zakoupili jsme 12 ks zboží prvního druhu a 10 ks zboží druhého druhu celkem za 60 €. Průměrná cena jednoho kusu zboží je $\frac{60}{22} = 2{,}\overline{72}$ €, což je harmonický průměr ceny 2,5 € prvního druhu zboží a 3 € druhého druhu zboží, tedy

$$\frac{2}{\frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{3}} = \frac{15}{5{,}5} = 2{,}\overline{72}.$$

Příklad 11. Jeden kváskový chléb stojí v pekařství *Dobrý chleba* 2,5 €, jeden žitný chléb stojí tamtéž 3 €. Majitel potravin Na Růžku nakoupil v pekařství kváskové chleby za 30 € a žitné chleby za 54 €. Kolik činí průměrná cena jednoho chleba?

[3)] Podle [2].

Řešení. Celkem bylo nakoupeno 12 ks kváskového chleba a 18 ks žitného celkem za 84 €. Průměrná cena jednoho kusu chleba je $\frac{84}{30} = 2{,}8$ €, což je vážený harmonický průměr ceny 2,5 € za jeden kváskový chléb s váhou $w_1 = 30$ a ceny 3 € s váhou $w_2 = 54$, tedy podle vzorce (3) dostaneme

$$\frac{30 + 54}{\frac{30}{2{,}5} + \frac{54}{3}} = \frac{630}{225} = 2{,}8.$$

Průměrná cena jednoho chleba činí 2,8 €.

Na akciových trzích se využívají různé indexy (ukazatele), jako například poměr aktuální ceny akcie (P) a zisku (E) za posledních 12 měsíců, tedy P/E. Ukazatel P/E je pro obchodníky s akciemi a investory klíčovým ukazatelem, který naznačuje, jaký násobek zisku momentálně stojí daná akcie. Ukazatel P/E tedy pomáhá investorům posoudit hodnotu a potenciální návratnost investice do takové akcie.

Příklad 12. Vypočítejte průměrnou hodnotu koeficientu P/E (poměr aktuální ceny akcie a zisku za ni) pro portfolio složené ze dvou částí: 30 % tvoří akcie firmy A, která má kapitál ve výši 200 miliard dolarů a možný zisk z akcií 10 miliard dolarů, a 70 % tvoří akcie firmy B, která má kapitál 1 miliardu dolarů a zisk 1 milión dolarů.

Řešení. Ukazatel P/E firmy A má hodnotu $P/E = \frac{200}{10} = 20$, firma B má hodnotu $P/E = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$. Pokud si neuvědomíme, že je vhodný vážený harmonický průměr, můžeme uvažovat takto. P/E portfolia spočítáme jako poměr celkové ceny dělené celkovým ziskem. Pokud nakoupíme za x dolarů, pak $0{,}3 \cdot x$ utratíme za firmu A se ziskem spočítaným z koeficientu firmy děleného jejím $P/E = 20$, tedy zisk je $0{,}3 \cdot x/20$. Analogicky zaplatíme $0{,}7 \cdot x$ za firmu B s $P/E = 1000$ se ziskem $0{,}7 \cdot x/1000$. Celková cena je tedy $0{,}3x + 0{,}7x = x$ a celkový zisk $x(0{,}3/20 + 0{,}7/1000)$. Podíl těchto čísel odpovídá ukazateli P/E, nezávisí na celkové velikosti portfolia x a je váženým harmonickým průměrem ukazatelů P/E obou částí portfolia s vahami $w_1 = 0{,}3$ a $w_2 = 0{,}7$,

$$P/E = \frac{x(0{,}3 + 0{,}7)}{x\left(\frac{0{,}3}{20} + \frac{0{,}7}{1\,000}\right)} \doteq 63{,}7,$$

dle vzorce (3).[4)]

[4)] Koeficient P/E nemá žádné jednotky a jeho využití je omezené více faktory.

Příklad 13. Investor Honza rád obchoduje s akciemi. Předpokládejme, že si Honza koupí za částku g [€] akcie při kurzu k_1 € za 1 akcii, v dalším měsíci koupí Honza za g [€] další akcie při kurzu k_2 € za 1 akcii a tak dále, až za posledních g [€] si Honza koupí akcie v n-tém měsíci při kurzu k_n € za 1 akcii. Jaký je průměrný kurz, za který Honza nakoupil akcie?

Řešení. Celková investovaná částka za všechny akcie představuje součin $n \cdot g$ €. Je-li kurz k € za 1 akcii, pak získá Honza $\frac{1}{k}$ akcie/€. Pak celkový počet koupených akcií je roven součtu

$$\frac{g}{k_1} + \frac{g}{k_2} + \ldots + \frac{g}{k_n}.$$

Průměrný kurz, za který Honza nakupoval akcie, je tedy

$$\frac{n \cdot g}{\frac{g}{k_1} + \frac{g}{k_2} + \ldots + \frac{g}{k_n}}.$$

Po vykrácení g ve zlomku dostaneme

$$\frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}}, \tag{16}$$

což je vzorec pro výpočet harmonického průměru (3) hodnot jednotlivých kurzů, za které Honza nakupoval akcie.

Poznámka. Ze vztahu (16) je zřejmé, že výsledná hodnota průměrného kurzu nezávisí na hodnotě g v eurech, za kterou Honza akcie pravidelně nakupoval, neboť částka byla shodná pro všechny uvažované měsíce.

Příklad 14. Pan Koukal si postupně ve čtyřech měsících vyměnil různou naspořenou finanční částku v korunách za eura (viz tabulka 3). Jaký byl průměrný kurz, za který pan Koukal vyměnil koruny za eura?

Měsíc	1	2	3	4
Kurz [Kč/€]	24,10	23,80	24,50	25,10
Částka [Kč]	5 543	7 140	5 390	5 020

Tabulka 3: Výměny korun za eura

Řešení. Pan Koukal nakoupil celkem 950 € za celkem 23 093 Kč. Průměrná hodnota směnného kurzu je tedy

$$\frac{23\,093\ \text{Kč}}{950\ €} \doteq 24{,}3\ \text{Kč}/€.$$

Stejný výsledek obdržíme, pokud při výpočtu využijeme vážený harmonický průměr podle vzorce (3) s vahami w_1, w_2, w_3 a w_4, tj. investovanými částkami:

$$\frac{5\,543 + 7\,140 + 5\,390 + 5\,020}{\frac{5\,543}{24{,}10} + \frac{7\,140}{23{,}80} + \frac{5\,390}{24{,}50} + \frac{5\,020}{25{,}10}} = \frac{23\,093}{950} \doteq 24{,}3.$$

Průměrný kurz činil po zaokrouhlení na desetiny 24,3 Kč/€.

Závěr

Aplikace harmonického průměru je zajímavým a užitečným učivem, které nachází své specifické a nezastupitelné uplatnění při řešení úloh z různých předmětů, například fyziky, finančnictví a ekonomie.

Literatura

[1] Fiala, J., Hrubešová, M., Roskovec, T.: Některá využití harmonického průměru ve výuce matematiky na střední škole. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 99 (2024), č. 3, s. 13–24.

[2] Henze, N.: *Harmonisches Mittel: Gesunder Menschenverstand und Beispiele.* 2024 [online video]. In: Youtube, stochastikclips, `https://www.youtube.com/watch?v=2DKnmUPxJNw`.

[3] Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.: *Statistika v ekonomii.* Professional Publishing, Příbram, 2018.