Parita kombinačních čísel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 4, 56–57

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152709

Parita kombinačních čísel

O kombinačních číslech si můžete přečíst v *Poznámkách o kombinačních číslech, posloupnostech, především aritmetických, a polynomech.* Kombinační čísla a Pascalův trojúhelník (definice viz článek *O jednom mýtickém trojúhelníku*) jsou bezedným zdrojem matematických oříšků a ty dnešní se týkají parity[1)] kombinačních čísel. Nejprve si ukážeme, jak šikovně rozhodnout o tom, zda je dané kombinační číslo sudé či liché. Algoritmus se opírá o následující větu, viz [1].

Věta 1. *Pokud n je sudé a k je liché číslo, pak $\binom{n}{k}$ je sudé. Jinak platí*[2)]

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \mod 2.$$

Důkaz necháme na čtenáři, ale poradíme, že se hodí následující dva vztahy $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ a $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

Příklad 1. Opakovaným využíváním věty 1 určíme paritu $\binom{70}{38}$:

$$\binom{70}{38} \equiv \binom{35}{19} \equiv \binom{17}{9} \equiv \binom{8}{4} \equiv \binom{4}{2} \equiv \binom{2}{1} \equiv 0 \mod 2,$$

tedy $\binom{70}{38}$ je sudé číslo.

Napovězme, že parita se velmi dobře počítá, pokud uvažujeme binární zápisy čísel. Připomeňme, že binární zápis přirozeného čísla n je posloupnost $(a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0)$, kde číslice $a_0, a_1, \dots, a_d \in \{0, 1\}$, a $n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0$.

Pro čtenáře máme následující úlohy:

- *Dokažte, že v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku je počet lichých čísel roven $2^{s(n)}$, kde $s(n)$ je součet číslic v binárním zápisu čísla n.* Například $n = 5 = 2^2 + 1$ má binární zápis (101) a součet číslic v něm je 2. Mezi kombinačními čísly $\binom{5}{0} = 1 = \binom{5}{5}$, $\binom{5}{1} = 5 = \binom{5}{4}$, $\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}$ jsou skutečně $4 = 2^2$ lichá čísla.

Pro libovolné přirozené číslo n označme jako $e(n)$ maximální mocninu dvojky, kterou je n dělitelné. Tedy pro $n = 2^r \cdot \ell$, kde ℓ je liché číslo, je $e(n) = r$. Například $112 = 2^4 \cdot 7$, tudíž $e(112) = 4$.

1) Parita znamená sudost či lichost.

2) Dolní celá část reálného čísla x se značí $\lfloor x \rfloor$ a je to největší celé číslo $\leq x$.

- Nechť $n \leq 2^j$. *Dokažte, že* $e(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor$.
- *Najděte jednoduchý vztah mezi* n, $s(n)$ *a* $e(n)$.
- *Vyjádřete* $e\left(\binom{n}{k}\right)$ *pomocí* $s(n)$, $s(k)$ *a* $s(n-k)$.

Minule měli čtenáři za úkol odpovědět na otázky týkající se průměrů. Začneme s úlohou snazší:

- *Běžec uběhl první polovinu dráhy (400 m) průměrnou rychlostí 10 km/h. Jakou průměrnou rychlostí musí uběhnout druhou polovinu dráhy (tedy dalších 400 m), aby průměrná rychlost celého běhu byla dvojnásobná, tedy 20 km/h?*

Vysvětleme, že úloha nemá řešení. Označme hledanou rychlost v_2. Průměrná rychlost v je celková dráha s vydělená celkovým časem t. Pro celkový čas platí

$$t = \frac{s/2}{10} + \frac{s/2}{v_2},$$

tudíž

$$s = vt = 20t = 20\left(\frac{s}{20} + \frac{s}{2v_2}\right) = s + \frac{10s}{v_2}.$$

Vidíme, že rychlost v_2 splňující takovou rovnici neexistuje. (Ani rychlost světla by běžci nestačila, aby dosáhl průměrné rychlosti 20 km/h.)

Řešení následující těžší úlohy je věnován samostatný článek v tomto čísle *Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici* na str. 28.

- *Určete průměrnou vzdálenost bodů na kružnici.*

Na závěr úloha nematematická:

- *V češtině používáme termín průměr pro průměry aritmetické, geometrické apod., ale také pro průměr kružnice. V angličtině se stejná slova nepoužívají (mean vs. diameter). Proč zvolila čeština stejná pojmenování?*

Bohužel přesnou odpověď zatím neznáme. Podle Ústavu pro jazyk český se občas stane, že i dva objekty, které souvisejí jen vzdáleně, jsou pojmenovány stejně. V tomto případě je možná onou vzdálenou souvislostí fakt, že průměr kružnice je dvakrát vzdálenost bodů kružnice *od středu*, a průměr aritmetický, geometrický apod. vyjadřuje typickou, *střední* hodnotu.

Literatura

[1] Aigner, M., Ziegler, G.: Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, Berlin, 2009.