Učitel matematiky

Alena Šarounová

Geometrie gotické architektury

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 1, 2–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152775

GEOMETRIE GOTICKÉ ARCHITEKTURY*

Alena Šarounová, *MFF UK Praha*

Čas je architektem, lid je zedníkem.
V. Hugo

Od narození do smrti nás provázejí výtvory našich předchůdců. Celý život nás obklopuje zcivilizovaná krajina, kulturní lesy, pole a architektura. A právě architektura, ono od dětství nám nejbližší prostředí, na nás působí nesmírně hluboce. Ovlivňuje naše vidění světa, formuje naše představy o kráse a účelnosti tvarů i o moderním stylu života.

Architektura každé doby je plodem souhry i střetů dvou skupin vnějších vlivů. Vždy, pokud mluvíme o stavbách většího významu, jde o dílo technické i umělecké zároveň. Architektura reprezentující vládu, stát (hrady, zámky, radnice) a ideologii doby (kostely, kláštery, památníky, pomníky, sochy) nutně demonstruje „duch doby" a oficiální filosofii, zhmotňuje vůdčí myšlenky i symboliku, která tyto myšlenky zpřístupňuje prostému lidu prostřednictvím uměleckého ztvárnění stavby. Rozlet umělců - architektů - byl však tehdy jako dnes ovlivňován technickými znalostmi, ekonomickými možnostmi toho, kdo stavbu „objednal", dostupností stavebních materiálů, počtem a kvalifikací stavebních dělníků atd. Toto vše můžeme ukázat na celé řadě stavebních slohů, které zanechaly své otisky v naší zemi - od předrománského slohu otonského, který ovládl sousední německy mluvící území Evropy po smrti Karla Velikého (r. 814), přes sloh románský až po modernu dvacátého století.

Architekturu lze zkoumat z mnoha hledisek. Můžeme se zabývat střety protichůdných tendencí v jejích formách (vertikalita - horizontálnost, statičnost - dynamičnost, jasná geometrická struktura - rozvolněnost tvarů, strohost - ornamentálnost), v užívání staveb (stavby veřejné - výlučné, reprezentativní - obytné, civilní -

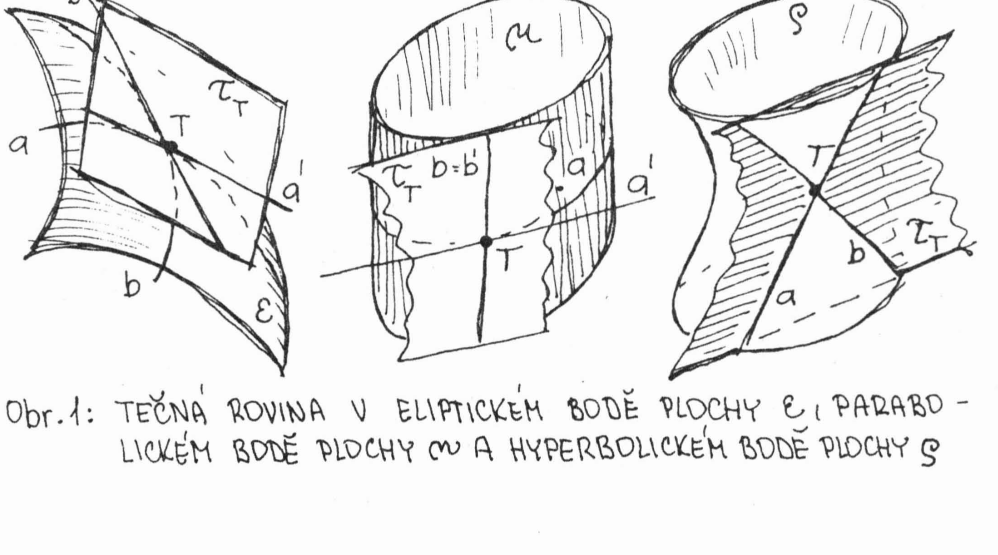
*Článek je převzat ze sborníku HISTORIE MATEMATIKY I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 1993, JČMF Brno 1994.

strategické, ...), můžeme sledovat vztah architektury k jiným druhům umění (malířství, sochařství, ...), filosofická východiska stavebních slohů aj. Můžeme vystopovat znovuožívání historických principů, např. vliv antického stavitelství na renesanční mistry a na pseudorenesanci konce 19. století, či geometrické principy gotických kleneb, které se objevují v moderních skeletových konstrukcích.

Právě tato naposledy zmíněná geometrická stránka gotických kleneb je natolik zajímavá, že bychom jí měli věnovat trochu pozornosti. Gotické stavitelství užívalo k zaklenutí větších prostorů poměrně složitých ploch. Ne všichni jsme geometři - a proto bude užitečné, když si některých vlastností takových ploch blíže všimneme aspoň v následujícím populárním výkladu. Důkladnější poučení najdou zájemci v literatuře.

Důležité stavební plochy a jejich vlastnosti

Ve stavebnictví se užívá celá řada ploch a jejich částí, od jednoduchých a všeobecně známých (rovina, plocha kulová, válcová, kuželová) až po speciální plochy přímkové. Z hlediska stavitele je důležité, aby použitá plocha plnila požadovanou funkci, byla dostatečně „pevná", esteticky žádoucí a technicky sestrojitelná. Uvědomme si, že záleží nejen na typu užité plochy, ale též na její poloze (svislá rovina je „pevnější" než vodorovná), na velikosti zastavěného prostoru a četných vstupních podmínkách (např. dostatek „dlouhého dříví" → ploché dřevěné stropy, nedostatek



Obr. 1: TEČNÁ ROVINA V ELIPTICKÉM BODĚ PLOCHY ε, PARABOLICKÉM BODĚ PLOCHY μ A HYPERBOLICKÉM BODĚ PLOCHY ρ

dříví → nutnost užívat klenby, nedostatek pracovníků → pomalá výstavba, volba jiných technologií).

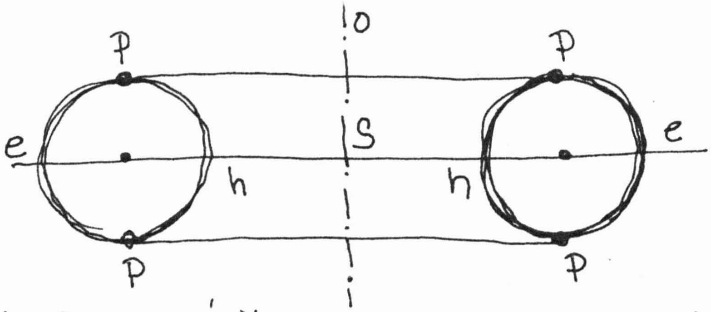
Statické vlastnosti ploch závisí na jejich geometrických vlastnostech, zejména na vzájemné poloze tečných rovin plochy a plochy samé. Ukažme si jednoduché příklady. Na obr. 1 jsou znázorněny tři možné případy vzájemné polohy plochy a její tečné roviny τ sestrojené v bodě T (doplňme, že jde o tzv. *regulární bod plochy*, tj. bod, v němž existuje *jediná* tečná rovina této plochy).

Ve všech případech můžeme tečnou rovinu τ dané plochy v bodě T sestrojit jako rovinu určenou dvojicí tečen a', b' křivek a, b, které leží na ploše a procházejí bodem T.

Na ploše ε jsou načrtnuty křivky a, b a jejich tečny a', b'. Tečná rovina τ plochy ε v bodě T nemá v nejbližším okolí bodu T (o tom, jak plocha ε vypadá dál, nic nevíme) s plochou ε další společný bod. V tomto případě říkáme bodu T *eliptický bod.* Např. kulová plocha je plochou eliptických bodů.

Na válcové ploše μ je znázorněna přímka b a kružnice (nebo elipsa) a. Tečna ke křivce a - tj. přímka a' spolu s povrchovou přímkou b plochy μ určují tečnou rovinu τ plochy μ. Tato tečná rovina má s plochou μ (v okolí bodu T) společné body přímky b. Říkáme, že bod T je *parabolickým bodem* plochy μ.

Poslední náčrtek znázorňuje část jednodílného hyperboloidu. Tečná rovina libovolného bodu T tohoto hyperboloidu plochu ϱ protíná ve dvojici přímek a, b (pro názornost je rovina τ znázorněna šrafováním). Říkáme, že bod T je *hyperbolickým bodem* plochy ϱ.



Obr. 2: OSOVÝ ŘEZ ANULOIDEM, PLOCHOU S BODY ELIPTICKÝMI, PARABOLICKÝMI I HYPERBOLICKÝMI

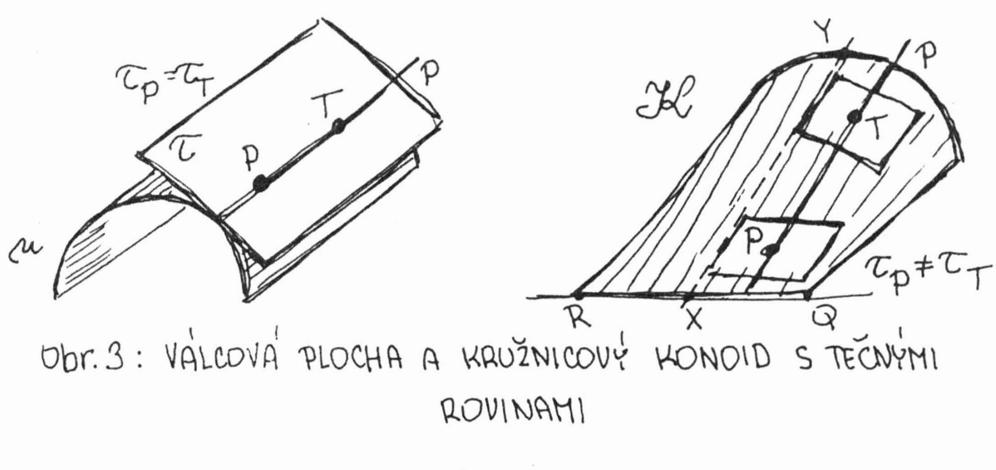
Plochou, na které nalezneme všechny tři typy bodů, je např. anuloid („pneumatika“). Na osovém řezu na obr. 2 jsou znázorněny čtyři parabolické body P, dva oblouky kružnic h bodů hyperbolických a dva oblouky e bodů eliptických. Body parabolické tvoří dvě kružnice (na jedné z nich anuloid „leží“), které oddělují body hyperbolické od eliptických.

Vzhledem k technologii došly ve stavebnictví obliby zejména tzv. plochy přímkové. Při práci je bylo totiž možné dobře aproximovat, podbednit prkny.

Přímkové plochy jsou - jak sám název napovídá - tvořeny přímkami, které splňují jisté podmínky: každým bodem přímkové plochy prochází aspoň jedna přímka plochy. Ze střední školy známe plochy kuželové a válcové. Na obr. 1 je znázorněn jednodílný hyperboloid, každým jeho bodem procházejí právě dvě přímky hyperboloidu (zde bodem T přímky a, b). Podívejme se na tečné roviny, které sestrojíme v různých bodech jedné takové přímky dané plochy.

Na obr. 3 vidíme části dvou přímkových ploch: nám dobře známé plochy válcové μ a *kružnicového konoidu* K. Na obou je znázorněna přímka p plochy a dva různé body P, Q této přímky. V každém z těchto bodů existuje jediná tečná rovina dané plochy. Tečné roviny τ_P a τ_T na přímce p plochy μ splývají. (To je fakt, který děti objeví již na základní škole, aniž by se o něm mluvilo.)

Jestliže všechny tečné roviny plochy P sestrojené v bodech přímky p této plochy splývají, říkáme přímce p *torsální přímka*.



Obr. 3: VÁLCOVÁ PLOCHA A KRUŽNICOVÝ KONOID S TEČNÝMI ROVINAMI

Pokud na ploše P leží jen přímky torsální, je plocha P *rozvinutelná* (tj. lze ji - třeba i po částech - rozvinout do roviny).

Tečné roviny τ_P a τ_T kružnicového konoidu K nesplývají. Mají společnou pouze přímku p. Této přímce p říkáme *regulární přímka plochy*. Obecně platí: tečné roviny plochy P sestrojené v bodech přímky p tvoří svazek rovin (a znalcům projektivní geometrie dodáváme: který je projektivní se svými body dotyku). Přímková plocha, na níž leží aspoň jedna regulární přímka, je *plocha zborcená* (nerozvinutelná).

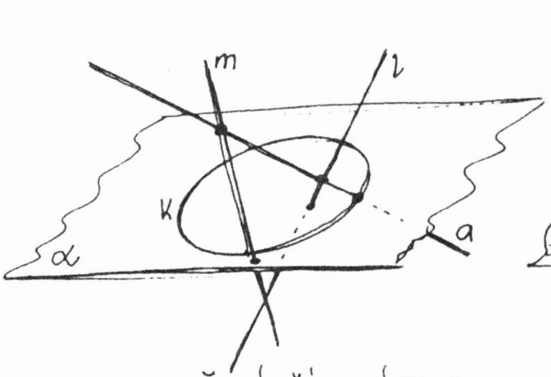
Některé zborcené plochy jsou tvořeny pouze regulárními přímkami (jednodílný hyperboloid, hyperbolický paraboloid), na jiných leží přímky regulární i torsální. Např. na konoidu z obr. 3 jsou čtyři torsální přímky, čárkovaně najdete znázorněnou jednu z nich - přímku XY. Torzálních přímek je na zborcené ploše vždy jen konečný počet.

Proč tyto vlastnosti popisujeme? Nezapomeňme, že nám jde o stavební využití ploch! Z hlediska statiky jsou plochy podél regulárních přímek „pevnější", takže zborcené plochy jsou celkově odolnější vůči různým tlakům. Často jsou také tvarově zajímavější. Obě tyto vlastnosti vybízejí architekty, aby jim věnovali svou pozornost.

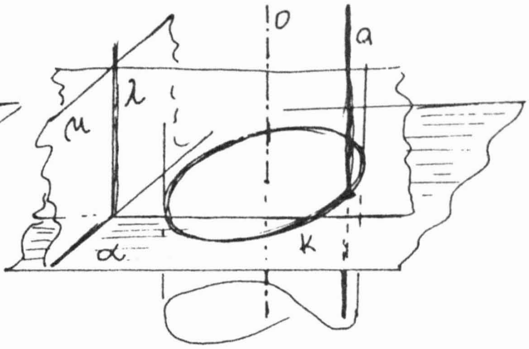
Jakým způsobem je možné přímkové plochy zadat? Možností je více, ale nejčastěji je určíme pomocí tří různých křivek v prostoru. (Deskriptivní geometrie pracuje zpravidla s projektivním rozšířením E_3' prostoru E_3. Pokud chceme vystačit s eukleidovským prostorem E_3, musíme nahradit „nevlastní přímku" řídící rovinou.) V technické praxi se nejčastěji jako tyto *řídící křivky* k, l, m volí přímky (resp. nevlastní přímky), kuželosečky a šroubovice. (Avantgardní architektura užívá i sinusoidy aj.).

Na obr. 4 je přímková plocha zadána elipsou k ležící v rovině α a dvojicí mimoběžek l, m. Přímka a, která všechny řídící křivky protíná, je *tvořící přímkou plochy*. Jsou-li řídící křivky k, l, m algebraické (tj. dají-li se vyjádřit pomocí polynomů stupňů p, q, r), říkáme, že je jimi určená přímková plocha algebraická a její stupeň

$w \leq 2pqr$ (zde záleží na vzájemné poloze řídících útvarů). Ukažme si několik jednoduchých příkladů.



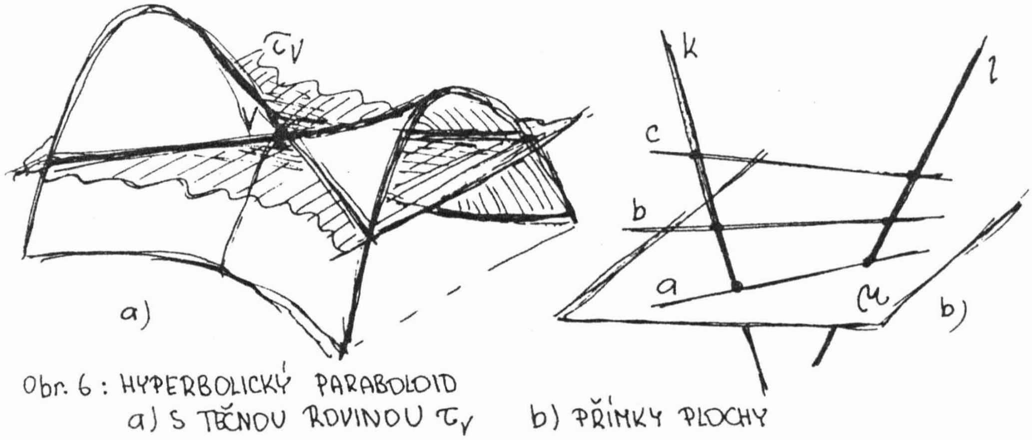
Obr. 4: VYTVOŘENÍ PŘÍMKOVÉ PLOCHY



Obr. 5: VYTVOŘENÍ VÁLCOVÉ PLOCHY

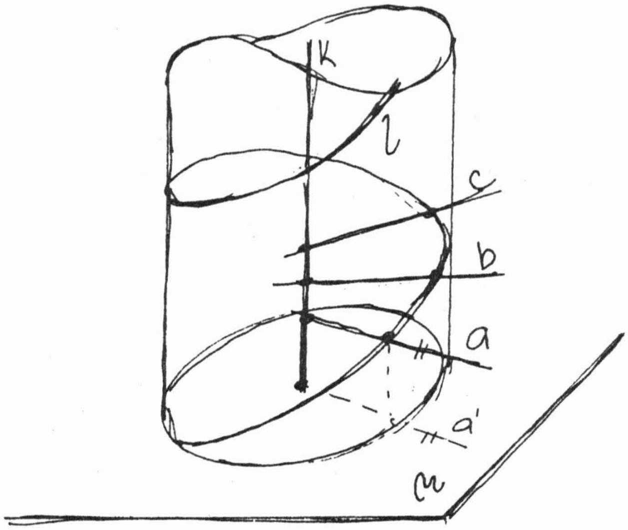
Válcová plocha (obr. 5) je určena kružnicí k ležící v rovině α a dvojicí řídících rovin, tj. dvojicí nevlastních přímek l, m. Plochu tvoří přímky a, které protínají kružnici k a jsou rovnoběžné s přímkou o, (tj. osa plochy je rovnoběžná s průsečnicí těchto rovin). Stupeň plochy může být maximálně čtyři ($p = 2$, $q = 1$, $r = 1$, $2pqr = 4$). Vzhledem k vzájemné poloze řídících křivek k, l a m je nám známá válcová plocha plochou druhého stupně.

Jednodílný hyperboloid z obr. 1 je zadán trojicí mimoběžek, které nejsou rovnoběžné s jednou rovinou. Je plochou 2. stupně ($p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, $2pqr = 2$). Speciálně rotační jednodílný hyperboloid dostaneme také rotací hyperboly podle její vedlejší osy.



Obr. 6: HYPERBOLICKÝ PARABOLOID
a) S TEČNOU ROVINOU τ_V b) PŘÍMKY PLOCHY

Hyperbolický paraboloid je velmi často užívanou plochou. Jeho část, kterou vidíme na obr. 6a, připomíná sedlo. Plocha je určena trojicí mimoběžek k, l, m - neboli mimoběžkami k, l a řídící rovinou μ, která obě mimoběžky protíná (obr. 6b). Tvořící přímky a, b, c jsou příčky přímek k, l rovnoběžné s rovinou μ. Také hyperbolický paraboloid je plochou druhého stupně. Má mnoho zajímavých vlastností - ale o tom jindy.



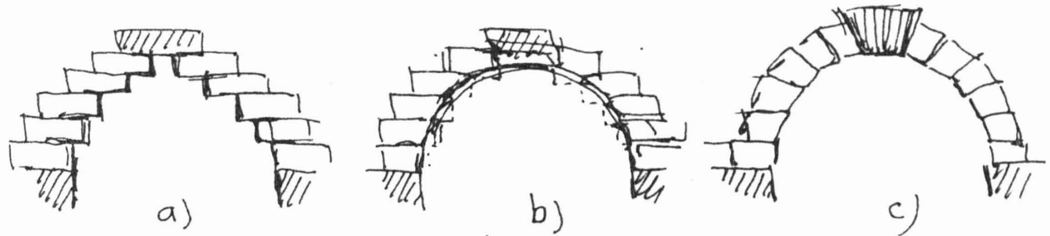
Obr. 7: PŘÍMÝ ŠROUBOVÝ KONOID

Šroubový konoid (obr. 7) je určen přímkou k, která je osou druhé řídící křivky, šroubovice l. Místo třetí křivky m je dána řídící rovina μ . Přímky šroubového konoidu a, b protínají přímku k i šroubovici l a jsou rovnoběžné s řídící rovinou. Speciální případ této šroubové plochy dobře známe z praxe, jde o točité schodiště. Protože šroubovice není algebraická křivka, plocha „nemá stupeň“.

Už podruhé hovoříme o „konoidu“. Čím je taková plocha charakteristická? Podle názvu „konoid“ by měla být podobná např. kuželi („konus“), ale to platí jen o některých konoidech pozorovaných z určité strany. Konoid je přímková plocha s řídící rovinou. Na obr. 7 je řídící rovina konoidu nakreslená, řídící rovina kružnicového konoidu z obr. 3 je kolmá k přímce RQ.

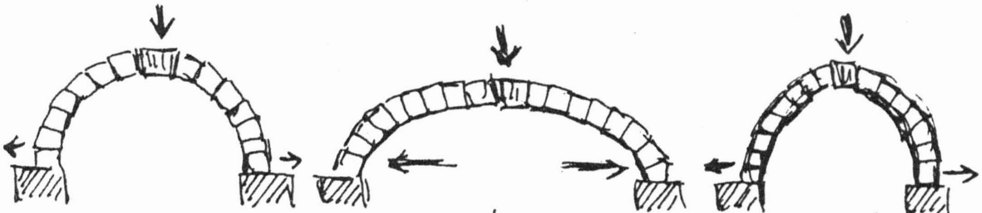
Předchůdci gotické klenby

Románská architektura užívala k zakrytí prostoru buď dřevěné stropy nebo klenby. Objev tzv. „pravé klenby" je připisován Etruskům, od kterých tuto znalost převzali Římané. Nejstarším typem klenby (obr. 8a) je nepravá klenba přečnělková, která není příliš odolná vůči svislému tlaku. Někdy bývala upravena odtesáním stavebního materiálu (obr. 8b), což zlepšilo její vzhled, ale nikoli stavební vlastnosti.



Obr. 8: KLENBY: a) NEPRAVÁ - PŘEČNĚLKOVÁ; b) NEPRAVÁ - ODTESANÁ; c) PRAVÁ KLENBA

Pravá klenba (obr. 8c) je velice pevným stavebním prvkem díky speciálnímu kladení cihel nebo přitesaných kamenů. Čím větší tlak na takový oblouk ve zdivu působí, tím pevněji jsou jeho kameny přitisknuty ve spárách k sobě a stavba získává na odolnosti. Jen si vzpomeňme, co stavebních památek užívajících kleneb se zachovalo ze starověku! A nemusí to být jen Koloseum v Římě či akvadukty ve Francii, v severní Africe i jinde.

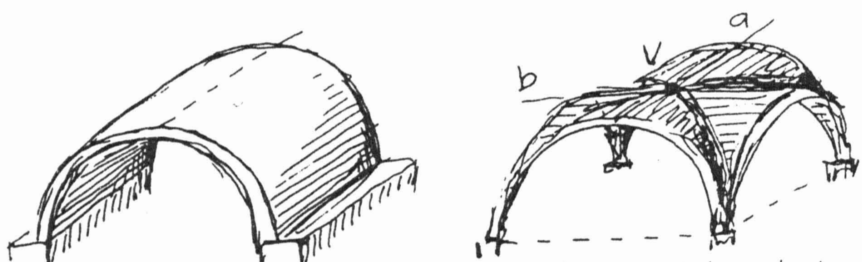


Obr. 9: KLENEBNÍ OBLOUK KRUHOVÝ, STLAČENÝ A PŘEVÝŠENÝ

I pravá klenba může být odolnější nebo zranitelnější. Do značné míry záleží na křivosti řídících křivek klenby. Na obr. 9

je zakreslena klenba kruhová a dvě klenby eliptické. Vůči svislému tlaku je zde nejodolnější klenba převýšená, nejméně odolná je klenba stlačená. Tato klenba také při větším zakřivení nejvíce „rozevírá“ stěny do stran a snadno se prolomí. Ovšem s bočními tlaky je nutno počítat u všech kleneb. Uvidíme později, jak tomuto nebezpečí čelili středověcí stavitelé.

Základními typy kleneb jsou (obr. 10) *klenba valená* a *klenba křížová*.

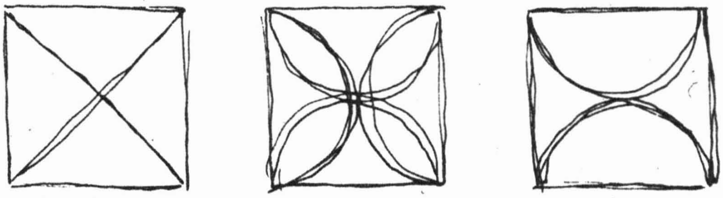


Obr. 10: (ROMÁNSKÁ) KLENBA VALENÁ A KŘÍŽOVÁ (1 TRAVÉ)

Valená klenba je částí válcové plochy. Spočívá na dvojici zdí, které jsou značně mohutné, aby čelily bočním tlakům. Klasická křížová klenba je průnikem dvou valených kleneb nad čtvercovým půdorysem (jedno tzv. „*travé*“). Váha klenby je přenesena do vrcholů čtverce. *Vrcholnice klenby* jsou přímky *a* a *b* protínající se v bodě *V* (*temeno klenby*). Je to nejzranitelnější bod celé klenby. Řídící polokružnice valených kleneb se nazývají *čela klenby* a v praxi bývají podepřeny kruhovou vyzdívkou (*pasy*), která „zesílí“ řídící kružnice. Průniková křivka původních válcových ploch se rozpadá na dvě shodné elipsy, které procházejí bodem *V* a dvojicí protilehlých vrcholů čtverce. Na křížové klenbě jsou realizovány pouze jejich poloviny. Na stavebních plánech se taková klenba schématicky znázorňuje dvojím způsobem (obr. 11).

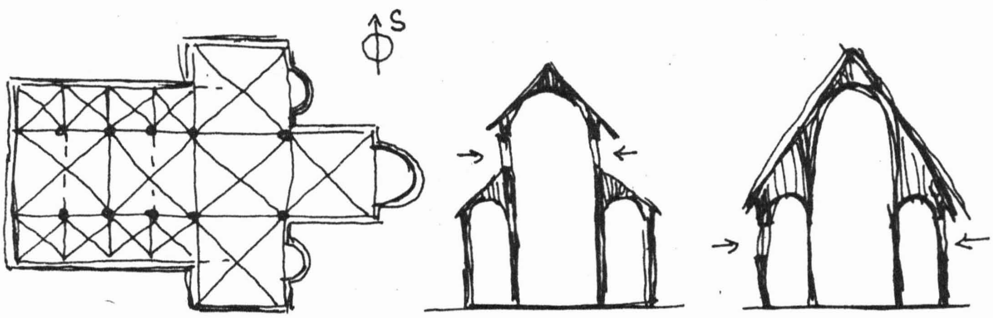
Travé je zakresleno jako čtverec, průnikové elipsy se zobrazí jako jeho úhlopříčky . Protože však z takového obrázku nelze určit, zda byla čela klenby kruhová, eliptická či jiná, je vhodnější druhý způsob: místo obrazu průnikových elips jsou v obrazu travé znázorněna čela klenby. Vedle klenby křížové (obr. 11b) tak máme zakreslenou i klenbu valenou (obr. 11c).

Jedno travé se stalo jakýmsi „modulem", jednotkou, jejímž opakováním je možné sestrojit plán větší stavby. Z doby románské



Obr. 11: PŮDORYSNÁ SCHEMATA KLENBY

se nám zachovalo jen málo staveb civilních a některé chrámy. Církevní stavby se vyvíjely od 3. století n. l. velice zajímavým způsobem. V naší oblasti se posléze ustálily dva representativní typy: centrální *rotunda* a podélná *bazilika*. A právě půdorys baziliky je dokladem účinku „modulu" na charakter stavby. Na obr. 12 je jeden takový půdorys načrtnut. Jde o baziliku se třemi podélnými loděmi a jednou lodí příčnou. Boční lodě mají poloviční šířku i výšku ve srovnání s lodí hlavní i příčnou (s tzv. transeptem).



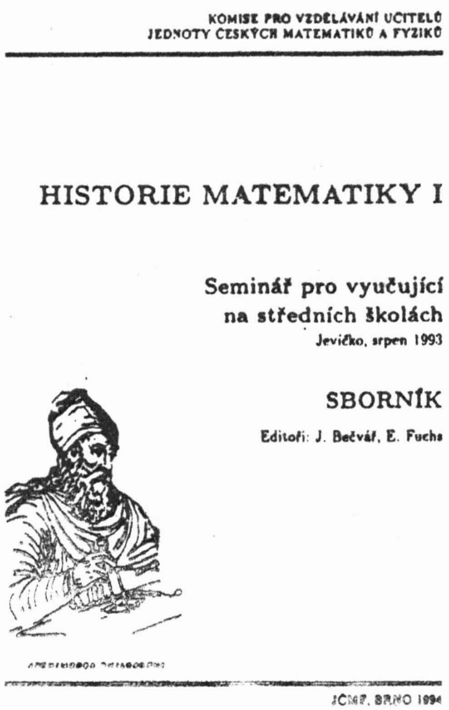
Obr. 12: VÁZANÝ SYSTÉM BAZILIKY - PŮDORYS A DVA ŘEZY

Proti západnímu vstupu do chrámu leží hlavní oltář zpravidla ve výklenku, kterému se říká apsida. Na našem půdorysu vidíme apsidy tři, postranní apsidy bývaly určeny oltářům dalších světců.

Baziliky v sídelních městech biskupů bývaly mnohem složitější, ale nám tato „jednoduchá“ stavba jako ukázka postačí.

Dokončení v příštím čísle.

⋆ ⋆ ⋆



Sborník „Historie matematiky“, z něhož je článek *Geometrie gotické architektury* převzat, lze zakoupit **v Praze**, v prodejně nakladatelství Prometheus, Žitná 25 a **v Brně** v knihovně matematické sekce Přírodovědecké fakulty MU, Janáčkovo nám. 2a.
Cena sborníku je 45,- Kč, rozsah sborníku je 242 stran.

Z obsahu sborníku vyjímáme:

E. Fuchs: *Přehled vývoje matematiky*
J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky*
J. Šimša: *Archimédova statika v geometrii*
A. Šarounová: *Geometrie a malířství*