NETRADIČNÍ VYUŽITÍ POJMU SLOŽENÁ FUNKCE NA STŘEDNÍ ŠKOLE*

PETR EISEMANN, *PdF UJEP Ústí n. Labem*

Významným faktorem ovlivňujícím efektivitu výuky matematiky je nesporně míra tvořivosti, se kterou studenti přistupují a mohou přistupovat (!) k řešení matematických problémů i ke studiu matematiky obecně. Jednou z možností, jak přispět ke zlepšení poměru mezi standardní, „neobjevitelskou" činností studentů a činností vyžadující jejich kreativní přístup, je formulovat se studenty jednoduché matematické věty, dokazovat je či vyvracet vhodnými protipříklady. Ve výuce přitom musí být tyto náměty prezentovány tak, aby studenti sami pociťovali nutnost formulovat určité věty, zabývat se předpoklady jejich platnosti a zobecňovat je. To může nastat tehdy, budou-li tyto věty usnadňovat výpočty a rozhodování, zjednodušovat vyšetřování, budou-li tedy studentům v dané situaci užitečné.

Jeden z možných námětů k takové činnosti popisuji ve svém příspěvku. Zařadit do výuky by se jako celek dal do čtvrtého, třetího či druhého ročníku gymnázia. Bezprostředním cílem jeho prezentace ve výuce je formulace dvou tvrzení užitečných při vyšetřování průběhu funkcí a jejich aktivní používání.

Vhodnou motivací zde může být například úloha vyšetřit průběh a nakreslit graf funkce

$$z(x) = (x^2 - 2x + 2)^3$$

Pro studenty představuje toto zadání nestandardní úlohu, neboť uvedená funkce není jedním ze základních druhů funkcí, s jejichž vlastnostmi se studenti ve druhém ročníku seznamují. „Univerzální" a oblíbená dosazovací metoda, ke které se studenti v tomto případě nejčastěji obracejí, jistě není postup, který by měl učitel

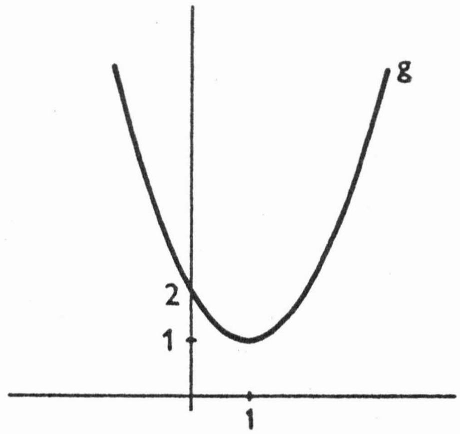
*Ukázka z úspěšně obhájené kandidátské disertační práce.

ve výuce jako základní metodu pro vyšetřování průběhu funkcí podporovat.

Klíčem k efektivnímu řešení zde může být vnímat zadanou funkci $z(x)$ jako funkci složenou:

$$z(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

kde $f(y) = y^3$ a $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Již od druhého ročníku mají studenti k dispozici metodu, pomocí níž jsou schopni nakreslit graf vnitřní funkce g (obr.1).



obr.1

Ta je rostoucí na intervalu $(1, \infty)$. Pomocí obrázku grafu lze dovést studenty k vyslovení hypotézy, že umocňováním funkce g na třetí se v intervalu $(1, \infty)$ růst funkce zachová a že tedy i složená funkce $(f \circ g)(x)$ bude na tomto intervalu rostoucí. Tuto hypotézu je nyní možné zobecnit pro případ funkce složené z rostoucí vnitřní funkce $g(x)$ na intervalu I a rostoucí vnější funkce $f(y)$ na množině $M \supseteq g(I)$. Pak totiž platí

$$\forall y_1, y_2 \in M;\ y_1 < y_2 \Rightarrow f(y_1) < f(y_2),$$
$$\forall x_1, x_2 \in I;\ x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Protože

$$\forall x \in I;\ g(x) \in M$$

, platí

$$\forall x_1, x_2 \in I;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)).$$

Výsledkem probírání dalších možných případů (rostoucí složená s klesající, klesající složená s rostoucí a klesající složená s klesající) jsou následující dvě věty. K nim jsem přiřadil ještě tvrzení týkající se extrémů složených funkcí. Ta je možné formulovat pro lokální extrémy (čtvrtý ročník) i pro extrémy funkce na množině.

V1 Nechť funkce $g(x)$ je definována na intervalu I, nechť funkce $f(y)$ je definována a rostoucí na množině $M \supseteq g(I)$. Potom platí:

a) Je-li funkce g rostoucí, resp. klesající na I, je i funkce $f \circ g$ rostoucí, resp. klesající na I.

b) Má-li funkce g v bodě $c \in I$ maximum, resp. minimum na I, má i funkce $f \circ g$ v bodě c maximum, resp. minimum na I.

c) Má-li funkce g ve vnitřním bodě c intervalu I lokální maximum, resp. minimum, má i funkce $f \circ g$ v bodě c lokální maximum, resp. minimum.

V2 Nechť funkce g je definována na intervalu I, nechť funkce f je definována a klesající na množině $M \supseteq g(I)$. Potom platí:

a) Je-li funkce g rostoucí, resp. klesající na I, je funkce $f \circ g$ klesající, resp. rostoucí na I.

b) Má-li funkce g v bodě $c \in I$ maximum, resp. minimum na I, má funkce $f \circ g$ v bodě c minimum, resp. maximum na I.

c) Má-li funkce g ve vnitřním bodě c intervalu I lokální maximum, resp. minimum, má funkce $f \circ g$ v bodě c lokální minimum, resp. maximum.

Důkazy všech tvrzení obou vět jsou podobně jako výše uvedený důkaz prvního tvrzení bodu a) věty V1 jednoduché a vyplývají bezprostředně z definic použitých pojmů.

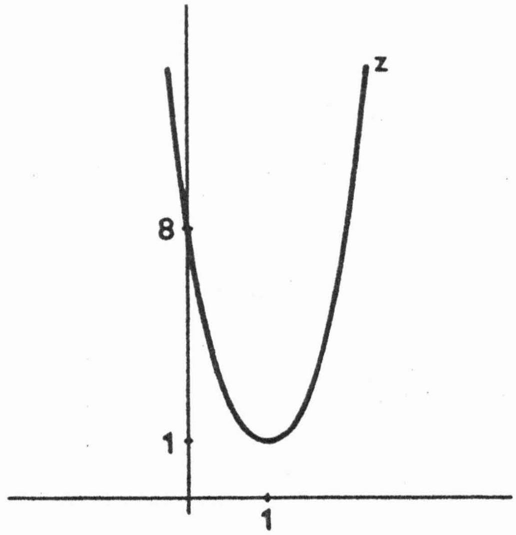
Vraťme se nyní k úloze nakreslit graf funkce

$$z(x) = (x^2 - 2x + 2)^3.$$

Vnější funkce

$$f(y) = y^3$$

je rostoucí na $\mathbf{R}$, složená funkce $f \circ g$ tedy bude podle V1 zachovávat na definičním oboru funkce g druh její monotónnosti. Tento poznatek nám již výrazně pomůže nakreslit graf zadané funkce z (obr.2).



obr.2

Podobná situace nastává například u funkce

$$z(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

Pomocí V1 lze rychle vyšetřit i například průběh funkce

$$z(x) = 2^{x^3 - 3x},$$

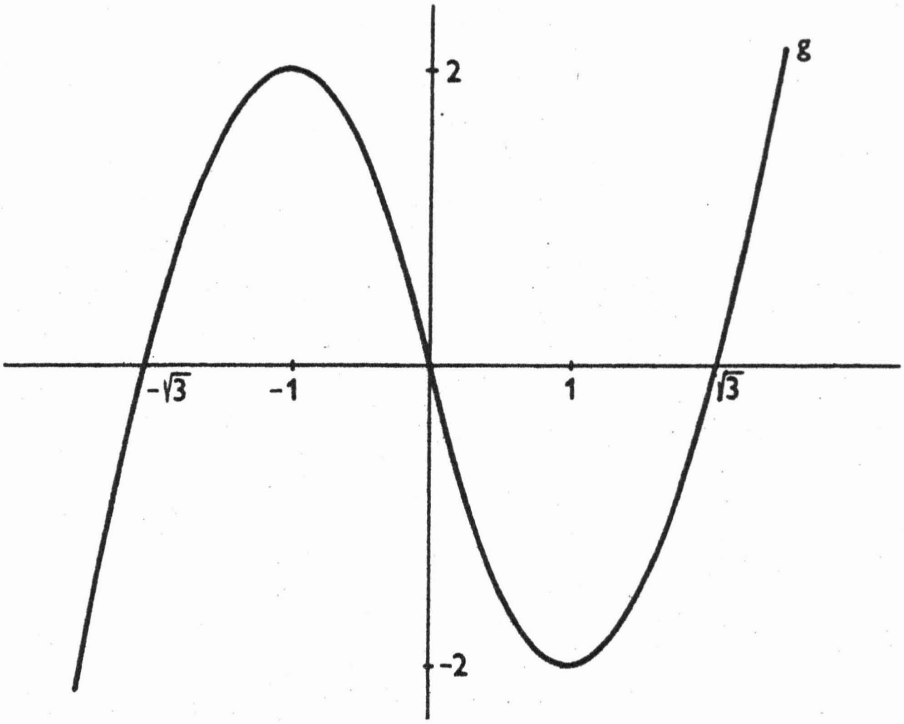
neboť vnější funkce

$$f(y) = 2^y$$

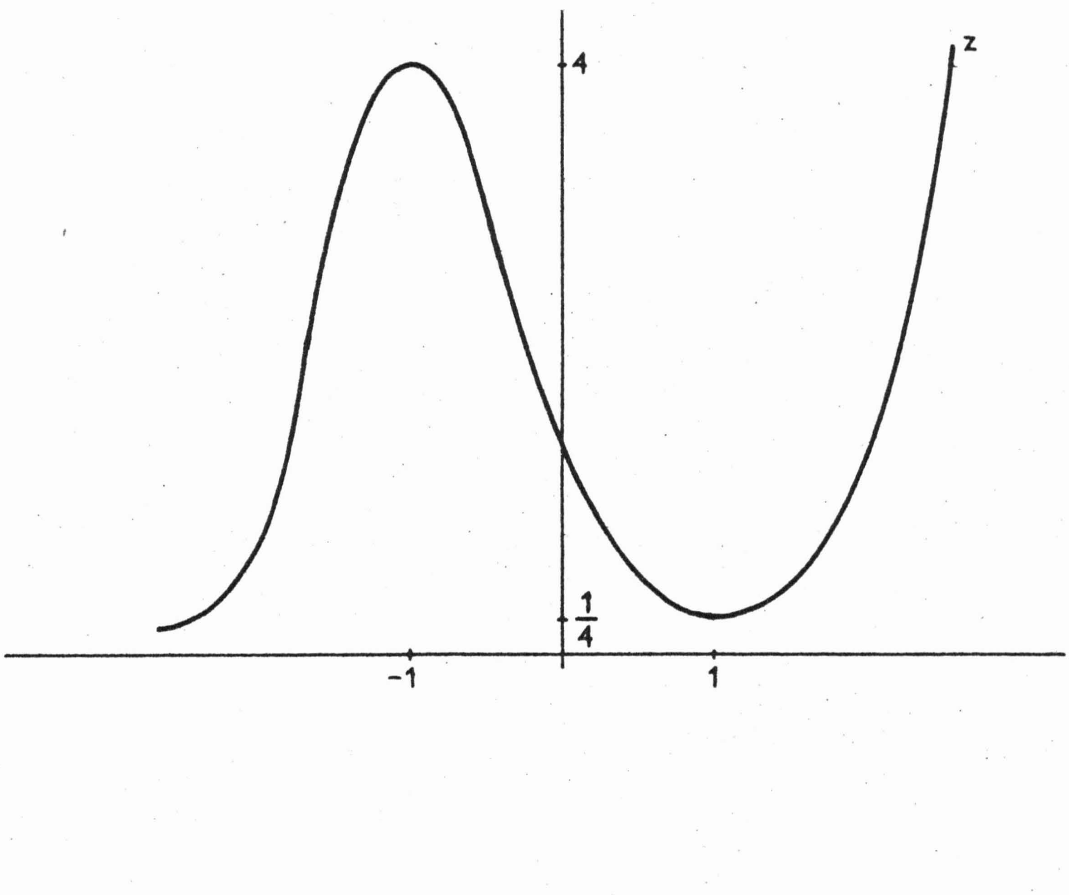
je rostoucí na množině $\mathbf{R}$, která je oborem hodnot funkce $g(x) = x^3 - 3x$ (obr.3). Z jejího grafu lze tedy vzhledem ke zřejmé nezápornosti funkce z a s přihlédnutím k $\lim_{x\to\infty} z(x)$ a $\lim_{x\to-\infty} z(x)$ (v nižších ročnících třeba jen intuitivně pojatým) přímo usuzovat na průběh složené funkce z (obr.4).

Průběh funkce

$$z(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$$



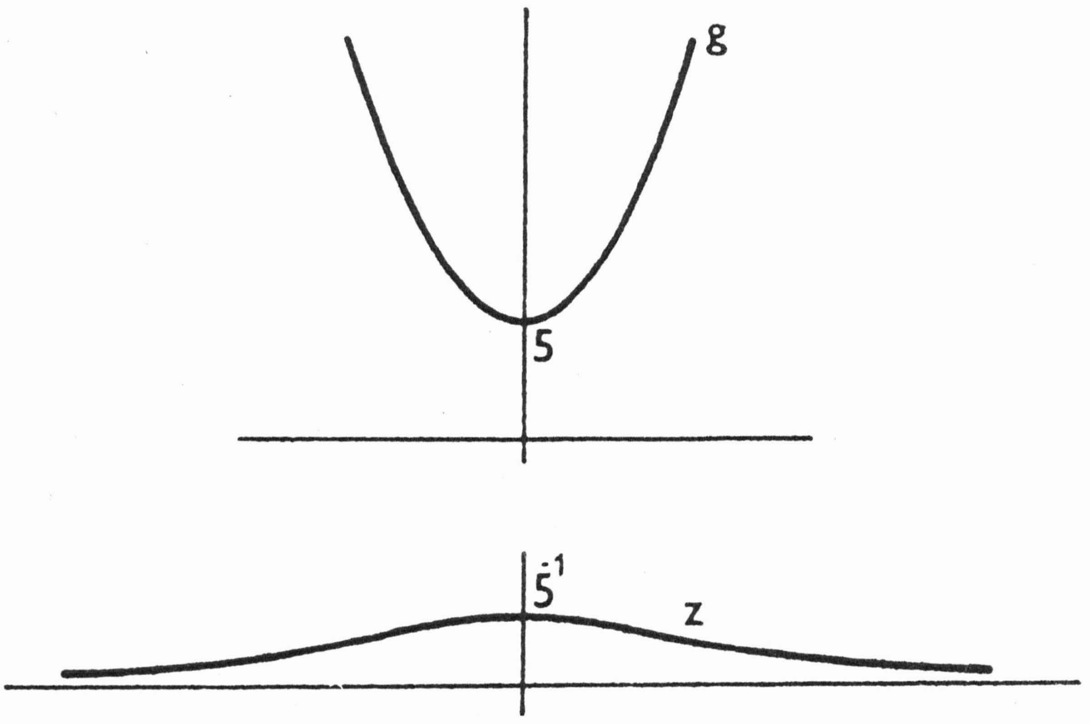
obr. 3



lze zase elegantně vyšetřit použitím V2. Vnější funkce

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

je totiž klesající na $(0, \infty) \supset \langle 5, \infty) = H_g$. Podle této věty se tedy druh monotónnosti složené funkce v každém intervalu, v němž je vnitřní funkce $g(x) = x^2 + 5$ ryze monotónní, změní. Podle tvrzení b) V2 bude mít složená funkce $f \circ g$ v bodě 0 maximum. Vzhledem k $\lim_{\pm\infty} z(x)$ lze tedy přímo z grafu funkce g usuzovat na průběh složené funkce z (obr.5).



obr. 5

Vhodným doplňkem k uvedeným dvěma větám a zároveň užitečným a jednoduchým cvičením mohou být formulace a důkazy vět o vlastnostech součtu monotónních funkcí. Míním tím jednoduchoučká tvrzení, že totiž součtem funkcí f a g rostoucích, resp. klesajících na množině M, je opět funkce rostoucí, resp. klesající na M. Bude velice užitečné, budou-li studenti na základě vhodných příkladů funkcí formulovat i hypotézy o vlastnostech součtu rostoucí a klesající funkce, součinu dvou rostoucích, resp. klesajících funkcí a součinu rostoucí a klesající funkce na množině. Zde budou pochopitelně v důkazech domnělých vět narážet na překážky, zamítat navržené hypotézy a vyvracet je vhodnými protipříklady či oslabovat předpoklady navrhovaných vět. Tuto část práce pokládám za stejně přínosnou, objevitelskou a tvůrčí jako formulace a důkazy předchozích platných vět.

Domnívám se, že realizace tohoto námětu ve výuce nemusí splnit pouze v úvodu vytýčený úkol umožnit studentům objevovat, formulovat hypotézy, dokazovat vlastní matematické věty a rozvíjet tak jejich kreativní přístup k matematice, ale že může být užitečná i z hlediska dosažení dobrých znalostí o funkcích. Aktivní použití uvedené sady vět totiž studentům ve druhém a třetím ročníku gymnázia umožňuje vyšetřovat průběhy funkcí, u nichž by to jinak bez použití diferenciálního počtu bylo obtížné či zdlouhavé.Ale i tam, kde se metody vyšetřování průběhu funkcí pomocí diferenciálního počtu prezentují (na gymnáziu ve čtvrtém ročníku), umožňuje leckdy uvedený přístup rychlejší a elegantnější nakreslení grafu funkce než zmíněnými prostředky diferenciálního počtu. K těm navíc studenti často přistupují zcela algoritmicky (vyšetři nulové body, vypočti první derivaci, polož ji rovnu nule, vyšetři, kdy je větší, resp. menší než nula, vypočti druhou derivaci atd.). Kromě nesmyslného dodržování všech bodů tohoto postupu to často vede k tomu, že studenti jej zbytečně nasazují u velice jednoduchých funkcí, dělají přitom chyby v řešení nerovnic vzniklých derivováním apod.

Na závěr chci už jen doplnit, že podobná tvrzení užitečná pro vyšetřování vlastností a průběhů funkcí se dají se studenty „objevovat“, formulovat a dokazovat i v případě skládání, sčítání a násobení funkcí sudých, lichých, omezených či periodických.