MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 25.-30.4. 1994 se uskutečnilo v Jevíčku III. kolo 43. ročníku MO, kategorií A a P. Letos poprvé proběhla olympiáda pouze v rámci ČR. V roce 1993, kdy se konal 42. ročník MO, soutěžili ještě společně studenti ČR a SR. Pořadatelství bylo svěřeno již podruhé gymnáziu v Jevíčku, které je schopné vytvořit pro pořádání takové soutěže dobré podmínky, a to za plného provozu školy a domova mládeže. Na základě výsledků II. kola se do Jevíčka sjelo 50 nejlepších matematiků a 30 nejlepších programátorů. Slavnostní zahájení matematické části soutěže proběhlo v neděli 24. dubna ve 20.00 hod. v aule gymnázia za přítomnosti Mgr. Zlatuše Zitkové, zástupkyně MŠMT, doc. RNDr. Leo Bočka, CSc., předsedy ÚV MO, Petra Spáčila, starosty města Jevíčka, a RNDr. Daga Hrubého, ředitele gymnázia. Programátoři slavnostně zahájili ve středu 27. 4. 1994 večer, rovněž v aule gymnázia. Soutěžící byli uvítáni doc. RNDr. Václavem Sedláčkem, CSc. a RNDr. Josefem Töpferem, CSc., kteří řídili programátorskou část MO. Vlastní soutěž pak probíhala ve velkém sále hotelu Morava. Matematici soutěžili v pondělí a úterý, programátoři ve čtvrtek a pátek. Vyhlášení vítězů proběhlo ve středu pro matematiky a v sobotu pro programátory. V rámci soutěže se uskutečnilo také zasedání ÚV MO, které se zabývalo koncepcí MO v dalších letech a otázkou reprezentace ČR v MMO.

Čtenáře budou asi více zajímat úlohy, které soutěžící řešili. Uvádíme zadání všech příkladů III. kola MO kategorie A, jejich vzorová řešení a umístění všech soutěžících.

V příštím čísle uvedeme obdobné informace o kategorii P.

DAG HRUBÝ
Gymnázium Jevíčko

43-A-III

Jevíčko 25.-28. dubna 1994

1. Nechť $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je libovolná funkce na množině přirozených čísel, která splňuje nerovnost

$$f(x) + f(x+2) \leq 2f(x+1)$$

pro každé přirozené číslo x. Dokažte, že potom v rovině existuje přímka, na které leží nekonečně mnoho bodů s kartézskými souřadnicemi $[n, f(n)]$.

Řešení. Označme $d(x) = f(x+1) - f(x)$. Podle zadání úlohy je funkce $d : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ nerostoucí. Funkce d je ale také nezáporná: kdyby totiž pro některé k bylo $d(k) \leq -1$, byla by f ostře klesající pro $x \geq k$, a bylo by

$$f(k + f(k) + 1) = f(k) + \sum_{i=0}^{f(k)} d(k+i) \leq$$
$$\leq f(k) + d(k)(f(k)+1) \leq f(k) - (f(k)+1) = -1 < 0.$$

Je tedy $d(1) \geq d(2) \geq \cdots \geq 0$ a existuje $c \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $x \geq n_0$ je $d(x) = c$, neboli $f(x) = f(n_0) + c(x - n_0)$. Pak ale všechny body $[x, f(x)]$, $x \geq n_0$, leží v jedné přímce.

---

2. V kvádru o objemu V je umístěn konvexní mnohostěn M. Kolmý průmět mnohostěnu M do každé stěny kvádru je totožný s touto stěnou. Jaký nejmenší objem může mít M?

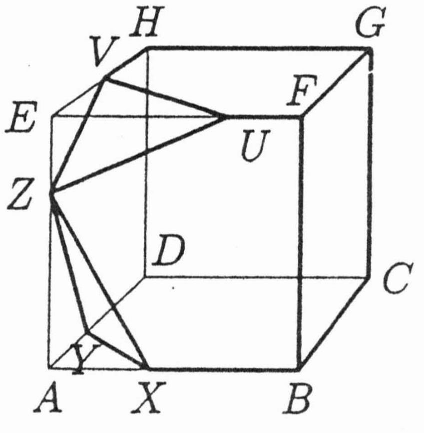
Řešení. Označme vrcholy jedné podstavy kvádru A, B, C, D a vrcholy ve druhé podstavě E, F, G, H (tak, že AE, BF, CG, DH tvoří hrany). Průnik mnohostěnu M s každou hranou kvádru musí být neprázdný. Vyberme tedy na každé hraně kvádru jeden bod patřící mnohostěnu M a označme M' konvexní obal těchto 12 (ne nutně různých) bodů. Mnohostěn M' vznikne z kvádru odříznutím osmi rohových čtyřstěnů, jejichž objemy odhadneme po seskupení do dvojic podle hran AE, BF, CG, DH.

Nechť X, Y, Z, U, V jsou po řadě vrcholy mnohostěnu M', ležící na hranách AB, AD, AE, EF, EH (obr. 1). Označme $x = |AX|$, $y = |AY|$, $z = |AZ|$, $u = |EU|$, $v = |EV|$, $w = |EZ|$ a $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |AE|$. Přitom $x, u \leq a$, $y, v \leq b$ a $z + w = c$. Potom dostáváme

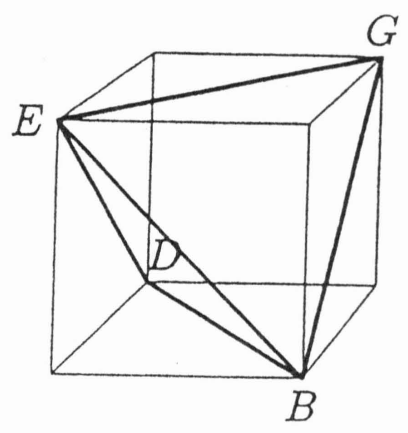
$$V(AXYZ) + V(EUVZ) = \frac{1}{6}(xyz + uvw) \leq$$
$$\leq \frac{1}{6}(abz + abw) = \frac{1}{6}ab(z + w) = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}V.$$

Protože M' vznikl odříznutím čtyř takovýchto dvojic rohových čtyřstěnů, je

$$V(M) \geq V(M') \geq V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V.$$



obr. 1



obr. 2

Hodnoty $\frac{1}{3}V$ nabývá např. objem čtyřstěnu $BDEG$ (obr. 2). Tudíž $V_{\min} = \frac{1}{3}V$.

---

3. V rovině je nakreslen konvexní 1994-úhelník M a některé jeho úhlopříčky tak, že z každého vrcholu vychází právě jedna nakreslená úhlopříčka. Délkou úhlopříčky rozumíme počet stran mnohoúhelníka M, které tato úhlopříčka od M odřezává (minimum dvou možných čísel). Označme $(d_1, d_2, \ldots, d_{997})$ délky nakreslených úhlopříček, uspořádané sestupně podle velikosti. Rozhodněte, zda je možno úhlopříčky nakreslit tak, aby

a) $(d_1, d_2, \ldots, d_{997}) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{991}, \underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2}_{6})$,

b) $(d_1, d_2, \ldots, d_{997}) = (\underbrace{8, 8, 8, 8}_{4}, \underbrace{6, \ldots 6}_{985}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{8})$.

Řešení. Dokážeme následující tvrzení: *Nechť v $2n$-úhelníku je vyznačeno n úhlopříček tak, že z každého vrcholu vychází právě jedna. Potom počet úhlopříček sudé délky je sudý.*

DŮKAZ: Obarvěme vrcholy $2n$-úhelníka střídavě bíle a černě, máme tedy n bílých a n černých vrcholů, každá strana $2n$-úhelníka spojuje jeden bílý a jeden černý vrchol. Úhlopříčky sudé délky spojují vrcholy stejné barvy, úhlopříčky liché délky spojují vrcholy různých barev. Přitom bílo-bílých úhlopříček je stejně jako černo-černých (po odstranění vrcholů spojených bílo-černými úhlopříčkami zůstane stejný počet černých i bílých bodů). Jednobarevných úhlopříček je tedy sudý počet.

JINÝ DŮKAZ: Označme úhlopříčky $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Protože nám jde o kombinatorické vlastnosti, můžeme předpokládat, že žádné tři úhlopříčky neprocházejí jedním bodem. Označme ještě a_i počet úhlopříček, které protínají úhlopříčku u_i a počítejme celkový počet průsečíků vyznačených úhlopříček P. Z počítání dvěma způsoby plyne $2P = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a nutně počet úhlopříček s lichým a_i je sudý. Přitom úhlopříčka u_i délky d_i odřezává $d_i - 1$ vrcholů, z nichž vychází celkem $d_i - 1$ úhlopříček. Ty z nich, které neprotínají u_i, využijí každé právě dva z $d_i - 1$ vrcholů. Je tedy $a_i \equiv d_i - 1 \pmod 2$, tj. a_i je liché, právě když d_i je sudé.

V případě b) se požaduje 985 úhlopříček délky 6 a 4 úhlopříčky délky 8, to je celkem 989 úhlopříček sudé délky, a proto je v tomto případě odpověď NE.

Pro případ a) je odpověď ANO. Označme vrcholy 1 994-úhelníka po řadě $X_1, X_2, \ldots X_{1994}$ a vyznačme úhlopříčky:

X_1X_3, X_2, X_5, X_4X_6 (jedna délky 3 a dvě délky 2);

X_7X_9, X_8X_{10}, $X_{11}X_{13}$, $X_{12}X_{14}$ (čtyři úhlopříčky délky 2);

$X_{9+6i}X_{12+6i}$, $X_{10+6i}X_{13+6i}$, $X_{11+6i}X_{14+6i}$, $i = 1, 2, \ldots, 330$ (990 úhlopříček délky 3).

4. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost přirozených čísel taková, že pro každé n je číslo $(a_n - 1)(a_n - 2)\dots(a_n - n^2)$ celým kladným násobkem čísla n^2-1. Potom pro každou konečnou množinu prvočísel P platí nerovnost

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{\log_p a_p} < 1.$$

Dokažte.

Řešení. Nechť $n = p$ je prvočíslo. Z čísel $a_p - 1, a_p - 2, \dots, a_p - p^2$ je právě p dělitelných číslem p. Z toho pro $p-1$ čísel je p^1 nejvyšší mocnina p, která je dělí. Právě jedno z čísel $a_p-1, a_p-2, \dots, a_p-p^2$ je dělitelné p^2, ovšem toto číslo (označme je např. a_p-i, $a_p-i > 0$) může být dělitelné i vyšší mocninou p. Nechť x je takové přirozené číslo, že $p^x|(a_p - i)$ a $p^{x+1} \nmid (a_p - i)$. Nejvyšší mocnina p, která dělí součin $(a_p - 1)(a_p - 2)\dots(a_p - p^2)$, je tedy p^{x+p-1}.

Protože podle zadání úlohy je číslo $\frac{(a_p-1)(a_p-2)\dots(a_p-p^2)}{p^{p^2-1}}$ celé a kladné, je nutně $p^2 - 1 \le x + p - 1$, a tedy $x \ge p^2 - p$. Je tedy též $a_p > a_p - i \ge p^x \ge p^{p^2-p}$. Proto pro každé prvočíslo p je $\log_p a_p > p^2 - p$.

Pro konečnou množinu prvočísel P označme k její největší prvek. Potom máme

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{\log_p a_p} < \sum_{p\in P} \frac{1}{p^2-p} \le \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i^2-i} =$$
$$= \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) = 1 - \frac{1}{k} < 1.$$

---

5. Označme A_1, B_1, C_1 paty výšek ostroúhlého trojúhelníka ABC a V jejich průsečík. Jestliže trojúhelníky AC_1V, BA_1V, CB_1V mají stejný obsah, plyne odtud, že trojúhelník ABC je rovnostranný?

Řešení. Ano. Platí totiž toto tvrzení: *Jestliže se příčky AA_1, BB_1, CC_1 protínají v bodě V a trojúhelníky AC_1V, BA_1V, CB_1V*

mají stejný obsah, je V těžiště $\triangle ABC$. A trojúhelník, jehož těžnice splývá s výškou, je zřejmě rovnoramenný. Trojúhelník ABC, jehož dvě těžnice jsou zároveň výškami, je tedy rovnostranný.

K důkazu pomocného tvrzení označme po řadě x, y, z, v obsahy trojúhelníků VBA_1, VBC_1, VCA_1 a VAB_1 (obr. 3). Platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{x}{y} = \frac{2x+v}{x+y+z},$$

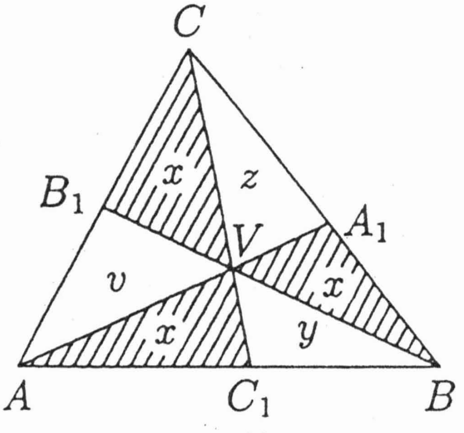
odkud po úpravě získáme rovnost

$$x(x+z) = y(x+v).$$

Podobně platí

$$x(x+v) = z(x+y) \quad \text{a} \quad x(x+y) = v(x+z).$$

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $y \geq z \geq v$. Protože $x+v \leq x+y$, z rovnosti $x(x+v) = z(x+y)$ plyne $x \geq z$, a tedy $x \geq v$. Podobně z nerovnosti $x(x+y) = v(x+z)$ plyne $x \leq v$. Je tedy $x = z = v$, a tudíž i $x = y$. V tom případě jsou ale body A_1, B_1, C_1 středy stran trojúhelníka ABC a V jeho těžiště.



obr. 3

6. Dokažte, že z každé čtveřice různých čísel ležících v intervalu $(0,1)$ lze vybrat dvě čísla $a \neq b$ tak, aby platila nerovnost

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}.$$

Řešení. Každé číslo z intervalu $(0,1)$ je tvaru $\cos\alpha$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$. Proto z každé čtveřice takových různých čísel můžeme vybrat $a = \cos\alpha$ a $b = \cos\beta$ tak, aby $0 < |\alpha - \beta| < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi$. Nerovnost $\cos(\alpha - \beta) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ můžeme přepsat do tvaru

$$ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odkud po umocnění na druhou a úpravě dostaneme

$$2ab\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - \frac{1}{4},$$

takže po dělení číslem $2ab$ dostaneme dokazovanou nerovnost.

Výsledky III. kola kategorie A 43. ročníku MO

David Pavlica	3.r Gy M.Kop.	Bílovec	17. listopadu	29
Martin Nečesal	3.r. Gy	Brno	kpt. Jaroše	28
Robert Šámal	3.r Gy	Praha 5	Zborovská	27
Petr Kaňovský	3.r Gy	Brno	kpt. Jaroše	26
Libor Mašíček	3.r Gy	Brno	kpt. Jaroše	26
Jan Mach	4.r Gy M.Kop.	Bílovec	17. listopadu	24
David Opěla	2.r Gy M.Kop.	Bílovec	17. listopadu	24
Filip Krška	3r Gy	Brno	kpt. Jaroše	23
Jan Vaněk	4.r Gy	Praha 5	Zborovská	23
Michal Fabinger	3.r Gy	Praha 6	Nad alejí	14
Michal Beneš	2.r Gy	Praha 5	Zborovská	21
Michaela Prokešová	3.r Gy	Č. Budějovice	Jírovcova	20
Jan Rychtář	3.r Gy	Strakonice	Máchova	20
František Šanda	4.r Gy J.Vrchl.	Klatovy	Nár.mučedníků	18
Jaroslav Ševčík	4.r Gy	Brno	kpt. Jaroše	18
Karel Výborný	2.r Gy	Praha 5	Zborovská	18
Igor Glücksmann	4.r Gy	Písek	Komenského	17

Stanislav Hencl	4.r Gy		Pardubice	Dašická	17
Jitka Nečasová	4.r Gy		Praha 5	Zborovská	17
Petr Vilím	2.r Gy	M.Kop.	Bílovec	17. listopadu	17
Milan Hokr	4.r Gy		Praha 5	Zborovská	16
Jan Hradil	4.r Gy		Brno	kpt. Jaroše	16
Michal Johanis	4.r Gy	J.K.Tyla	Hradec Králové	Tylovo nábřeží	15
Daniel Král	2.r Gy		Zlín	Lesní čtvrť	15
Karel Švadlenka	3.r Gy		Č.Budějovice	Jírovcova	15
Pavel Körber	4.r Gy		Praha 5	Zborovská	14
Jaromír Fiurášek	4.r Gy		Přerov	Komenského	13
Jan Foniok	2.r Gy	M.Kop.	Bílovec	17. listopadu	13
Robert Pelikán	4.r Gy		Plzeň	Mikulášské nám.	13
Ondřej Pangrác	4.r Gy		Pelhřimov	Jirsíkova	12
Norbert Vaněk	3.r Gy		Praha 5	Zborovská	12
Jan Hora	4.r Gy		Praha 5	Zborovská	11
Lenka Baráková	4.r Gy		Brno	kpt. Jaroše	10
Roman Otec	4.r Gy		Č.Budějovice	Jírovcova	10
Pavel Kundrát	3.r Gy		Praha 5	Zborovská	9
Mikuláš Piňos	4.r Gy		Brno	kpt. Jaroše	9
Jan Strejček	3.r Gy		Brno	kpt. Jaroše	9
Michal Kaut	4.r Gy	F.X.Šaldy	Liberec 11	Partyzánská	8
Jan Onderek	3.r Gy		Ostrava	dr. Šmerala	8
Alena Píšová	3.r Gy		Pardubice	Dašická	8
Martin Jaroš	3.r Gy		Benešov	Husova	7
Libor Šnobl	4.r Gy		Praha 5	Zborovská	7
Jitka Lhotská	4.r Gy		Plzeň	Mikulášské nám.	6
Jiří Vaněk	2.r Gy		Praha 5	Zborovská	6
Petr Dub	3.r SPŠE		Mohelnice	gen.Svobody	5
Václav Finěk	4.r SZeŠ		Blatná	V Jezárkách	5
Tomáš Mrkvička	4.r Gy		Strakonice	Máchova	5
Marek Vecka	4.r Gy		Domažlice	Pivovarská	5
Iveta Tomenendalová	4.r Gy		Jihlava	J.Masaryka	4
Pavel Strnad	3.r Gy	F.X.Šaldy	Liberec 11	Partyzánská	3