Brian Bolt

Bádáme v prostoru

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 2, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152793

BÁDÁME V PROSTORU

BRIAN BOLT

Život, který jsem strávil tím, že jsem byl vyučován, učil jsem a vymýšlel, jak učit matematiku, mě přesvědčil, že většině dětí se dostane jen velmi málo příležitostí, aby v nich matematika vyvolala obdiv. Učitelé na všech stupních jsou příliš soustředěni na to, aby si jejich žáci osvojili co největší zručnost a co nejvíce technik v počítání, co nejvíce symbolů, definic, algoritmů a vět. Jediným cílem, který považují za důležitý, je aby jejich žák uspěl u příštího zkoušení. Tohoto krátkodobého cíle je často dosahováno na úkor učení se s porozuměním. Je to, jako bychom stavěli domy na písku.

Být dobrým "posunovačem symbolů" ještě neznamená být dobrým matematikem. Umí-li žák správně vynásobit dvě čísla, neznamená to ještě, že porozuměl pojmu obsah, i když způsoby jejich výuky se často od sebe téměř neliší. Zná-li žák název rovnoramenný trojúhelník a pětiúhelník, neznamená to, že ví, co to je.

Již dlouhou dobu se intenzivně zabývám způsoby, jak jsou (přesněji řečeno jak nejsou) rozvíjeny prostorové schopnosti dětí. Má vlastní výuka, psaní a práce s dětmi v matematických kroužcích způsobily, že se tento problém pro mne stal prvořadým, neboť má zkušenost potvrzuje, že právě v této oblasti je výuka na všech úrovních mimořádně slabá.

Jako učitelé jsme neměli úspěch ve zdůraznění potřeby

(a) dotýkat se, modelovat a manipulovat se skutečnými předměty,
(b) používat třetí rozměr,
(c) využívat pohybu,

Dr. Brian Bolt působí na univerzitě v anglickém Exeteru. Zabývá se matematikou a její didaktikou. Je autorem řady knih přeložených do mnoha jazyků.

(d) podněcovat představivost a zvědavost žáků.

Já sám jsem se nezačal matematice věnovat proto, abych mohl vyhrávat nad svými vrstevníky ve zkouškách, ale tehdy, když jsem dostal Northropovu knihu *Riddles in Mathematics* (*Matematické hádanky*), kde jsem se poprvé setkal s Möbiovým pásem, křivkami konstantní šířky, Zenonovým paradoxem nekonečna, důkazy (nesprávnými), že $2 = 1$ nebo že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy větší než $180°$. Uvedené myšlenky mě nadchly a provokovaly mě natolik, že jsem se rozhodl věnovat svůj život hledání dalších informací o těchto okouzlujících matematických tématech a sdílet s ostatními radost, kterou mi to dává.

V tomto příspěvku se s vámi podělím o některé nápady a zkušenosti s řešením prostorových úloh, které jsem použil jako jednu z cest k probuzení zájmu dětí o to, aby lépe chápaly, a k rozvinutí jejich prostorového vnímání.

Diagnostický test!

K ilustraci svého stanoviska vám chci nejprve dát jednoduchý geometrický test.

Každý z vás nakreslete

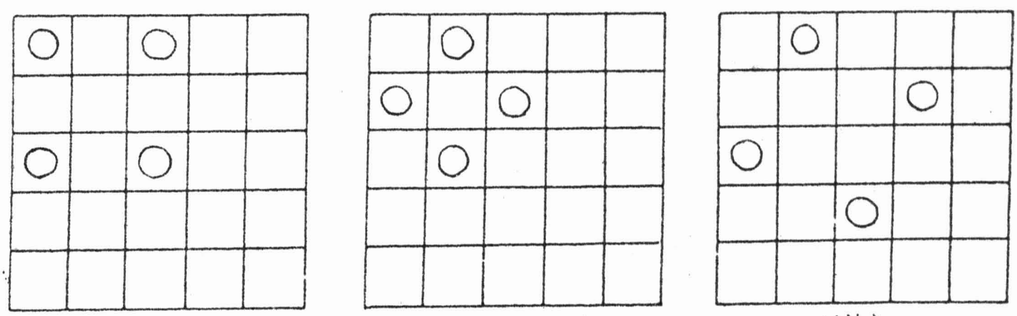
1. čtverec
2. pravoúhlý trojúhelník
3. rovnoramenný trojúhelník
4. lichoběžník
5. pětiúhelník

Zkušenost, která je podložena řešeními tisíců učitelů, je, že 95 % z vás nakreslí tvary v obvyklé orientaci, např. čtverec bude mít strany umístěné vodorovně a svisle. Téměř všichni se pokusíte nakreslit pravidelný pětiúhelník. Není proto divu, že když byla při Assessment of Performance Unit (APU) ve Velké Británii testována u tisíců školáků jejich dovednost rozpoznávat jmenované tvary tak, že je vybírali z mnoha různých tvarů nakreslených na stránce, velká část z nich dokázala rozeznat pouze ty tvary, které byly nakresleny "ve standardní poloze". Pro mnohé děti se názvy jako pětiúhelník nebo šestiúhelník vztahují pouze k pravidelným obrazcům.

Chyba není v dětech, chyba je v nás učitelích, v tom, že dětem kreslíme obrazce vždy ve standardní poloze.

Čtverce na šachovnici 5 × 5

K zjišťování úrovně matematického myšlení našich žáků a současně k zlepšování jejich prostorové představivosti můžeme využít úlohu, při jejímž řešení žáci zjišťují, kolika způsoby můžeme položit na šachovnici 5 × 5 čtyři žetony tak, aby tvořily vrcholy čtverce.



(i) (ii) (iii)

Většina dětí bude schopna najít čtverec typu ukázaného na obr. (i), ačkoli způsoby, kterými je budou počítat, budou různorodé v závislosti na prostorových schopnostech. S radostí můžeme pozorovat uspokojení na tvářích těch vnímavějších, když objeví zákonitost čtvercových čísel

$$1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Objev, že takových čtverců je 30, jim dává pocit radosti, i když si ani neuvědomují, že jejich počet závisí na tom, jaký je základ číselné soustavy, v níž počítají. Pro mnohé je úloha vyřešena a jiné čtverce už nevidí. S vhodnou nápovědou však mnozí objeví "kosočtverce" na obrázku (ii) (pokud se nám podaří přesvědčit je, že to jsou také čtverce). Takových čtverců je deset (devět jako na obr. (ii) a jeden větší). Pro žáky a dokonce i pro mnohé zkušené učitele matematiky je překvapující, že se dá najít ještě dalších 10 možných čtverců, které jsou pootočeny pod jiným úhlem. Osm z nich je možno odvodit z pohybu koně při hře v šachy tak, jak ukazuje obr. (iii), a dva tak, že žetony umístíme do políček sousedících s rohovými.

Velmi málo dětí a učitelů nalezne všech 50 čtverců, ale při jejich hledání mnoho získávají.

Je řada způsobů, jak navázat na tuto činnost, abychom upevnili pojem čtverec, např.:

(a) určit největší počet žetonů, které můžeme na šachovnici umístit tak, aby žádné čtyři z nich netvořily čtverec;

(b) hrát hru pro dva hráče s těmito pravidly: Hráči střídavě přidávají na šachovnici po jednom žetonu tak dlouho, až některý z nich vytvoří čtverec; tento hráč prohrává;

(c) řešit obdobné úlohy na šachovnici typu $6 \times 6, 7 \times 7, \ldots, n \times n$;

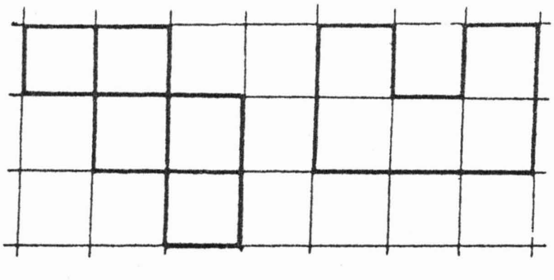
(d) použít jiné tvary "šachovnice".

Podstatou řešení úlohy není vyslovení matematické věty, ale zlepšení prostorového vnímání dítěte spolu s rozvojem jeho strategií pro řešení problémů. A také, což je nejdůležitější, opravdové potěšení dítěte, když poprvé uvidí všechny takové čtverce. Při této činnosti se děti budou stále ptát

"Co se stane, když ....?"

Mnohostranné hrací kameny (polyominoes)

Další typ úloh, které nabízejí řadu možností, jsou úlohy s různými útvary, které mohou být složeny ze čtvercových destiček. Zpočátku je možné omezit počet tvarů tím, že destičky budeme umisťovat na vhodnou čtverečkovanou podložku. Výhodou je přitom, že žáci mají možnost najít všechny tvary, které přicházejí v úvahu.



Začneme-li s pěti kostkami, můžeme najít 12 různých tvarů známých jako pentamina. Dvě z nich jsou nakreslena na obrázku.

Získané tvary můžeme různými způsoby třídit, např. když sledujeme

(i) jejich obvod,
(ii) jejich souměrnosti,
(iii) zda tvoří síť otevřené krabičky.

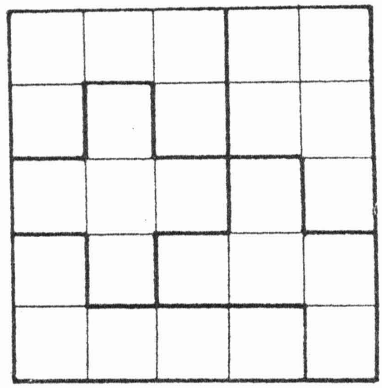
Pro žáky je nalezení všech tvarů provokující a uspokojuje je. Zjištění, že ne všechny mají stejný obvod a že pro krabičku je možno najít různé sítě, je pro mnohé senzací.

Práci se šesti kostkami (hexaminy) je nejlépe organizovat v menších skupinách žáků pracujících společně, protože různých hexamin existuje 35. Přitom už samotná společná práce žáků ve skupinách je pro ně odměnou a zkušeností, kterou je třeba podporovat. Nalezení 11 tvarů, které tvoří síť krychle, je náročný úkol; mnozí si budou potřebovat tvary vystřihovat a experimentovat s nimi, než dojdou ke konečnému řešení.

Třídění tvarů podle obvodu je dobrým cvičením, které pomáhá překonat hluboké přesvědčení žáků, že z rovnosti obvodů plyne i rovnost obsahů a naopak. Zajímavou obměnou je úkol nalézt všechny možné tvary, které vzniknou složením čtvercových destiček a jejichž obvod je 12 jednotek.

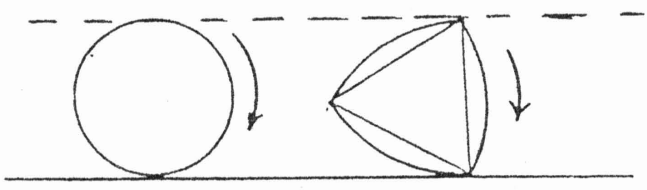
Na skládání mnohostranných hracích kamenů (jako stavebnice) může být založeno mnoho dalších činností. Zvlášť podněcující je např. úkol složit 12 pentamin tak, aby tvořila obdélník. Jsou známy stovky řešení, ale buďme spokojeni, když žáci naleznou aspoň jedno! Snáze řešitelný je úkol pokrýt čtverec o velikosti

5 × 5 různými pentaminy. Jedno z možných řešení je na obrázku.



Křivky konstantní šířky

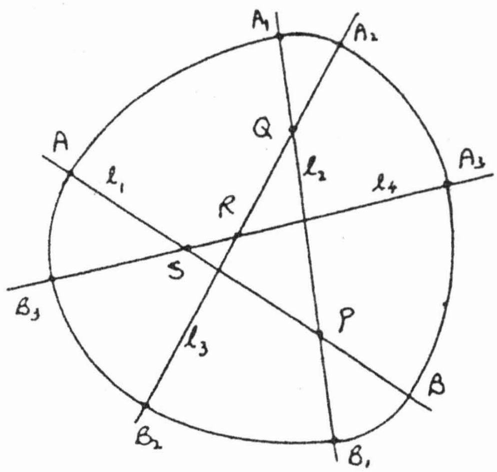
Kdo by nebyl okouzlen křivkami konstantní šířky? Než se s nimi člověk setká, nezdá se mu možné, že by jiný tvar než kružnice měl tu vlastnost, že při odvalování se po přímce má jeho nejvyšší bod od této přímky stále stejnou vzdálenost. Přitom takových křivek existuje nekonečně mnoho! Nejjednodušší z nich je nakreslena na obrázku a vychází z rovnostranného trojúhelníku. Skládá se ze tří oblouků kružnic se stejným poloměrem a se středy ve vrcholech trojúhelníku.



Chcete-li se o tom přesvědčit, můžete si vystřihnout tvar a umístit ho mezi dvě rovnoběžně položená pravítka tak, že po jednom se tvar odvaluje a druhého se dotýká. Ještě překvapivější výsledky získáme, umístíme-li tento tvar do čtverce odpovídající velikosti, bude se při otáčení stále dotýkat všech čtyř stran čtverce – vlastnost, která byla použita např. při navrhování vrtáků pro čtvercové otvory.

Podobné tvary mohou být vytvořeny pomocí všech pravidelných mnohoúhelníků s lichým počtem stran. Mají je mimo jiné i dvě britské mince, které mohou být použity v každém automatu na mince, i když nejsou "kulaté".

Člověka až jímá závrať z toho, že tvary mohou mít konstantní šířku a přitom nemusí být symetrické. Takový tvar je ukázán na obrázku:



Abyste ho vytvořili, nakreslete si několik různoběžných přímek; na obrázku jsme použili čtyři přímky l_1, l_2, l_3, l_4. Na přímce l_1 zvolte libovolně bod A a otočte ho do bodu A_1 na přímce l_1 kolem průsečíku P přímek l_1 a l_2. Pak A_1 otočte do bodu A_2 na přímce l_3 kolem průsečíku Q přímek l_2 a l_3, A_2 otočte do bodu A_3 na přímce l_4 kolem průsečíku R přímek l_3 a l_4, A_3 otočte do bodu B na přímce l_1 kolem průsečíku S přímek l_4 a l_1 atd. až nakonec bod B_3 otočíte do bodu A kolem bodu S. Abychom se přesvědčili, že všechny průměry (tětivy procházející jedním ze středů otáčení P, Q, R, S) mají stejnou délku, uvažujme otočení úsečky AB kolem bodu P do úsečky A_1B_1, A_1B_1 kolem Q do A_2B_2, A_2B_2 kolem R do A_3B_3, A_3B_3 kolem S do AB. Je-li délka úsečky AB rovna D, pak obrazec má konstantní šířku D a, což je zvlášť vzrušující, obvod πD, tedy stejný jako je délka kružnice se stejným průměrem.

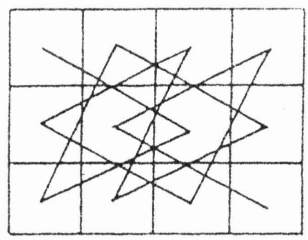
Udělejte si sami několik takových tvarů a experimentujte s nimi.

Jízda koněm

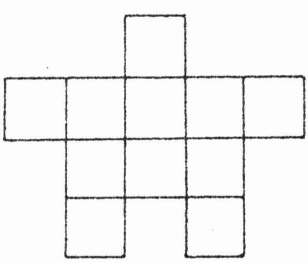
Tradiční úloha najít na šachovnici možné dráhy koně, při nichž se dostane na každé pole právě jednou, poutala zájem matematiků po mnoho století. Pro práci s dětmi jsem použil menší čtvercové šachovnice a šachovnice jiných tvarů včetně stylizovaných obrázků člověka nebo psa. Ty se ukázaly být pro děti velmi podnětné. Přesvědčil jsem se, že je to vynikající úloha, která podněcuje rozvoj matematického myšlení u lidí různého věku i schopností.

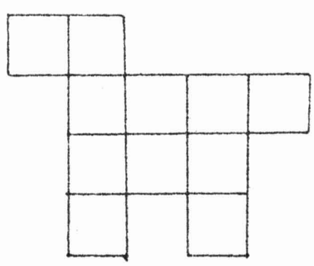
Zajímavým problémem je nalezení nejmenšího obdélníku, na kterém taková dráha koně existuje. Je to obdélník 4 × 3 a řešení je zaznamenáno dvěma způsoby na obrázcích; jsou na nich vidět i zákonitosti, které jsou krásné samy o sobě:

1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12



Použijeme-li pohyb nebo umísťování šachových figurek na šachovnici, nalezneme mnoho dalších geometrických hádanek a experimentů. Na následujících obrázcích člověka a jeho psa zkuste sami na závěr řešit stejnou úlohu.





Závěry

Na závěr bych vás všechny chtěl vyzvat k hledání tvořivých způsobů, jak pomoci vašim žákům naučit se žít s prostorem a nebát se experimentovat. Učit se o prostoru znamená zabývat se prostorovými pojmy a k tomu dojde, jestliže žáky postavíme do situací, kde si musí klást otázky

Co by se stalo, kdyby ....?

Navíc jsme zodpovědni za to, že budeme rozvíjet představivost dětí a ukážeme jim, že to všechno může pro ně být radostí a vzrušením.

⋆ ⋆ ⋆

Literatura

Mathematical Activities (1982)
More Mathematical Activities (1985)
Even More Mathematical Activities (1987)
101 Mathematical Projects (1989)
The Amazing Mathematical Amusement Arcade
The Mathematical Funfair (1989)
Mathematical Cavalcade (1992)
A Mathematical Pandora's Box (1993)
Mathematics and Technology (1991)

Z anglických originálů vybrala a přeložila

JARMILA NOVOTNÁ
PedF UK Praha

Poznámka překladatelky

Všechny uvedené myšlenky a stovky dalších autor podrobně uvedl ve svých knihách, které vydalo nakladatelství Cambridge University Press v mnoha vydáních. U každé knihy uvádíme rok prvního vydání.

Měla jsem možnost některé z těchto knih zběžně prolistovat a myslím, že by jejich překlad do češtiny přivítalo nejen mnoho učitelů, ale že by o knihy byl zájem mezi širokou veřejností. Najde se u nás nakladatelství, které by vydání překladu zajistilo?