Učitel matematiky

Emil Calda

Pražský seminář pro učitele matematiky

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 2, 36–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152802

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1995

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

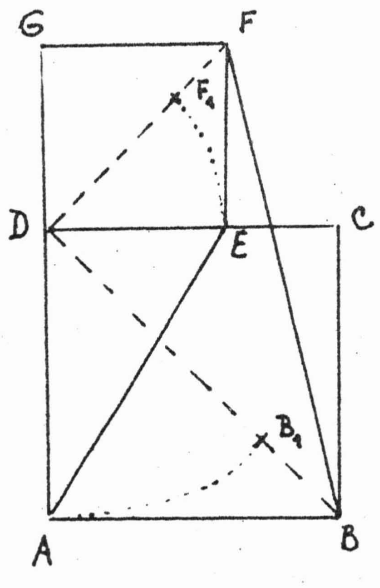
PRAŽSKÝ SEMINÁŘ PRO UČITELE MATEMATIKY

EMIL CALDA

Nepochválíte-li se sami,
nikdo to za vás neudělá!

Ve spolupráci s pražským pedagogickým centrem probíhá na MFF UK pravidelně po řadu let seminář pro učitele matematiky, který je věnován řešení úloh a problémů z elementární matematiky. Jedná se o úlohy netradiční, které se v běžných učebnicích a sbírkách nevyskytují a které svými matematickými požadavky nepřekračují rámec střední školy, takže je lze použít ve vyučovací hodině „normální" třídy. Uvádím na ukázku několik příkladů, které jsme na semináři řešili v loňském roce; jejich řešení jsou zde pouze stručně naznačena.

1. Na obr. 1 jsou dány čtverce $ABCD$ a $DEFG$. Určete, jak závisí odchylka přímek AE, FB a poměr $\frac{|AE|}{|FB|}$ na poloze bodu E, probíhá-li tento bod úsečku DC.

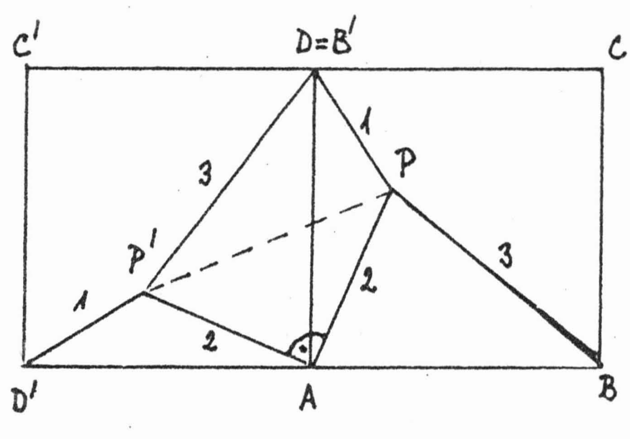


Obr. 1

Úlohu lze snadno vyřešit analyticky, ukážeme si však způsob elegantnější. Stejnolehlost $H\left(D, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ převádí bod F v bod F_1 a bod B v bod B_1; otočení $R(D, -45°)$ převádí bod F_1 v bod E a bod B_1 v bod A. Složením těchto zobrazení přejde tedy bod F v bod E a bod B v bod A, což znamená, že úsečka AE je obrazem úsečky BF. Odtud plyne, že odchylka přímek AE, FB je 45° a $\frac{|AE|}{|FB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a že tedy nezávisí na poloze bodu E uvnitř úsečky DC; tato odchylka i poměr však zůstávají zachovány i v případě, že bod E splyne s bodem C resp. s bodem D, jak se lze snadno přesvědčit.

2. Určete obsah čtverce $ABCD$ za předpokladu, že v jeho vnitřku existuje bod P takový, že $|PA| = 2$, $|PB| = 3$, $|PD| = 1$.

Dovedeme-li studenty k tomu, aby sestrojili obraz $AB'C'D'$ čtverce $ABCD$ v otočení se středem v bodě A o 90°, je další postup poměrně jednoduchý (viz obr. 2). Trojúhelník APP' (bod



Obr. 2

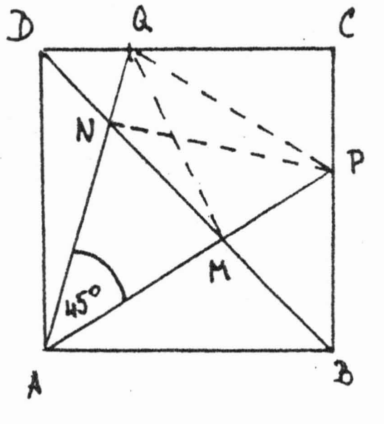
P' je obrazem bodu P v uvedeném otočení) je pravoúhlý a rovnoramenný, takže je $|\measuredangle P'PA| = 45°$, $|PP'| = \sqrt{8}$; o stranách trojúhelníku $P'PD$ zjistíme, že je $|P'D|^2 = |PP'|^2 + |PD|^2$, což znamená, že je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu P. Úhel PDA má tedy velikost 135° a pro velikost x strany daného čtverce je z kosinové věty

$$x^2 = 5 - 4\cos 135^\circ = 5 + 2\sqrt{2}.$$

Tím je obsah daného čtverce určen.

3. Je dán čtverec $ABCD$ a body P, Q ležící pořadě uvnitř stran BC, CD tak, že úhel PAQ je 45°. Jsou-li M, N průsečíky úhlopříčky BD pořadě s přímkami AP, QA, dokažte, že body C, Q, N, M, P leží na kružnici.

Všimněme si nejprve (viz obr. 3), že úsečka NP je z bodu A i z bodu B vidět pod týmž úhlem - body A, B, N, P tedy leží na kružnici. Její průměr je úsečka AP, takže úhel ANP je pravý.



Obr. 3

Odtud plyne, že úsečka PQ je z bodu N vidět pod zorným úhlem 90°. Ukážeme nyní, že tato úsečka je vidět pod zorným úhlem 90° i z bodu M. Protože úsečka QM je z bodů A, D vidět pod týmž zorným úhlem, leží body A, D, Q, M na kružnici. Její průměr je AQ, což znamená, že úhel AMQ je pravý. Odtud plyne, že úsečka PQ je z bodu M vidět pod úhlem 90°. Protože je však pod úhlem 90° vidět i z bodů C, N, dostáváme, že body P, Q, C, N, M leží na kružnici.

4. Dokažte, že body $A[a,b,c]$, $B[a,c,b]$, $C[b,a,c]$, $D[b,c,a]$, $E[c,a,b]$, $F[c,b,a]$ pro libovolné hodnoty svých souřadnic leží v rovině.

Stačí si uvědomit, že hledanou rovinou je rovina

$$x + y + z - (a + b + c) = 0.$$

5. Určete součet
$$S = \sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + 1°) + \sin^2(\alpha + 2°) + \dots + \sin^2(\alpha + 179°),$$
kde α je libovolný úhel.

Jednoduchými úpravami dostáváme:
$$S = [\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + 90°)] + [\sin^2(\alpha + 1°) + \sin^2(\alpha + 91°)] + \dots$$
$$+ [\sin^2(\alpha + 89°) + \sin^2(\alpha + 179°)] = [\sin^2\alpha + \cos^2\alpha] +$$
$$+ [\sin^2(\alpha + 1°) + \cos^2(\alpha + 1°) + \dots + [\sin^2(\alpha + 89°) +$$
$$+ \cos^2(\alpha + 89°)] = 90.$$

6. V šachovnici 7×7 je odstřiženo pravé horní políčko. Dokažte, že zbývajících 48 políček nelze pokrýt čtyřiadvaceti obdélníčky 2×1 tak, aby jich bylo 12 vodorovných a 12 svislých.

Zapišme do každého ze 48 políček číslo 0 nebo 1 podle obr. 4.

0	1	0	1	0	1	
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0

Obr. 4

a předpokládejme, že šachovnice je pokryta dvanácti svislými a dvanácti vodorovnými obdélníčky 2 × 1. Z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Je jasné, že součet čísel pod všemi vodorovnými obdélníčky je roven dvanácti; součet čísel pod všemi svislými je však také číslo sudé, neboť pod každým svislým obdélníčkem je součet jím zakrytých čísel buď 0 nebo 2. Součet čísel ležících pod všemi 24 obdélníčky, tj. součet čísel na všech políčkách, je tedy číslo sudé. To je však ve sporu s tím, že tento součet je číslo liché, a to 21.

Závěrem ještě stručná informace: seminář se uskuteční i ve školním roce 1994-95; koná se jednou měsíčně, vždy ve čtvrtek odpoledne v budově MFF UK, Praha 8, Sokolovská 83 (stanice metra Křižíkova). Vítáni jsou i zájemci mimopražští.