Jiří Veselý

π aneb 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 4, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152834

π
aneb
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 79 ...

(Dokončení z minulého čísla)

JIŘÍ VESELÝ

Iracionalita a transcendence.

Zmiňme se krátce ještě o dalších významných výsledcích. „Lovci míst" záhy ztratili naději na periodicitu desetinného vyjádření π a tedy na to, že číslo π je racionální. To ještě žáci na střední škole lehce pochopí; proto je poučné jim nezatajit, jak (relativně) pozdě k tomu došlo: dokázal to teprve r. 1767 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 - 1777). Dodnes trvající „závody" v získání největšího počtu míst slouží více k prokazování síly a spolehlivosti počítačů než pro výzkum užitečný z teoreticko-číselného hlediska.

Situace je však ještě složitější: číslo $\sqrt{2}$ není číslo racionální (to se dá relativně snadno dokázat i na střední škole; bývá to jeden z prvních nepřímých důkazů, se kterým se žáci setkávají). Avšak i s takovými čísly se žáci musí alespoň orientačně seznámit, neboť musí řešit takové jednoduché rovnice jako např. $x^2 = 2$. Mohou se však vcelku přirozeně domnívat, že π je také kořenem nějaké složitější algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty (tj. rovnice $P(x) = 0$, kde P je polynom s celočíselnými koeficienty alespoň prvního stupně). Takovým číslům říkáme *algebraická*. Existují však reálná čísla, která nejsou kořenem žádné algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty: říká se jim *transcendentní* čísla. Jejich existenci dokázal až r. 1840 JOSEPH LIOUVILLE (1809 - 1882) a právě v roce jeho úmrtí dokázal FERDINAND LINDEMANN (1852 – 1939) transcendenci π; tak byl definitivně vyřešen pro-

---

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), absolvent MFF UK, pracuje v Oddělení historie matematiky MÚ UK. Článek je rozšířeným textem jedné z přednášek na semináři z historie matematiky na MFF UK (autor děkuje kolegům ze semináře za cenné připomínky).

blém *kvadratury kruhu*: úsečku o délce π nelze sestrojit pravítkem a kružítkem.

Pro pobavení uvádím ještě tuto poznámku: přestože to není možné, stále se někteří lidé snaží *konstrukci* pro kvadraturu kruhu (nebo rektifikaci kružnice) objevit. Pominu-li vousaté vtipy o správné (racionální) „socialistické hodnotě π“, se kterou se prý někteří „kvadraturníci“ snažili v minulosti prorazit prostřednictvím ÚV KSČ, není bez zajímavosti, že podobně orientované vládní prohlášení prošlo málem senátem USA v roce 1897 (!). Rozhodnutí bylo však v poslední chvíli odloženo na neurčito; tento stav patrně trvá (viz [Be], str. 177).

Souvislost s elementární geometrií. Na začátku jsme se okrajově zmínili o retrifikaci kružnice a kvadratuře kruhu. Transcendence π však neznehodnotila úsilí mnoha generací badatelů, kteří objevili řadu konstrukcí vedoucích k *přibližné* rektifikaci kružnice. Tyto konstrukce můžeme na střední škole velmi dobře využít: je hezkým cvičením popsané konstrukce pochopit a realizovat, případně pak určit i jejich přesnost. Tak např. délku kružnice aproximuje úsečka sestrojená jako součet tří průměrů této kružnice zvětšený o pětinu strany do kružnice vepsaného čtverce. Pro úvodní příklad k této látce lze využít problém, zda lze některý předcházející poznatek z historie geometricky znázornit a navést žáky např. k úvaze o konstruovatelnosti čísla $\sqrt{10}$, které bylo v Indii užíváno k aproximaci π. Pak již snadno navážeme výkladem o problému rektifikace kružnice.

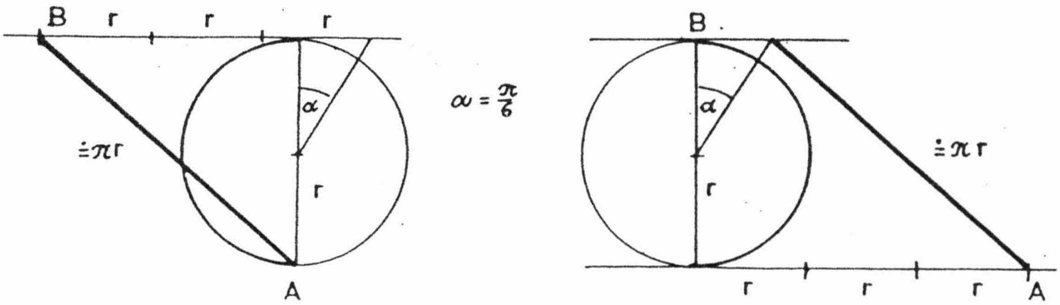
Na Obr. 4 je znázorněna zajímavá konstrukce, kterou nalezl r. 1685 polský jezuita A. A. KOCHAŃSKI (1631 – 1700); viz [Ev], str. 95; tam jsou též popsány *asymptotické eukleidovské konstrukce*, které umožňují dosažení libovolné přesnosti iterováním (též pro jiné klasické antické problémy). Snadno nalezneme (např. při procvičování Pythagorovy věty) i relativně překvapivou přesnost Kochańského konstrukce (srovnej s [Be], nebo [Ur], str. 16); pohledem na obrázek verifikujeme lehce následující výpočet

$$\pi r \sim \left(\left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4r^2\right)^{1/2} = \left(\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}\right)^{1/2} \doteq 3,\ 141533r$$

což dává pro chybu rektifikace provedené touto konstrukcí horní odhad hodnotou $0,00012r$ a $\pi \sim 3,\ 141533\ldots$. To je s ohledem na *jednoduchost* této relativně populární konstrukce opravdu pěkný výsledek.

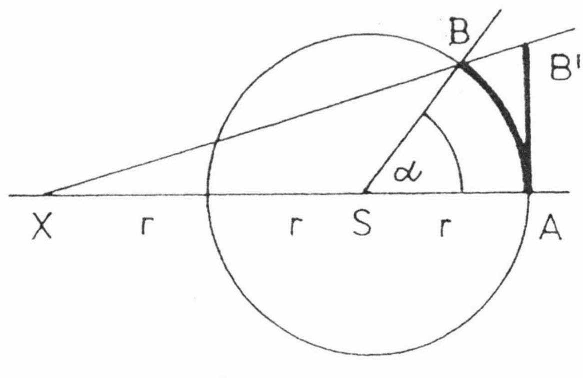
Zmiňme v této souvislosti ještě jeden starý výsledek. Kardinál německého původu NICOLAS CUSANUS (1401 – 1464), který pracoval od r. 1448 až do smrti v Římě, se relativně nepříliš úspěšně zabýval číslem π. Nalezl však přibližnou formulku pro délku oblouku jednotkové kružnice příslušného středovému úhlu α:

$$\mathrm{oblouk}(\alpha) \doteq \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$$



Obr. 4.

Je-li tento úhel menší než $\pi/6$, dává uvedený vzorec překvapivě dobré výsledky. Patrně nezávisle dospěl k podobné *konstrukci* nejprve WILLEBRORD SNELL (asi 1581 – 1626) a pak též CHRISTIAN HUYGENS (1629 – 1693). V [Be], str. 86 je ukázáno, že oba výsledky jsou ekvivalentní. Na Obr. 5 je $AB' \doteq AB$, konstrukce je dobře patrná z obrázku a není ji třeba podrobněji popisovat. Tuto konstrukci u nás patrně zavedl český matematik JAN SOBOTKA (1862 – 1931), neboť bývá v české literatuře spojována s jeho jménem (srovnej [Ur], str. 16).



Obr. 5.

Jsou samozřejmě známy i další „rektifikační postupy", které lze použít při vyučování jako ukázky; např. konstrukce, jejímž autorem je JAKOB DE GELDER, pochází z r. 1849 a je založena na vztahu $\pi \doteq 355/113$.

Souvislost s kalkulem. Chceme-li přejít od geometrické definice čísla π k analytické formě, je nasnadě užít integrálního vyjádření. Uvažujeme-li jednotkovou kružnici o rovnici $x^2+y^2=1$, pak délka jejího „horního oblouku" je dána (píšeme $y(x)=\sqrt{1-x^2}$) formulkou

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\,,$$

zatímco plocha „horního polokruhu" se spočte vyčíslením integrálu

$$\int_{-1}^{1}y(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\,.$$

Při procvičování základů kalkulu je možné dát žákům na rozmyšlenou, jak se odtud dostane fakt známý již Archimedovi, totiž výše zmíněná rovnost $\pi_1=\pi_2$. Stačí však vyjádření plochy půlkruhu a délky polokružnice elementárními prostředky vhodně upravit a snadno dostaneme rovnost „obou π" (pozor však na fakt, že nevystačíme jen s Riemannovým integrálem a musíme si pomoci limitním přechodem, v prvním případě již není integrovaná funkce omezená). Tudy také vede cesta k definici π na vyšší úrovni.

V dnešní době známe relativně mnoho vyjádření čísla π; ne všechna jsou však vhodná k výpočtům. Uveďme např. formulku, pocházející od JOHNA WALLISE (1616 – 1703)

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}.$$

(všimněte si, že ve formuli se nevyskytují „iracionality“ jako ve vyjádření, které nalezl Vièta).

WILLIAM BROUNCKER (asi 1620 - 1684) z tohoto Wallisova výsledku odvodil vyjádření π řetězovým zlomkem

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}$$

(odtud dostáváme postupně při zanedbávání členů symbolicky vyznačených tečkami aproximace pravé strany zlomky 1, 3/2, 15/13, 105/76, ..., což vede k $\pi \sim 4$, resp. $8/3 = 2,\overline{6}$, $52/15 = 3,4\overline{6}$, $304/105 \doteq 2,895238, \ldots$). Jak vidíme, liché členy takto nalezené posloupnosti klesají a sudé rostou, avšak bylo by třeba veliké trpělivosti, abychom dostali dobrou aproximaci π. Nevíme zcela přesně, jak Brouncker k tomuto vyjádření dospěl, ale opět to není pro člověka obeznámeného s kalkulem obtížné. Krátké vysvětlení je patrně na místě, protože řetězové zlomky patří k nástrojům v běžné matematice již relativně zapomenutým: je-li

$$S = a_0 + a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4 + \cdots,$$

pak pro $P_k = 1 + a_ka_{k+1} + a_ka_{k+1}a_{k+2} + a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3} \cdots$ platí

$$S - a_0 = a_1P_2 = a_1(1 + a_2P_3) = a_1(1 + a_2(1 + a_3P_4)) = \cdots,$$

odkud snadno postupně dostaneme

$$S - a_0 = a_1P_2 = a_1\left(\frac{1}{1 + a_2P_3}\right)^{-1} = a_1\left(1 - \frac{a_2P_3}{1 + a_2P_3}\right)^{-1}$$

Ve jmenovateli složeného zlomku stojí zlomek, který snadno upravíme v obecnějším tvaru: pro každé $k \geq 2$ platí

$$\frac{a_k P_{k+1}}{1 + a_k P_{k+1}} = a_k \left(\frac{1 + a_k P_{k+1}}{1 + a_{k+1} P_{k+2}} \right)^{-1} =$$
$$= a_k \left(1 + a_k + \frac{a_{k+1} P_{k+2}}{1 + a_{k+1} P_{k+2}} \right)^{-1},$$

z čehož již lehce plyne vzoreček

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cdots}}}$$

Platnost Brounckerova vzorečku dokázal až Euler r. 1775, ale po předchozí přípravě (konvergencí se nezabýváme, ta se dá dokázat poměrně snadno) lze k němu dospět např. takto. Vyjděme ze vztahu

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Tato řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $-1 \leq x \leq 1$. Aplikujme předchozí úvahu pro případ $a_0 = 0$, $a_1 = x$, $a_2 = -(x^2/3)$, tj. $a_1 a_2 = -(x^3/3)$, $a_3 = -(3x^2/5), \ldots$; dostaneme tak

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \cdots}}}}$$

což pro $x = 1$ dává výše uvedené vyjádření pro $(4/\pi)$.

S číslem π a funkcí arctg je svázána velmi populární Leibnizova (někteří uvádějí Newton-Leibniz-Gregoryho) řada, která byla historicky prvním vyjádřením π pomocí *řady*; stačí do uvedeného rozvoje pro arctg dosadit opět $x = 1$ a obdržíme

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right).$$

James Gregory objevil vyjádření arctg výše uvedenou řadou v r. 1671, zatímco GOTTFRIED W. LEIBNIZ (1646 – 1716) k ní dospěl v roce 1674 (publikováno 1682). Vzpomenete-li si na Leibnizovo kritérium konvergence pro řady se střídavými znaménky, chování výše uvedeného řetězového zlomku vás jistě nepřekvapí. Řada (a také i řetězový zlomek) nám tedy při praktickém výpočtu čísla π přímo nepomůže, neboť částečné součty se k hodnotě π přibližují jen velice pomalu (po sečtení n členů je chyba odhadnuta číslem $4/(2n-1)$).

Připomeňme ještě možnost definovat π analyticky pomocí funkce arctg vztahem

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

V dnešní době se jí zpravidla neužívá (znal ji však jistě např. CARL WEIERSTRASS v r. 1841); dnes se π zpravidla definuje jako nejmenší kladný nulový bod funkce cos. Na druhé straně při zkoumání možností praktického výpočtu hodnoty π je užitečné jako jednu z vhodných uvážit formulku

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

která při použití elementárních (a velmi starých) numerických metod výpočtu integrálu dává poměrně lehce vcelku dosti přesné výsledky.

V Japonsku TAKABE v roce 1722 dospěl mj. i k vyjádření π řetězovými zlomky a také k formuli

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} \sum_0^n \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Použil patrně horních Riemannových součtů k aproximaci plochy čtvrtkruhu (zkuste si nakreslit obrázek). I když tento vztah dává samozřejmě možnost výpočtu π s libovolnou přesností, trpí podobnými nedostatky jako Viètovo vyjádření (výpočet odmocniny apod.).

Leibnizova řada se pro praktický výpočet π nehodí. Existují však rychleji konvergující řady, jejichž používání bylo doménou „lovců desetinných míst". Zmiňme zde pro zajímavost přínos ISAACA NEWTONA (1643 – 1727) (používáme opět soudobé symboliky). Platí

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \,,$$

z čehož použitím binomického rozvoje dostáváme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \Big(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots\Big)dx \,.$$

Integrujeme-li člen po členu, dostaneme mocninnou řadu

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots \,.$$

Newton tuto formuli odvodil a pak do ní dosadil $x = 1/2$, takže odtud s ohledem na $\arcsin(1/2) = \pi/6$ dostal

$$\pi = 6\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \cdots\Big) \,.$$

Toto se uvádí v mnoha knihách o historii matematiky. Ve skutečnosti (srovnej [Be]) však Newton užíval trochu odlišnou řadu

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\cdot\Big(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\Big) \,;$$

součet jejích prvních 22 členů dá π s přesností na 15 desetinných míst. Dospěl k ní tak, že pro kružnici o poloměru $r = 1/2$ a středu $[1/2, 0]$ vypočetl dvojím způsobem obsah „čtvrtkruhu" vyjádřený integrálem

$$P = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,dx = \int_0^{1/4} \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx \,.$$

K výpočtu použil opět binomického rozvoje funkce $(1-x)^{1/2}$ a zároveň tutéž plochu P vyjádřil jako obsah kruhové výseče zmenšený o obsah pravoúhlého trojúhelníka (načrtněte si obrázek!): $P = \pi/24 - \sqrt{3}/32$.

Později se „lovci míst" vrátili opět k Leibnizově řadě pro arctg a zrychlovali různými triky její konvergenci. Tak např. ABRAHAM SHARP (1651 – 1742) do řady dosadil $x = \sqrt{(1/3)}$, čímž dostal

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots\right)$$

a pomocí této řady spočítal hodnotu π na 72 desetinných míst. Dalších pronikavých zlepšení dosáhl JOHN MACHIN (1680 – 1752). Pomocí jistého triku zrychlil konvergenci natolik, že (již v r. 1706) vypočetl π na 100 desetinných míst. Trik v závěrečné fázi vede k formulce

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} .$$

Více se lze o této metodě dočíst např. v [Ja].

Velmi populární je řada

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots ,$$

která má velmi zajímavou historii. Leibniz se s ní ještě nedokázal vypořádat a teprve JACOB BERNOULLI (1654 – 1705) v podstatě dokázal její konvergenci. Se stanovením jejího součtu uspěl až Euler v roce 1736. Eulerovu manipulaci s řadami si opět přiblížíme, neboť je poučná. Ze vztahu

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\right) = 0$$

Euler dostal po dělení x a substituci $x^2 = y$ „rovnici nekonečného stupně"

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \cdots = 0 .$$

Nulové body $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ funkce sin dávají informaci o kořenech této rovnice. Jsou to čísla $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$. Naznačíme podrobněji způsob Eulerova dalšího uvažování: tak např. pro rovnici druhého stupně $(x-a)(x-b)=0$ s kořeny a, b dostaneme úpravou (předpokládáme $a, b \neq 0$)

$$(1/ab)x^2 - (1/a + 1/b)x + 1 = 0 \; .$$

Vidíme, že když je absolutní člen v rovnici roven 1, je koeficient při x roven opačně vzatému součtu převrácených hodnot kořenů rovnice. Z tohoto vztahu, který platí v obdobné podobě i pro koeficienty a kořeny rovnic vyšších stupňů (stupeň je však stále *konečný*!), dostaneme na základě analogie (nemající žádné opodstatnění!) pro rovnici „nekonečného stupně v y"

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right),$$

a odtud násobením π^2 po úpravě

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \; .$$

Protože podobné vztahy platí i pro koeficienty u vyšších mocnin, měl Euler možnost pokračovat dále a odvodit postupně

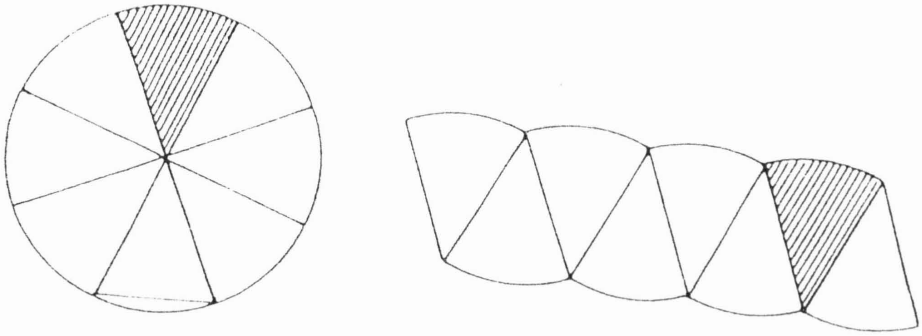
$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\,, \quad \frac{\pi^6}{945} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}\,, \quad \frac{\pi^8}{9450} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8}\,, \ldots\,;$$

tak pokračoval až k řadě 26-tých mocnin převrácených hodnot přirozených čísel (mimochodem, v té době byl už na jedno oko slepý).

O čísle π existuje celá řada historických prací; pokusil jsem se jen o jistý výběr materiálu, vyčerpávající výklad by byl příliš obsáhlý a není účelem tohoto článku.

Co však lze říci k problému zavedení π na střední škole? Odpověď není jednoduchá, nicméně základní devizou by mělo být nezatajování obtížnosti tohoto problému a učiněných zjednodušení.

Pro vztah mezi obsahem a obvodem kruhu je důležitý následující instruktivní Obr. 6.:



Obr. 6.

Ten snadno žákům přiblíží na jejich myšlenkové úrovni souvislost obvodu a obsahu kruhu („křivočarý obdélník" má jednu stranu přibližně rovnu poloměru uvažovaného děleného kruhu, druhá se přibližuje úsečce o stejné délce, jakou má jeho hraniční kružnice). Pro definici samotného π na střední škole pomocí použití délky jednotkové kružnice a ne obsahu jednotkového kruhu mluví vztah k obloukové míře, což je však zhusta pro žáky obtížná záležitost. Úvahy o ploše mohou být pro žáky přitažlivější a názornější. Cesta k délce křivky je sice názorná, avšak cesta k obsahu je přímočařejší a má svůj silný motivační náboj jako základ pro budování integrálu. Máme totiž možnost při ní mnohokrát připomenout využívání invariance, monotonie a aditivity obsahu (nepřekrývajících se) obrazců. Vybrané ukázky by měly posloužit mj. jako motiv k zamyšlení: povídání o rektifikaci může např. posloužit jako můstek pro spojování aritmetiky a geometrie stejně jako jednoduché seznámení s pojmem přiblížení nebo chyby. S infinitesimálními úvahami je to trochu složitější, na ně patrně nezbude ve většině případů čas. I když však uvedeme jen na okraj příklady jiných řad nežli geometrické, máme možnost si vybrat takové, které s π souvisejí.

Pro budoucí kontakt s učivem na vysoké škole je důležitý vztah ke goniometrickým funkcím, speciálně dobrá představa o jejich nulových bodech (zpravidla se dospěje k π jako k nejmenšímu kladnému nulovému bodu funkce cos). Proto je dobré se při probírání učiva na gymnáziu pokusit se ve vyspělejších třídách s obloukovou mírou brzo vyrovnat. Vhodné je i akcentovat použití vztahů

$$\cos(x - y) = \cos x \, \cos y + \sin x \, \sin y \; ,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \, \cos y - \cos x \, \sin y$$

k odvozování všech dalších vzorců pro goniometrické formule, ale to je už trochu jiná historie, na jejímž konci stojí zavádění goniometrických funkcí pomocí funkcionálních rovnic.

Lze něčím zajímavým žáky v souvislosti s probíráním látky o číslu π zaujmout? Odpověď zní ano, i když bude pro středoškoláky celá věc poněkud mystická. Pozoruhodný je výskyt π v teorii pravděpodobnosti. Není možné objasnit význam integrálu

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \; ,$$

ale je možné při probírání kombinatoriky a elementární pravděpodobnosti přiblížit žákům problém, jehož řešení podal již dávno GEORGE LOUIS LECLERC (COMTE DE BUFFON) (1707 - 1788): Na rovinu opatřenou rovnoběžnými přímkami o vzdálenosti d dopadá náhodně „jehla“ (úsečka) o délce l. Pravděpodobnost p, že jehla zaujme takovou polohu, že protne některou z přímek sítě rovnoběžek, je dána vztahem $p = 2l/\pi d$, z čehož volbou $d = 2l$ dostaneme zajímavý experimentálně ověřitelný vztah (viz také zajímavé zobecnění v [Ta]). Pokud se rozhodnete provést praktický experiment, nemusí vést ke zcela uspokojivým výsledkům (lidská trpělivost je omezená), nicméně je zde příležitost experiment simulovat na počítači a spojit tak matematiku s informatikou.

Nakonec trošku filosofie: historie poznávání čísla π je součástí kulturních dějin lidstva. Na tomto jednoduchém příkladě je snad i užitečné porovnat doby, kdy lidské poznání patřilo k nenahraditelným hodnotám, s těmi poněkud jinými, kdy knihy byly potravou hranic a vědění bylo hodnoceno spíše záporně. Pak lze snáze pochopit, kde jsme se nechtěně ocitli.

Literatura:

[Ap] Apostol T. M. and al., *A century of calculus I, II*, The Mathematical Association of America, 1992.

[Be] Beckman P., *A history of π (pi)*, St. Martin's Press, New York, 1971, (3. vydání).

[Bi] Bible: *Biblí česká*, Rohlíček & Sievers, Praha, 1889.

[Ed] Edwards C. H., *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[Ev] Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics*, CBS College Publishing, New York, 1982, (5. vydání, první je z roku 1953).

[Ja] Jarník V., *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1963.

[Sc] Schepler H. C., *The chronology of π*, Math. Magazine (1950), 165 – 170; 216 – 228; 279 – 283.

[St] Struik Dirk J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963, (český překlad německého originálu Abriss der Geschichte der Mathematik, Berlin, 1963).

[St] Strojk D. Ja., *Kratkij očerk istorii matěmatiki*, Nauka, Moskva, 1978, (poměrně snadno dostupný ruský překlad – viz předchozí citace).

[Ta] Taylor S. J., *Pravidelnost náhodnosti*, Pokroky MFA **25** (1980), 28 – 34, (překlad).

[Ur] Urban A., *Deskriptivní geometrie II.*, SNTL/SVTL, Praha, 1967, (existují další vydání).

Tabulka vývoje aproximací čísla π

starověký Orient	- 3
starověký Egypt	- $[\frac{4}{3}]^4 = 3.1604$
240 př. n. l. (první výpočet Archimédés?)	- $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

150 př. n. l.	Klaudios Ptolemaios - Syntaxis megalé (arabsky - Almagest) - v šedesátkové soustavě $\frac{377}{120} \doteq 3.1416$
480 n. l.	čínské práce o mechanice -Tsu Chung-chih - $\frac{355}{113} = 3.1415929\cdots$ (přesnost na šest desetinných míst)
530	indický matematik Aryabhata - $\frac{62.832}{20000} = 3.1416$ (možná výpočet vepsáním 384 úhelníku)
1150	indický matematik Bháskará - hodnota $\frac{3927}{1250}$ je přesná, hodnota $\frac{22}{7}$ je nepřesná, hodnota $\sqrt{10}$ pro použití pro přímou práci
1429	Al-Káší (astronom v Samarkandu) - výpočet na 16 desetinných míst
1579	Francois Viète - výpočet na 9 desetinných míst - vepsaný mnohoúhelník s 393 216 stranami, též vyjádřil hodnotu $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \dots$
1585	Adriaen Anthoniczoon - $\frac{377}{120} > \pi > \frac{333}{106}$ (z těchto hodnot udělal průměr)
1593	Adrianus Romanus (Nizozemí) - výpočet na 15 desetinných míst vepsáním mnohoúhelníka s 2^{30} stranami
1610	Ludolf van Ceulen (Nizozemí) - výpočet na 35 desetinných míst pomocí mnohoúhelníka s 2^{62} stranami
1621	Willebrod Snell (holandský přírodovědec) - dosáhl přesnosti jako Ludolf van Ceulen už s mnohoúhelníkem s 2^{30} stranami
1630	Grienberger - výpočet na 39 desetinných míst (jde o poslední pokus výpočtu pomocí obsahů)
1650	John Wallis - $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}$
1671	Janus Gregory (Skot) - $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ a tedy pro $x = 1$ je $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ (Leibniz poukázal na velmi pomalou konvergenci této řady)

1699	Abraham Sharp výpočet na 71 míst (použil pro výpočet předcházející řadu pro hodnotu $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$)
1706	John Machin - výpočet na 100 desetinných míst - $\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$
1719	De Lagny (Francouz) - výpočet na 112 desetinných míst
1737	William Oughtred, Isaac Barrow, David Gregory - poprvé užit symbol π
1767	Johann Heinrich Lambert - ukázal, že π je iracionální
1777	Comte de Buffon - pomocí metod pravděpodobnosti (házení tyčí o délce l na platu se dvěma rovnoběžkami ve vzdálenosti a) ukázal, že $p = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot a}$ (r. 1901 Lazzerini při 3408 hodech určil přesnost čísla π na 6 desetinných míst)
1794	Adrien-Marie Legendre dokázal iracionalitu čísla π^2
1844	Zacharias Dase určil číslo π na 200 desetinných míst
1853	Rutherford udává hodnotu na 400 desetinných míst
1873	W. Shanks - udává hodnotu na 707 desetinných míst (ovšem na 528. místě je chyba)
1882	F. Lindemann dokázal, že číslo π je transcendentní
1948	Ferguson, Wrench provedli výpočet na 808 desetinných míst
1949	na počítači ENIAC byla dosažena hodnota na 2037 desetinných míst
1974	Guillond na počítači CDC 7600 provedl výpočet na milión desetinných míst