Učitel matematiky

Pavel Mäsiar

Na stereometrickú tému

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 4, 16–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152836`

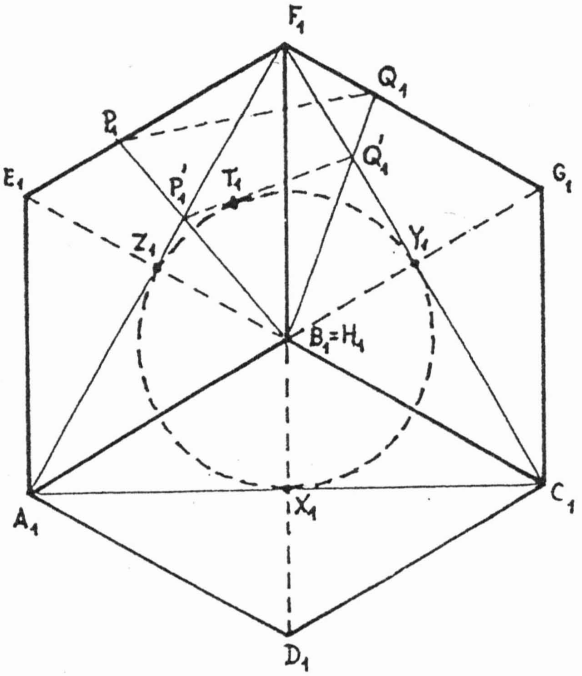
NA STEREOMETRICKÚ TÉMU

PAVEL MÄSIAR

Pri kreslení obrázkov telies v rámci vyučovania stereometrie na strednej škole často postupujeme tak, že využívame jeden ustálený obraz telesa. Zväčšia ide o pravý nadhľad.

Z jednej prednášky RNDr. V. Jodasa o stereometrii som si odniesol (okrem pôžitku) i názor, že treba v oveľa väčšiej miere, než je obvyklé, využívať aj iné pohľady na telesá.

Spomenul som si na to, keď som sledoval rozbory úloh prvého kola 44. ročníka Matematickej olympiády, konkrétne nižšie uvedenej úlohy kategórie A a predvádzané riešenie s využívaním rovinových súmerností sa mi nepáčilo.



Úloha: V priestore je daná kocka $ABCDEFGH$. Uvažujme ľubovoľnú rovinu, ktorá prechádza bodom B a dotýka sa gule vpísanej do danej kocky a označme P, Q jej priesečníky s hranami EF, GF. Dokážte, že odchylka rovín BPH a BQH je $60°$.

Teraz predvedieme riešenie tejto úlohy založené na vhodnom pohľade. Bude to pohľad v smere uhlopriečky BH, keď roviny HBP, HBQ vidno ako priamky.

Rozlišujeme medzi bodmi $A, B, C \ldots$ v priestore a ich obrazmi $A_1, B_1, C_1, \ldots$ na obrázku (v priemetni kolmého rovnobežného premietania). Je to vhodné aj preto, že $B_1 = H_1$.

Medzi dotykové roviny našej gule vpísanej do kocky $ABCDEF$ GH prechádzajúce bodom B patria i roviny stien $BACD$, $BCGF$, $BFEA$. Ich dotykové body X, Y, Z sú v stredoch týchto stien a ležia v rovine AFC. Rovina AFC je kolmá na priamku BH a preto všetko, čo je v rovine AFC, vidíme v skutočnej veľkosti. Kružnica vpísaná do trojúholníka AFC je množinou všetkých dotykových bodov, v ktorých sa roviny (a priamky) prechádzajúce bodom B dotýkajú našej gule. Bod dotyku T roviny BPQ a našej gule leží na tejto kružnici. Priamka $P'Q'$ ($P' \in BP \cap AF$, $Q' \in BQ \cap FC$) je priesečnicou rovín BPQ a AFC. Bod T leží na úsečke $P'Q'$.

Odchýlka rovín BHP, BHQ je rovnaká ako odchýlka priamok B_1P_1' a B_1Q_1' na obrázku. Pôvodná úloha sa teraz zľahčila na novú úlohu - určiť veľkosť uhla $P_1'B_1Q_1'$, pričom $P_1' \in Z_1F_1$, $Q_1' \in Y_1F_1$ a priamka $P_1'Q_1'$ je dotyčnicou kružnice vpísanej trojuholníku $A_1C_1F_1$ (v bode T). Keďže $|Z_1P_1'| = |T_1P_1'|$, $|T_1Q_1'| = |Y_1Q_1'|$ a $|\measuredangle Z_1B_1Y_1| = 120°$, ľahko určíme, že $|\measuredangle P_1'B_1Q_1'| = 60°$.