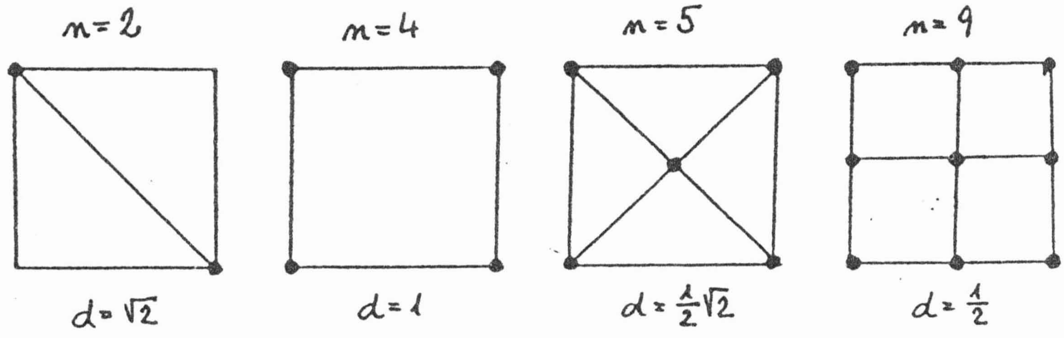
JAK ROZESADIT ŽÁKY PŘI PÍSEMCE

EMIL CALDA

Píšeme-li se svými žáky písemnou práci, snažíme se obvykle o to, abychom jim co nejvíce ztížili možnost vzájemné komunikace. Jeden ze způsobů jak toho dosáhnout je rozesadit je tak, aby vzdálenost každých dvou byla co největší. V případě, že písemka se má psát ve třídě čtvercového tvaru, vede tento požadavek na matematický problém:

V jednotkovém čtverci určete n bodů tak, aby vzdálenost nejbližších dvou byla maximální.

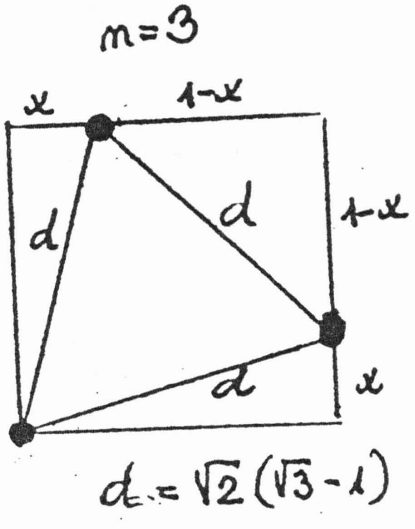
Studenti, pokud je s touto úlohou seznámíte, přijdou na správné řešení pro $n = 2, 4, 5, 9$ poměrně rychle. Tyto hledané n-tice jsou znázorněny plnými kroužky na obr. 1 a pro úplnost je u každé vypočtena vzdálenost d nejbližších bodů.



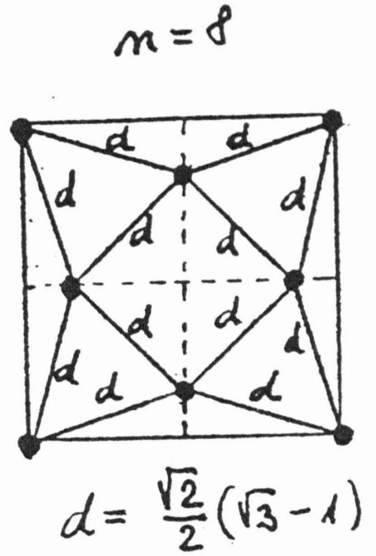
Obr. 1

Velkým problémem není ani případ $n = 3$: hledané body leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, jehož jeden vrchol je ve vrcholu daného čtverce a zbývající dva jsou uvnitř protějších stran (viz obr. 2). Vzdálenost d nejbližších bodů se snadno vypočte ze soustavy

$$d^2 = x^2 + 1$$
$$d^2 = 2(1 - x)^2.$$



Obr. 2



Obr. 3

Řešení případu $n = 8$ dostaneme tak, že daný jednotkový čtverec rozdělíme osami jeho stran na čtyři shodné čtverce a do každého - podle předcházejícího postupu pro $n = 3$ - vepíšeme rovnostranný trojúhelník. Vznikne tak obr. 3, jehož osm vyznačených bodů je řešením úlohy pro $n = 8$; z této konstrukce je zřejmá i velikost příslušné vzdálenosti d. Řešení dané úlohy pro $n = 6$ je obtížnější; správný výsledek je znázorněn na obr. 4.

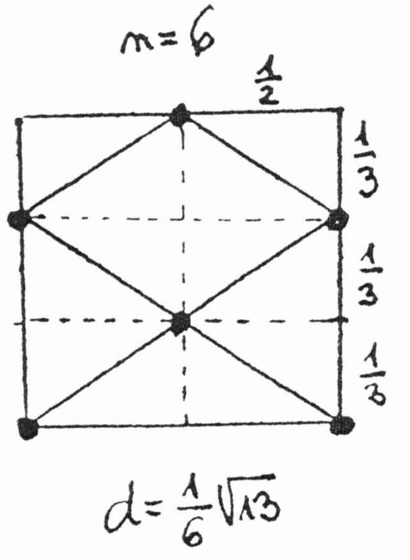
Výsledky získané pro uvedená n mohou studenti shrnout do přehledné tabulky

n	2	3	4	5	6	7	8	9	...
d	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{6}\sqrt{13}$	?	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{1}{2}$	?

a ve shodě s očekáváním se přesvědčit, že s rostoucím n se vzdálenost d zmenšuje:

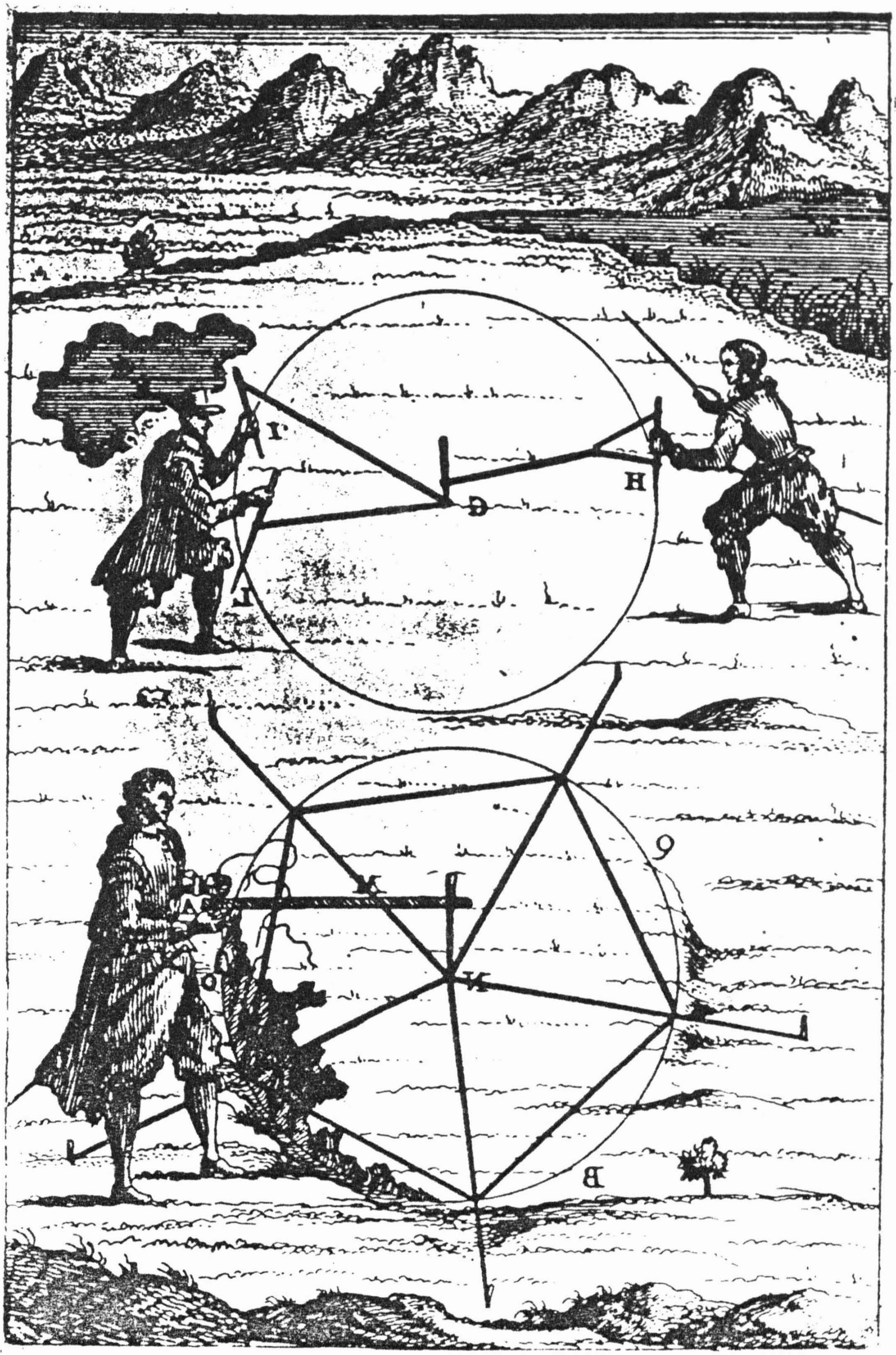
$$\sqrt{2} > \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) > 1 > \frac{1}{2}\sqrt{2} > \frac{1}{6}\sqrt{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1) > \frac{1}{2}.$$

Pokud je mi známo, není pro žádná jiná přirozená čísla n tento problém dosud vyřešen; pro studenty to může být pobídkou, aby se pokusili tuto úlohu řešit např. pro $n = 7$. Potíž bude ovšem v tom, aby dokázali, že nalezená konfigurace má vskutku požadované vlastnosti, tj. že neexistuje jiná, v níž je vzdálenost d nejbližších dvou bodů větší; důkazy těchto tvrzení nejsou jednoduché.



Obr. 4

Vrátíme-li se závěrem k původní otázce jak při písemce rozesadit žáky, musíme s lítostí konstatovat, že získané výsledky nám mnoho nepomohly. Při obvyklém počtu žáků ve třídě musíme daný problém řešit zkusmým odhadem, anebo jejich vzájemné komunikaci bránit jiným způsobem. Přimlouvám se za to, aby byl humánní.



Rýsování v terénu. (Mallet 1672)

Převzato z recenzované knihy F. Kadeřávka - viz str. 61