Dag Hrubý

Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 4, 33–41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152842`

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 23.-29. 4. 1995 se uskutečnilo v Jevíčku III. kolo 44. ročníku MO, kategorie A a P. Pořadatelství bylo svěřeno již potřetí za sebou gymnáziu v Jevíčku, kde je možné pořádat takovou soutěž za plného provozu školy a domova mládeže. Do Jevíčka postoupilo 50 nejlepších matematiků a 32 programátorů.

Matematická část olympiády byla slavnostně zahájena v neděli 23. dubna ve 20,30 hod. v aule gymnázia za přítomnosti zástupce MŠMT Mgr. Jana Tomáše, ředitele správy školství v Čechách a v Praze, doc. RNDr. Leo Bočka, CSc., předsedy ÚVMO a RNDr. Daga Hrubého, ředitele gymnázia. Programátoři slavnostně zahájili ve středu 26. 4. večer, rovněž v aule gymnázia, kde je přivítali doc. RNDr. Václav Sedláček, CSc. a RNDr. Pavel Töpfer, CSc., kteří řídili programátorskou část MO. Vlastní soutěž probíhala ve velkém sále hotelu Morava. Výjimkou byly poslední dva příklady v kategorii P, které řešili soutěžící v počítačové učebně na gymnáziu. Vyhlášení vítězů proběhlo ve středu pro matematiky a v sobotu pro programátory. V rámci soutěže se konalo také zasedání ÚVMO.

Předkládáme zadání a řešení všech příkladů III. kola kategorie A a umístění všech soutěžících obou kategorií.

Dag Hrubý

44-A-III

1. Je dán čtyřstěn $ABCD$, pro nějž platí

$$|\measuredangle BAC|+|\measuredangle CAD|+|\measuredangle DAB| = |\measuredangle ABC|+|\measuredangle CBD|+|\measuredangle DBA| = 180^\circ .$$

Dokažte, že $|CD| \geqq |AB|$.

2. Určete kladná reálná čísla x a y, víte-li, že průměry

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

jsou přirozená čísla, jejichž součet se rovná 66.

3. V rovině je dáno pět různých bodů a pět různých přímek. Dokažte, že z nich lze vybrat dva různé body a dvě různé přímky tak, aby žádný z obou vybraných bodů neležel na žádné z obou vybraných přímek.

4. Rozhodněte, zda existuje 10 000 desetimístných čísel dělitelných sedmi, která jsou zapsána stejnou skupinou deseti číslic v různých pořadích.

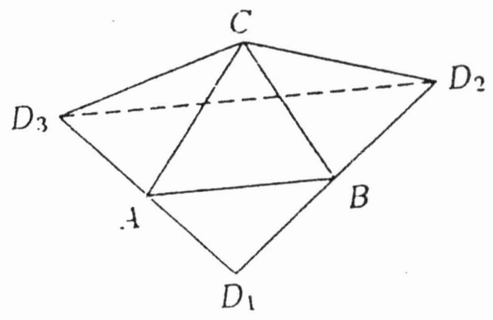
5. Na kružnici k o středu S jsou dány body A a B tak, že tětiva AB je z bodu S vidět pod úhlem 90° . Kružnice k_1, k_2 se dotýkají zevnitř kružnice k po řadě v bodech A, B a navíc se navzájem vně dotýkají v bodě Z. Kružnice k_3 ležící uvnitř úhlu ASB se dotýká (zevnitř) kružnice k v bodě C a (vně) kružnic k_1, k_2 po řadě v bodech X, Y. Dokažte, že úsečku XY je z bodu C vidět pod úhlem 45°.

6. Pro která reálná čísla p má rovnice

$$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4+4p^3-1)x - 3p^3 = 0 \tag{1}$$

tři různé kořeny, jež jsou délkami stran některého pravoúhlého trojúhelníku?

Řešení př. 1. Na obr. 1 je síť daného čtyřstěnu vzniklého otočením stěn ABD, BCD a CAD kolem hran stěny ABC



Obr. 1

do její roviny. Rovnosti ze zadání úlohy znamenají, že jak body D_1, A a D_3 tak i body D_1, B a D_2 leží v přímce. Proto je úsečka AB střední příčkou trojúhelníku $D_1D_2D_3$, což spolu s trojúhelníkovou nerovností pro trojici bodů D_2, C a D_3 vede k odhadu

$$2|AB| = |D_2D_3| \leqq |D_2C| + |CD_3| = 2|CD|.$$

Tím je nerovnost $|CD| \geqq |AB|$ dokázána.

Řešení př. 2. Protože číslo 66 není dělitelné čtyřmi, nemůže platit $a = g = h = k$, takže jak dobře víme, platí $h < g < a < k$. Označme c největší společný dělitel čísel a, g. Pak $a = ca_1$ a $g = cg_1$, přičemž $g_1 < a_1$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Protože $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, je číslo c dělitelné číslem a_1, tedy $c = da_1$ pro vhodné přirozené číslo d. Dostáváme tak vyjádření průměrů pomocí čísel d, a_1, g_1 :

$$h = dg_1^2, g = da_1g_1, a = da_1^2, k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Protože druhá odmocnina z přirozeného čísla je buď přirozené nebo iracionální číslo, musí být číslo $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ přirozené (a to větší než a_1, neboť $g_1 < a_1$). Proto je levá strana rovnosti

$$(*) \qquad dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66$$

větší než $2a_1^2$ (vzhledem k nerovnosti $d \geqq 1$ stačí uvažovat jen třetí a čtvrtý sčítanec). Odtud plyne $2a_1^2 < 66$, neboli $a_1 \leqq 5$. Snadno se zjistí, která z deseti odmocnin

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \quad \text{kde} \quad 1 \leqq g_1 < a_1 \leqq 5$$

je rovna přirozenému číslu: taková je jedině odmocnina $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ pro $a_1 = 5$ a $g_1 = 1$. Dosazením do (*) zjistíme, že $d = 1$. Průměry $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ má dvojice kořenů rovnice $t^2 - 50t + 25 = 0$, tedy dvojice čísel $\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}$.

Řešení př. 3. Označme dané body $A_1, A_2, \ldots, A_5$, dané přímky $p_1, p_2, \ldots, p_5$ a rozlišme dva případy:

I) *Na každé dané přímce leží nejvýše dva dané body.* Kdyby $A_i \in p_j \cap p_k$ pro některé indexy i a $j \neq k$, platilo by $A_x \in p_j \cup p_k$ pro nejvýše tři hodnoty x (včetně $x = i$), takže by zbylé dva dané body spolu s přímkami p_j, p_k tvořily vhodný výběr. V opačném případě by každým bodem A_i, procházela nejvýše jedna přímka p_j; pak by dokonce některé tři přímky p_i neprocházely ani bodem A_1, ani bodem A_2.

II) *Na některé dané přímce leží aspoň tři dané body.* Nechť například body A_1, A_2 a A_3 leží na přímce p_1. Protože každá přímka p_j $(j > 1)$ prochází nejvýše jedním z bodů A_1, A_2, A_3 (jinak by bylo $p_j = p_1$), můžeme jí přiřadit dvouprvkovou množinu $M_j \subset \{A_1, A_2, A_3\}$ takovou, že $p_j \cap M_j = \emptyset$. Avšak tříprvková množina má pouze tři různé dvouprvkové podmnožiny, takže některé dvě ze čtyř množin M_2, M_3, M_4 a M_5 jsou stejné. Při vhodném očíslování bodů a přímek tedy platí $M_2 = M_3 = \{A_1, A_2\}$. To znamená, že je možné vybrat body A_1, A_2 a přímky p_2, p_3.

Řešení př. 4. Všechna desetimístná čísla rozdělme do skupin tak, aby dvě čísla padla do téže skupiny, právě když jsou zapsána stejným souborem deseti cifer. Podle vzorce pro počet kombinací s opakováním existuje právě $\binom{19}{9}$ různých neuspořádaných souborů deseti číslic. Protože je mezi nimi i soubor deseti nul, je počet zmíněných skupin, do kterých jsme rozdělili všechna desetimístná čísla, roven číslu

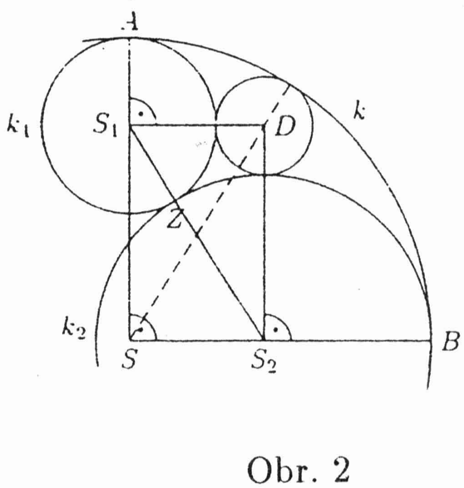
$$\binom{19}{9}-1=\frac{19\cdot18\cdot\ldots\cdot11}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot9}-1=19\cdot17\cdot13\cdot11\cdot2-1=92377<10^5.$$

Počet desetimístných násobků sedmi je však zřejmě větší než 10^9. Proto se v některé ze zmíněných skupin vyskytuje více než $10^{9-5}=$ $=10^4$ čísel dělitelných sedmi. Tvrzení ze zadání úlohy tedy platí.

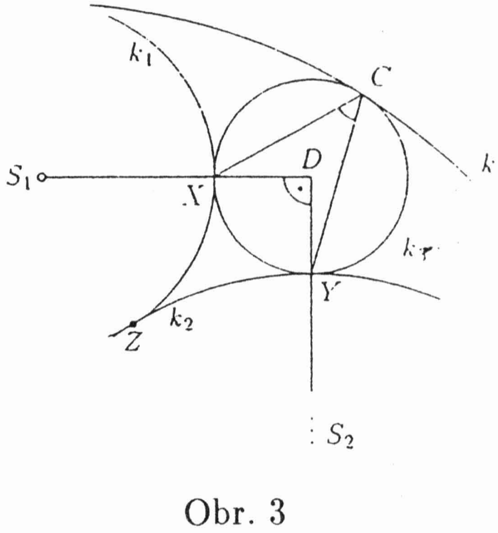
Řešení př. 5. Nechť $k(S,r)$ a $k_i(S_i,r_i)$ jsou zmíněné kružnice (obr. 2). Trojúhelník SS_1S_2 se stranami délek

(1) $\qquad |SS_1|=r-r_1,\ |SS_2|=r-r_2,\ |S_1S_2|=r_1+r_2$

má podle zadání pravý úhel při vrcholu S. Na obr. 2 je tento



Obr. 2



Obr. 3

trojúhelník doplněn na pravoúhelník SS_1DS_2. Nový bod D má podle (1) od bodů S_1,S_2,S vzdálenosti

(2) $\qquad |DS_1|=r-r_2,\ |DS_2|=r-r_1,\ |DS|=r_1-r_2.$

Z trojúhelníkové nerovnosti $|S_1S_2| < |SS_1|+|SS_2|$ vzhledem k (1) okamžitě plyne $r_1+r_2 < r$. Proto je možné uvažovat o kružnici se středem D a poloměrem rovným $r-r_1-r_2$ (neoznačená kružnice na obr. 2 ležící v úhlu ASB). Tato kružnice má podle (2) všechny vlastnosti kružnice k_3 z textu úlohy: dotýká se zevnitř kružnice k a vně kružnic k_1, k_2. Protože kružnice k_3 je pro dané kružnice k, k_1 a k_2 jediná, platí $S_3 = D$ a $r_3 = r - r_1 - r_2$. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu to znamená (obr. 3), že

$$|\measuredangle XCY| = \frac{1}{2} - |\measuredangle S_1DS_2| = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Tím je důkaz hotov.

Řešení př. 6. Pro kladné kořeny a, b, c, $0 < a < b < c$, rovnice (1) musí platit Pythagorova věta $a^2+b^2=c^2$ a Viètovy vzorce

$$(2)\quad a+b+c = 2p(p+1),\quad ab+bc+ac = p^4+4p^3-1,\quad abc = 3p^3.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned} 2c^2 = a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = \\ &= 4p^2(p+1)^2 - 2(p^4+4p^3-1) = 2(p^2+1)^2, \end{aligned}$$

tj. $c = p^2+1$. Proto ze vzorců (2) dále plyne

$$\begin{aligned} a+b &= 2p(p+1) - c = p^2+2p-1, \\ ab &= p^4+4p^3-1-c(a+b) = 2p^3-2p. \end{aligned}$$

Čísla a, b jsou tedy kořeny kvadratické rovnice

$$u^2 - (p^2+2p-1)u + 2p^3 - 2p = 0,$$

což jsou (po snadném výpočtu) čísla $2p$ a p^2-1. Odtud plyne nutná podmínka $p > 1$. Čísla $2p$, p^2+1, p^2+1 jsou kořeny (1), právě když splňují třetí Viètův vzorec

$$2p(p^2-1)(p^2+1) = 3p^3,\quad \text{neboli}\quad p(2p^2+1)(p^2-2) = 0.$$

S ohledem na $p > 1$ tak dostáváme jediné řešení $p = \sqrt{2}$, kdy kořeny (1) jsou tři čísla 1, $2\sqrt{2}$ a 3.

Výsledková listina 44. ročníku celostátního kola MO kategorie A

Vítězové

1.	Robert Šámal	Gy	Praha 5, Zborovská	7	7	7	7	7	7	42
2.	David Pavlica	GMK	Bílovec	7	5	7	7	7	7	40
3.-4.	Libor Mašíček	Gy	Brno, kpt. Jaroše	7	0	7	7	7	7	35
3.-4.	Filip Krška	Gy	Brno, kpt. Jaroše	7	7	7	7	0	7	35
5.	Karel Švadlenka	Gy	Č.Budějovice, Jírovcova	7	7	5	0	7	7	33
6.	Tomáš Bárta	Gy	Praha 5, Zborovská	7	5	7	7	0	5	31
7.	Robert Špalek	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0	7	5	7	6	4	29
8.	Martin Nečesal	Gy	Brno, kpt. Jaroše	7	3	7	0	7	3	27
9.-10.	Petr Kaňovský	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0	7	7	3	2	7	26
9.-10.	Dalibor Šmíd	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	7	0	7	0	7	5	26
11.-12.	Michal Beneš	Gy	Praha 5, Zborovská	7	2	7	0	7	2	25
11.-12.	Michaela Prokešová	Gy	Č.Budějovice, Jírovcova	7	6	6	0	1	5	25

Úspěšní řešitelé

13.	Jan Vybíral	GMK	Bílovec	7	0	2	0	7	7	23
14.-17.	Petr Pudlák	Gy	Praha 5, Zborovská	7	0	3	6	0	6	22
14.-17.	David Stanovský	Gy	Pardubice	7	0	7	7	0	1	22
14.-17.	Norbert Vaněk	Gy	Praha 5, Zborovská	7	3	6	0	0	6	22
14.-17.	Samuel Zajíček	Gy	Praha 10, Voděradská	7	0	3	0	5	7	22
18.-19.	Milan Roupec	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0	7	7	0	0	6	20
18.-19.	Petr Vodstrčil	Gy	Polička	0	6	0	0	7	7	20
20.	Michal Fabinger	Gy	Praha 8, Nad alejí	7	0	0	7	0	4	18
21.	Petr Mařík	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	0	4	6	0	0	7	17
22.-23.	Hedvika Šimková	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	7	0	4	0	0	5	16
22.-23.	Petr Škovraň	GMK	Bílovec	7	0	3	2	1	3	16

Ostatní řešitelé

24.-26.	Jiří Hájek	Gy	Praha 5, Zborovská	0	0	7	7	0	1	15
24.-26.	Jakub Slovan	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	7	0	7	0	0	1	15
24.-26.	Karel Výborný	Gy	Praha 5, Zborovská	0	7	7	0	0	1	15
27.-31.	Pavel Kundrát	Gy	Praha 5, Zborovská	7	0	4	0	0	3	14
27.-31.	Petr Mareš	GMK	Bílovec	0	6	7	0	0	1	14
27.-31.	Zbyněk Pavlas	GMK	Bílovec	1	4	4	0	0	5	14

27.-31.	Alena Píšová	Gy	Pardubice	0 0 6 0 7 1	14
27.-31.	Tomáš Suda	Gy	Klatovy	0 1 5 0 7 1	14
32.-34.	Jan Onderek	Gy	Ostrava, dr. Šmerala	7 0 6 0 0 0	13
32.-34.	Michal Ostatnický	Gy	Praha 5, Zborovská	6 0 3 2 0 2	13
32.-34	Petr Sokol	GJKT	Hradec Králové	7 0 5 0 0 1	13
35.	Michal Ježek	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	0 0 7 0 0 5	12
36.	Mikuláš Patočka	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0 0 0 7 2 2	11
37.	Tomáš Kesl	GMK	Bílovec	1 0 2 0 5 1	9
38.-39	Radek Erban	Gy	Nová Paka	0 0 7 0 0 1	8
38.-39.	Vojtěch Minárik	Gy	Jihlava	0 0 6 0 1 1	8
40.-43.	Daniel Král	Gy	Zlín, Lesní čtvrť	0 0 6 0 0 1	7
40.-43.	Tomáš Soukup	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	0 1 5 0 0 1	7
40.-43.	Oldřich Stražovský	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0 0 6 0 0 1	7
40.-43.	Aleš Vocílka	Gy	Brno, kpt. Jaroše	0 0 5 0 0 2	7
44.	Petra Nečasová	Gy	Praha 5, Zborovská	3 0 2 0 0 1	6
45.-46.	Martin Hadrávek	Gy	Č.Budějovice, Jírovcova	2 0 2 0 0 1	5
45.-46.	Jaroslav Kameník	Gy	Hradec Králové	0 4 0 0 0 1	5
47	Vojtěch Ocelík	Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	0 0 0 0 1 3	4
48.	Petr Murmak	Gy	Praha 5, Zborovská	0 0 0 0 0 1	1
49.	Terezie Šidlofová	Gy	Liberec	0 0 0 0 0 0	0

Výsledková listina celostátního kola 44. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1.	Martin Mareš	4.r.Gy	Praha Libeň	10 9 10 10 10	49
2.	Jiří Hájek	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	10 9 9 10 10	48
3.	Daniel Král	3.r.Gy	Zlín, Lesní čtvrť	6 10 10 10 8	44
4.-6.	Martin Nečesal	4.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	9 6 10 10 8	43
	David Stanovský	4.r.Gy	Pardubice, Dašická	8 8 8 9 10	43
	Robert Šámal	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	8 8 9 8 10	43
7.	Robert Špalek	3.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	6 9 9 10 8	42
8.	Pavel Machek	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	3 7 10 10 10	40

Úspěšní řešitelé

9.	Mikuláš Patočka	2.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	2	9	8	10	10	39
10.-11.	Ondřej Chum	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	6	7	9	6	10	38
	Jan Kratochvíl	2.r.Gy	Praha Libeň	10	8	7	4	9	38
12.	Stanislav Mikeš	3.r.Gy	Č.Budějovice, Jírovcova	2	7	5	9	10	33
13.-14.	Tomáš Müller	3.r.Gy	Mladá Boleslav, Dr. Pekaře	9	7	7	7	1	31
	Ondřej Najdek	3.r.GMK	Bílovec	7	7	5	2	10	31
15.-17.	Petr Mařík	4.r.Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	1	7	8	4	10	30
	Petr Vilím	2.r.GMK	Bílovec	3	5	5	7	10	30
	Roman Ženka	3.r.Gy	Č.Budějovice, Jírovcova	2	6	7	5	10	30

Ostatní řešitelé

18.	Tomáš Tichý	3.r.Gy	Pardubice, Dašická	1	5	3	10	10	29
19.	Jan Březina	2.r.Gy	Liberec, Partizánská	5	4	9	9	1	28
20.	Petr Kaňovský	4.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	2	9	10	6	0	27
21.	Michal Dachs	4.r.GJKT	Hradec Králové	7	2	4	8	4	25
22.	Pavel Bubák	3.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	0	6	6	3	9	24
23.	Pavel Procházka	3.r.GJAK	Uherský Brod	3	8	5	4	3	23
24.	Pavel Vlček	3.r.Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	4	2	8	6	2	22
25.	Helena Kupková	3.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	4	9	2	1	5	21
26.-28.	Petra Kudová	4.r.Gy	Plzeň, Mikulášské nám.	3	9	5	0	0	17
	Petr Mareš	4.r.GMK	Bílovec	3	5	5	4	0	17
	Pavel Vymazal	3.r.Gy	Brno, kpt. Jaroše	1	2	4	0	10	17
29.	Martin Jaroš	4.r.Gy	Benešov, Husova	6	6	4	0	0	16
30.-31.	Petr Čáp	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	5	7	3	0	0	15
	Vladimír Souček	4.r.Gy	Praha 5, Zborovská	0	3	9	0	3	15
32.	Martin Banszel	3.r.Gy	Třebíč, Masarykovo nám.	3	6	1	0	0	10