

Učitel matematiky

Jitka Panáčková

Problematická místa studentů učitelství 1. stupně ZŠ při řešení slovních úloh

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 4, 194–216

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152994>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

PROBLEMATICKÁ MÍSTA STUDENTŮ UČITELSTVÍ 1. STUPNĚ ZŠ PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH

JITKA PANÁČOVÁ

Úvod

Řešení slovních úloh je často považováno za problematické téma ve výuce matematiky na 1. i 2. stupni ZŠ. Předmětem zájmu řady odborných publikací bylo poukázat na objevující se příčiny, které mohou žáky vést k problémům při řešení slovních úloh. Dle některých výzkumníků může být pro žáky velmi obtížné vytvořit si vlastní obrázek vztahující se k zadané situaci slovní úlohy. V návaznosti na výsledky zmíněných výzkumů představuje tento článek studii vycházející z průzkumu, který se zaměřil na způsoby grafického znázornění slovních úloh studenty učitelství 1. stupně ZŠ. Výsledky této studie přináší překvapivý vhled do této problematiky, který u mnohých studentů odhaluje značné mezery ve sledované oblasti. Tato studie by se mohla stát inspirativní a užitečnou pro studenty učitelství 1. stupně ZŠ i učitele na 1. stupni ZŠ.

Vymezení pojmu slovní úloha a fáze jejího řešení

V didaktice matematiky považují někteří autoři (Vyšín, 1962) za *slovní úlohu* jakýkoli slovně formulovaný matematický úkol. Dle Blažkové (2020, s. 153) rozumíme slovními úlohami takové „úlohy, ve kterých jsou souvislosti mezi zadanými a hledanými údaji vyjádřeny slovní formulací“. Prostřednictvím vhodných úvah pak zjišťujeme, jaké operace je třeba se zadanými údaji provést, abychom našli údaje hledané.

Divíšek et al. (1989, s. 123) popisují slovní úlohu jako „úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém“. Pokud je možné předložený problém řešit matematicky, předpokládá se formulace reálného problému jako aritmetické nebo algebraické úlohy, kterou pak lze řešit matematicky. Přepis slovního zadání úlohy do matematického jazyka nazýváme *matematizace reálné situace*.

Kuřina (1989, s. 61) uvádí, že „slovní úloha je úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpověď na položené otázky“. Ve vyučování matematiky pak celou šíří poznatků z didaktického systému učiva matematiky aplikujeme na slovní úlohy (Novák, 1999).

Za jednoduchou, resp. složenou slovní úlohu považujeme obvykle takovou slovní úlohu, pro jejíž řešení postačí použít jen jeden, resp. alespoň dva početní výkony (nemusí být ale nutně různé).

Postup při řešení slovní úlohy se obvykle vyjadřuje schématem, které je třeba tvořivě modifikovat podle složitosti, charakteru a typu úlohy (Blažková et al., 2011; Divíšek et al., 1989; Malinová, 1983; Novák, 1999):

1. *Rozbor úlohy* včetně stručného záznamu zadání spočívá v ujasnění si a nalezení vztahů mezi zadanými údaji a hledaným předmětem otázky. Z účelně provedeného rozboru vyplyne vhodná volba početních operací, které vedou k matematizaci reálné situace a nalezení výsledku slovní úlohy. Důležitou součástí rozboru je čtení textu zadání úlohy, případně vysvětlení nejasných slov. Podle potřeby a obtížnosti úlohy může být pro žáky rozbor doprovázen vhodným způsobem *grafického znázornění*.
2. *Matematizace reálné situace* je logickým vyústěním rozboru, přičemž spočívá v zápisu odpovídající rovnice, soustavy rovnic či jen početního příkladu, které podstatu problému vystihují. V této fázi se projeví, zda žáci pochopili význam operací s čísly.

3. *Řešení* matematicky formulované úlohy je např. řešení sestavené rovnice, soustavy rovnic či vytvořeného příkladu. Na úspěšnost řešení slovní úlohy má vliv stupeň zvládnutí pamětných operací v těchto oborech i zvládnutí písemných algoritmů.
4. *Odpověď* na otázku slovní úlohy vede žáka ke konfrontaci výsledku s realitou.
5. *Zkouška správnosti* potvrzuje fakt, že nalezený výsledek je skutečně řešením dané úlohy a odpovídá jejím zadaným podmínkám.

Hejný a Stehlíková (1999, s. 40) se v souvislosti s řešením slovní úlohy zaměřují na proces jejího *uchopování*, který rozdělili do čtyř etap:

1. Řešitel si vytvoří představu o tom, čeho se úloha týká. Vzpomíná, zda již podobnou úlohu řešil.
2. Řešitel eviduje objekty úlohy. Zapiše, označí nebo nakreslí, co je dáno a co se má najít. Někdy uvede i pomocné objekty, které sice v úloze nevystupují, ale které může použít při řešení.
3. Řešitel eviduje vztahy mezi objekty a tyto si nějak vyznačí, například pomocí šipek, kterými propojí již na papíře napsané objekty. Někdy připiše i pomocné vztahy.
4. Řešitel si utváří představu o úloze jako celku a z této představy se snaží vyvodit řešitelskou strategii, tj. směr, kterým bude dále postupovat.

Využívání grafického znázornění k řešení slovních úloh

Grafické znázornění může být součástí rozboru slovní úlohy a jeho účelem je usnadnit či přiblížit matematizaci reálné situace, která je zadána verbálně. Lze ho považovat za náhradu konkrétní reálné situace, je však mnohem schematictější než situace sama. Mělo

by být oporou pro řešení, které by z něj mělo vycházet. Grafické znázornění mnohým žákům usnadní řešení úlohy a následný zápis příslušného příkladu, rovnice či soustavy rovnic. Dle Blažkové (2020, s. 155) „obrázek je za tisíc slov“. Je tedy podpůrným prostředkem k řešení úlohy, nicméně ho nepovažujeme za nutnou součást postupu při řešení.

V některých případech grafické znázornění matematizuje reálnou situaci slovní úlohy do té míry, že z něj lze přímo dospět k výsledku a není třeba provádět další numerické výpočty. V tomto případě mluvíme o *grafickém řešení* úlohy.

Možnosti grafického znázornění slovních úloh

V dalším textu uvádíme několik možností grafického znázornění pro vybrané typy slovních úloh. Grafické znázornění je zprostředkováno buď pomocí zástupných symbolů (kolečka, čárky) za dané objekty, nebo úseček či obdélníků (Blažková et al., 2000; Blažková et al., 2011; Divíšek et al., 1989).

a) jednoduchá slovní úloha na určení součtu

Anička má 5 pastelek, od Jany dostala ještě 3 pastelky. Kolik pastelek má Anička?

Znázornění: 

Výpočet: $5 + 3 = 8$

Odpověď: Anička má 8 pastelek.

b) jednoduchá slovní úloha na určení rozdílu *Filip měl 9 bonbonů a 3 dal Toníkovi. Kolik bonbonů Filipovi zůstalo?*

Znázornění: 

Výpočet: $9 - 3 = 6$

Odpověď: Filipovi zůstalo 6 bonbonů.

c) jednoduchá slovní úloha na porovnávání typu „o n více“ řešená sčítáním

Anička má 11 pastelek, Jana má o 4 pastelky více než Anička.

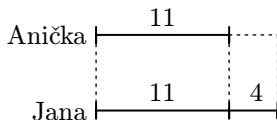
Kolik pastelek má Jana?

Znázornění:

Anička |||||

Jana ||||| |||||

nebo



Výpočet: $11 + 4 = 15$

Odpověď: Jana má 15 pastelek.

d) složená slovní úloha (úloha se skládá ze dvou jednoduchých úloh typu a), c) uvedených výše)

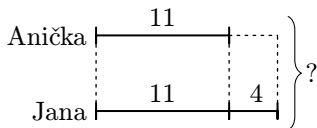
Anička má 11 pastelek, Jana má o 4 pastelky více než Anička. Kolik pastelek mají obě dívky dohromady?

Znázornění:

Anička |||||

Jana ||||| |||||

} ? nebo



Výpočet: $11 + (11 + 4) = 26$

Odpověď: Dívky mají dohromady 26 pastelek.

e) jednoduchá slovní úloha na porovnávání typu „o n méně“ řešená odčítáním

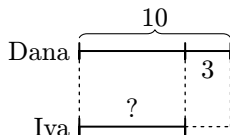
Dana má 10 bonbonů, Iva má o 3 bonbony méně než Dana. Kolik bonbonů má Iva?

Znázornění:

Dana ○○○○○○○○|○○○

Iva ○○○○○○○○|

nebo



Výpočet: $10 - 3 = 7$

Odpověď: Iva má 7 bonbonů.

f) jednoduchá slovní úloha na porovnávání typu „ n krát více“ řešená násobením

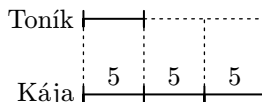
Toník má 5 pastelek, Kája má třikrát více pastelek než Toník. Kolik pastelek má Kája?

Znázornění:

Toník |||||

nebo

Kája ||||| ||||| |||||



Výpočet: $3 \cdot 5 = 15$

Odpověď: Kája má 15 pastelek.

g) složená slovní úloha (úloha se skládá ze dvou jednoduchých úloh typu a), f) uvedených výše)

Toník má 5 pastelek, Kája má třikrát více pastelek než Toník. Kolik pastelek mají oba hoši dohromady?

Znázornění:

Toník |||||

Toník 5

? nebo

Kája ||||| ||||| |||||

Kája 5 5 5

Výpočet: $3 \cdot 5 + 5 = 20$

Odpověď: Oba hoši mají dohromady 20 pastelek.

h) jednoduchá slovní úloha na porovnávání typu „o n méně“ řešená sčítáním¹

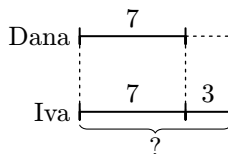
Dana má 7 bonbonů, což je o 3 bonbony méně než má Iva. Kolik bonbonů má Iva?

Znázornění:

Dana ○○○○○○○○

nebo

Iva ○○○○○○○○ ○○○○

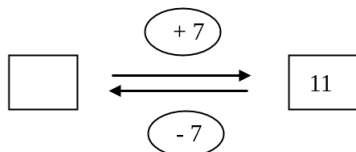


¹ Jedná se o tzv. slovní úlohu s antisignálem, což je „úloha, ne nutně slovní, kde se vyskytuje signální slovo, nebo znak naznačující jistou operaci, ale k výpočtu je nutno provést operaci inverzní“ (Rendl et al., 2013, s. 50). V případě této slovní úlohy je signálním slovem slovo méně, ale je řešena pomocí sčítání.

Výpočet: $7 + 3 = 10$

Odpověď: Iva má 10 bonbonů.

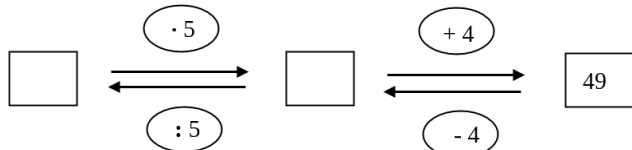
Pro některé typy slovních úloh může být výhodné použít grafického znázornění situace prostřednictvím *šipkového diagramu*, který od sebe odlišuje číslo jako počet a číslo jako operátor. Číslo jako počet zapisujeme do obdélníku a číslo jako operátor do elipsy (Vergnaud, 2009). Na obrázku 1 je znázorněn šipkový diagram pro aritmetickou úlohu „Jan vyhrál 7 kuliček při hře s Karlem a nyní má 11 kuliček. Kolik kuliček měl Jan před hrou?“.



Obr. 1: Šipkový diagram podle Vergnauda (2009)

Šipkový diagram na obrázku 1 pak vede k aritmetickému výpočtu $11 - 7 = 4$, tj. Jan měl před hrou 4 kuličky.

Využití šipkového diagramu podle Budínové (2018) v určitém typu úloh kultivuje u žáků jedno ze sofistikovaných aritmetických metod řešení – metodu řešení od konce, která může v pozdějších letech vzdělávání tvořit přímý most k algebraické metodě řešení rovnic. Šipkový diagram na obrázku 2 reprezentuje dvojkrokovou aritmetickou úlohu „Kolik roků má Adélka? Když její věk zvětšíme pětkrát a přičteme 4, vyjde 49.“. Žáci při řešení této úlohy mohou vycházet ze svých aritmetických poznatků a nejdříve od 49 odečtou 4 a rozdíl vydělí pěti. Postupují tedy v opačném pořadí, než je uvedeno v zadání a používají inverzní operace. Uvedený způsob výpočtu bývá označován jako postup od konce nebo též *metoda inverzních operací*.



Obr. 2: Šipkový diagram pro dvojkrokovou aritmetickou úlohu

Jestliže v algebre by úlohu bylo možno řešit rovnicí $5 \cdot x + 4 = 49$, šipkový diagram na obrázku 2 ji převede k aritmetickému výpočtu $(49 - 4) : 5 = 9$, tj. Adélka má 9 roků. Uvedený šipkový diagram je mezikrokem mezi implikačním pojetím a ekvivalentním pojetím, které je potřeba k řešení rovnic (Budínová, 2018).

Potíže žáků při řešení slovních úloh

Blažková (2020) podrobně popisuje možné přístupy žáků při řešení slovních úloh a uvádí následující příčiny, které mohou vést žáky k problémům při řešení úloh:

a) *Pochopení či nepochopení textu zadání slovní úlohy*

Žáci se nejdříve setkají se zadáním slovní úlohy zpravidla prostřednictvím textu, který by měli přečíst s porozuměním. Zde hrají roli: délka textu, tematika slovní úlohy, způsob zadání číselných údajů, vliv poruch učení (dyslexie) a schopnost koncentrace na daný text. Žáci zpravidla ze zadání textu provádí stručný zápis úlohy, který je součástí jejího rozboru, v němž jde o to, aby si ujasnili, které údaje jsou zadány a který údaj je neznámý.

b) *Zvládnutí rozboru slovních úloh*

Rozbor slovní úlohy je považován za nejdůležitější část jejího řešení, které spočívá v ujasnění si vztahů mezi zadanými a hledanými údaji, což vyžaduje určité přemýšlení, které některým žákům může činit problémy a proto často od tohoto problému utíkají a rezignují. V tomto kroku se může projevit pedagogické mistrovství učitelů či rodičů, kteří pomohou žákovi cestu k řešení tohoto problému najít. Z účelně provedeného rozboru pak vyplývá vhodná volba operací vedoucích k matematizaci reálné situace. Pokud žáci nechápou vztahy mezi hledanými a zadanými údaji a z rozboru nevyplývá správná volba operace, zpravidla náhodně volí číselné údaje ze zadání i operaci, kterou s nimi provádějí, což zpravidla nevede ke správnému výsledku.

c) *Matematizace reálné situace*

V této části se ukáže, zda žáci pochopili podstatu operací, tj. kdy kterou operaci použijí, případně jak vztahy mezi údaji zapíší pomocí rovnice.

d) *Řešení příkladu*

Při řešení sestaveného příkladu se projeví případné nedostatky vyplývající z problémů v oblasti aritmetiky, tj. při provádění operací s přirozenými čísly, případně zlomky. Na úspěšnost má vliv zvládnutí pamětných operací v těchto oborech i zvládnutí písemných algoritmů.

e) *Odpověď*

Někteří žáci mají problémy zapsat odpověď na položenou otázku slovní úlohy.

f) *Provedení zkoušky správnosti*

K pochopení zadání slovní úlohy může přispět i provedení její zkoušky správnosti. Je třeba rozlišovat zkoušku správnosti prováděných operací a zkoušku správnosti řešení slovní úlohy. Ukázalo se, že někteří žáci si až při provádění zkoušky správnosti ujasní samotné řešení slovní úlohy.

Blažková et al. (2000) upozorňují, že u slovních úloh na porovnávání pomocí vztahů „o n méně/více“ nebo „ n krát méně/více“ může být příčinou chyb i nevhodné používání mnemotechnické pomůcky „více – přičítám (násobím)“, případně „méně – odčítám (dělím)“. Slovní úloha může být totiž formulovaná tak, že mechanické uplatnění této pomůcky nevede ke správnému výsledku, viz úlohy s antisignálem.

Vondrová a Žalská (in Rendl et al., 2013) popsaly příčiny žákovských obtíží při řešení slovních úloh v kontextu hledání kritických míst v matematice z pohledu učitelů. Učitelé nejčastěji zmiňovali tato kritická místa:

- nedostatky v konceptuálním porozumění, tedy nepochopení textu ve smyslu utvoření si představy o situaci a podstatě problému, který text popisuje,
- problémy s matematizací reálné situace,

- neschopnost udělat zápis slovní úlohy,
- neschopnost interpretovat výsledek v kontextu úlohy či reálného života.

Příčinu problémů žáků při řešení slovních úloh učitelé shledávali v následujících aspektech:

- charakter samotných úloh (např. úlohy na společnou práci),
- úloha se nedá zařadit k žádnému typu úloh, u kterého by žák využil naučený standardní postup,
- charakteristika žáka, kdy například žák nemá vůli dokončit úkol,
- rodina a širší společnost, kdy „žáci nemají díky dnešnímu životnímu stylu dostatek životních zkušeností, jež jsou nezbytné pro vytvoření si představy o kontextu problému, který mají řešit, na druhé straně řešení slovních úloh předem vzdávají, protože jsou ovlivněni postojem rodiny a společnosti“ (Rendl et al., 2013, s. 98),
- didaktický přístup, kdy „řada žáků se snaží naučit řešení slovních úloh mechanicky či nejsou schopni použít jiné než vzorové řešení. To může být způsobeno i didaktickými přístupy učitele, který klade důraz na procedurální stránku vyučování, vede žáky k procedurám a zanedbává konceptuální porozumění“ (Rendl et al., 2013, s. 99).

Také další autoři se zabývali žákovskými strategiemi řešení slovních úloh s chybami, kterých se žáci dopouštějí, z českých publikací jmenujme (Hejný, 1995; Novotná, 2000; Stehlíková, 1995; Vondrová et al., 2015; Vondrová et al., 2019).

Potíže žáků při řešení slovních úloh plynoucí z chybného grafického názoru

Blažková et al. (1992) zdůrazňují, že výuka slovních úloh není výukou jednorázovou, ale dlouhodobým procesem prolínajícím se výukou matematiky na základních i středních školách. Proto na 1. stupni ZŠ prochází výuka řešení slovních úloh postupným vývojem, kdy od 1. ročníku ZŠ jde hlavně o *nácvik matematizace a pochopení odpovídajícího grafického znázornění* u jednoduchých

slovních úloh, tzn. nejdůležitější je danou situaci nejdříve vymodelovat (např. na lavici), pak ji znázornit na tabuli prostřednictvím zástupných symbolů a jako výsledek těchto činností matematizovat reálnou situaci.

Řada našich výzkumníků (Blažková et al., 1992; Blažková, 2020; Divíšek et al., 1989; Malinová, 1983; Novák, 1999) se shoduje v tom, že odpovídající grafické znázornění přispívá k úspěšnému zvládnutí řešení slovní úlohy. Potíž je dle Divíška et al. (1989) však mnohdy v tom, že v té době žáci nejsou schopni znázornění sami realizovat. Aby tedy znázornění skutečně plnilo svou vzdělávací úlohu, je žádoucí, aby k němu byli žáci od začátku vedeni a spatřovali v něm schematické vyjádření reálné situace a pomůcku k řešení. Dále by mělo být pokud možno jednotné vzhledem k používaným matematickým prostředkům a mělo by být používáno pouze tam, kde k řešení úlohy skutečně pomáhá.

Zkušenosti autorky tohoto článku získané při práci s žáky řešeními slovní úlohy potvrzují, že mnozí z nich nejsou z různých důvodů schopni optimálně graficky znázornit situaci popsanou v zadání slovní úlohy. Pokud se následně žák opírá o nesprávné grafické znázornění reálné situace zadané ve slovní úloze, které si vytvořil, bývá i toto příčinou chybného žákovského řešení. V kontextu s tímto problémem se ztotožňuji s tvrzením Divíška et al. (1989, s. 126), že „je nevhodné, když učitel požaduje od žáka znázornění každé slovní úlohy, i když ví, že žák umí úlohu řešit samostatně bez znázornění“. Jako prostředek k řešení slovní úlohy můžeme považovat takové grafické znázornění žáka, které koresponduje se zadanou reálnou situací. I tuto dovednost je třeba u žáků rovněž postupně trénovat. Často se totiž setkáváme s obtížemi, kdy žáci nedovedou úlohu správně znázornit (Vondrová et al, 2015) a „je-li zvolena neverbální reprezentace, která není pro řešení daného typu úlohy optimální, může se přítomnost obrázku projevit negativně“ (Vondrová et al, 2019, s. 125). Mnohé výzkumy poukazují na to, že náčrtek nemusí vždy znamenat přínos pro žákovo pochopení problému, neboť v sobě nese velké množství informací, které žák není schopen udržet v pracovní paměti. Rozhodující jsou přitom žákovy dosavadní znalosti, pokud jsou

nedostatečné, žák může svou pozornost upřít na zcela nepodstatné aspekty obrázku a nepracuje s informacemi, které jsou pro řešení problému nezbytné (Cook, 2006). Pro tyto situace *je velmi důležité, aby učitel poskytl žákům při řešení slovních úloh – jednoduchých i složených – optimální grafický názor odpovídající zadané situaci*, který přiblíží či usnadní žákům řešení. Při tomto procesu se nabízí využití více možných forem názoru (obdélníky, úsečky, stromy logických možností, kolečka, čárky, apod.), což umožní žákům uplatnit jejich individuální zvláštnosti a přirozený vztah k reálné skutečnosti (Blažková et al., 1992). I v případě vhodného grafického názoru jde často o pedagogické mistrovství učitele, který tímto zprostředkuje cestu ke správnému vyřešení slovní úlohy. Zde je však třeba upozornit na skutečnost, že ne každá situace popsaná ve slovní úloze je vhodně interpretovatelná graficky. Snahy učitele za každou cenu situaci znázornit pomocí grafického názoru mohou vést k chybným interpretacím úlohy, kdy znázornění je nesprávné a zavádějící, což může být také příčinou toho, že žáci selhávají při řešení slovních úloh.

Příklady nevhodného grafického znázornění zjištěné u studentů učitelství 1. stupně ZŠ

V rámci výuky předmětu Didaktika matematiky na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity v Brně jsou studenti učitelství 1. stupně ZŠ ve čtvrtém ročníku seznámeni s problematikou řešení slovních úloh ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Důležitá součást tohoto procesu cílí mimo jiné na možnosti využití vhodného a odpovídajícího grafického znázornění reálné situace ve slovních úlohách. Jako budoucí učitelé jsou studenti popsané skupiny v rámci tohoto vzdělávání konfrontováni s možnostmi optimálního a naproti tomu s možnostmi nevhodného grafického názoru situace zadané ve slovní úloze.

Autorka tohoto článku si dala za cíl ověřit znalosti a dovednosti vztahující se k tvorbě správného grafického názoru při řešení slovních úloh u popsané skupiny studentů po absolvování předmětu didaktika matematiky před jeho ukončením.

Ověřování znalostí a jeho výsledky

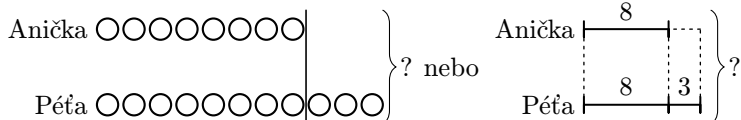
Průzkum ověřující znalosti a dovednosti, které se vztahují k tvorbě správného grafického názoru při řešení slovních úloh u popsané skupiny studentů, byl realizován v závěru podzimního semestru akademického roku 2023/2024 a zúčastnilo se ho 75 studentů čtvrtého ročníku učitelství 1. stupně na Pedagogické fakultě MU v Brně. Nástrojem pro identifikaci znalostí a dovedností v této oblasti byla písemná práce, která obsahovala zadání vybraných slovních úloh z učiva matematiky 1. stupně ZŠ, které měli studenti vzorově vyřešit s využitím grafického znázornění.

Výsledky průzkumu ukázaly, že přibližně 16 % dotazovaných studentů nezvolilo pro řešení zadané slovní úlohy vhodný grafický názor, který vedl v některých případech dokonce k chybnému výsledku úlohy! Pro studenty se jako problematické pro grafické znázornění jevíly jednoduché i složené slovní úlohy, které autorka vybrala do dalšího textu tohoto článku. Vybrané úlohy jsou nejdříve vzorově vyřešeny² včetně ukázky vhodného grafického názoru a následně jsou jednotlivá řešení doprovázena záznamy nevhodných grafických interpretací studentů. Každý uvedený studentský záznam autorka tohoto článku reflektovala.

1. úloha

Anička měla 8 bonbonů, což bylo o 3 méně, než měl Pěťa. Kolik bonbonů měli Anička a Pěťa dohromady?

Vhodné znázornění:

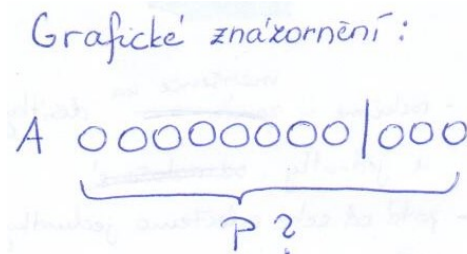


Výpočet: $8 + (8 + 3) = 19$

Odpověď: Anička a Pěťa měli dohromady 19 bonbonů.

²Vzhledem k tomu, že tento článek se zaměřuje na možnosti grafického znázornění situace zadaných slovních úloh řešených studenty učitelství 1. stupně ZŠ, postrádá každé vzorové řešení vybrané slovní úlohy jeho zápis.

Na obrázku 3 je uveden studentský záznam grafického znázornění 1. úlohy, který nereprezentuje reálnu situaci zadanou v úloze. Pokud mají být kolečka zástupnými symboly bonbonů obou dětí, neulehčuje nám obrázek 3 řešení úlohy. Můžeme jej totiž interpretovat tak, že Anička a Péťa měli 8 bonbonů společných. Zkušenost autorky potvrzuje, že tento grafický záznam a jemu podobné bývají studenty i učiteli často nesprávně uváděny v kontextu s typem úlohy „o n více“.

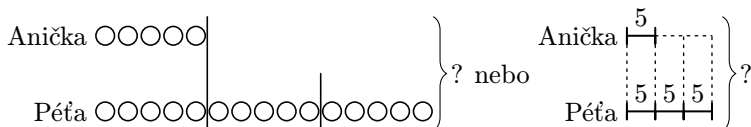


Obr. 3: Studentský záznam grafického znázornění 1. úlohy

2. úloha

Anička měla 5 bonbonů a Péťa měl třikrát více bonbonů než Anička. Kolik bonbonů měli Anička a Péťa dohromady?

Vhodné znázornění:



Výpočet: $5 + 3 \cdot 5 = 20$

Odpověď: Anička a Péťa měli dohromady 20 bonbonů.

Obrázek 4 představuje studentský záznam grafického znázornění 2. úlohy, který není skutečnou interpretací zadané reálné situace v této úloze. Pokud mají být kolečka zástupnými symboly bonbonů Aničky v jedné přihrádce, tak nelze jednoznačně určit, kolik koleček bude v dalších dvou přihrádkách, když nejsou stejné velké. Navíc můžeme z obrázku 4 chybně usoudit, že Anička a Péťa měli 5 bonbonů společných. Zkušenost autorky potvrzuje, že grafické

zachycení pro typ úlohy „ n krát více“, jaké vidíme na obrázku 4, bývá opakovaným jevem.

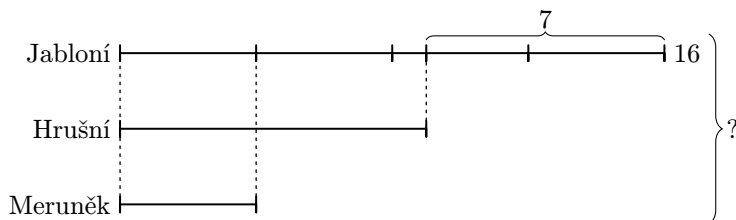


Obr. 4: Studentský záznam grafického znázornění 2. úlohy

3. úloha

V sadu rostlo 16 jabloní, hrušní tam bylo o 7 méně než jabloní. Meruněk bylo v sadu čtyřikrát méně než jabloní. Kolik rostlo v sadu všech stromů uvedených druhů?

Vhodné znázornění:



Výpočet: $16 + (16 - 7) + 16 : 4 = 29$ nebo $16 - 7 = 9$

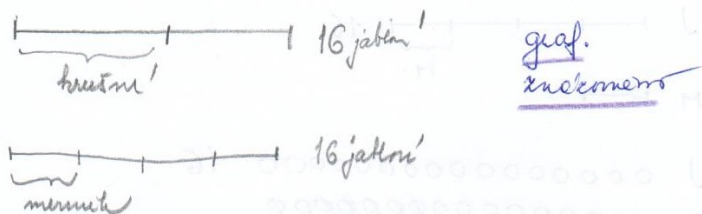
$$16 : 4 = 4$$

$$16 + 9 + 4 = 29$$

Odpověď: V sadu rostlo 29 stromů uvedených druhů.

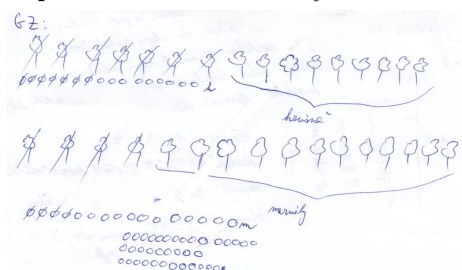
Studentský záznam grafického znázornění 3. úlohy na obrázku 5 reprezentuje nesprávný přístup k této problematice hned v několika ohledech. Tato ukázka odráží jev, kdy počty dvou různých druhů stromů jsou znázorněny v rámci jedné úsečky (tentýž jev byl interpretován výše na obrázcích 3 a 4). Dále si povšimněme, že v grafickém znázornění chybí číselný údaj popisující situaci „hrušní bylo o 7 méně než jabloní“. Tato skutečnost nere-

spektuje doporučení, že všechny číselné údaje ze zadání úlohy by měly figurovat i v grafickém názoru. Stejně tak záznam počtu jabloní prostřednictvím dvou různých úseček by mohl být pro žáka problematický, pokud by se rozhodl řešit úlohu přímo z obrázku 5.



Obr. 5: Studentský záznam grafického znázornění 3. úlohy

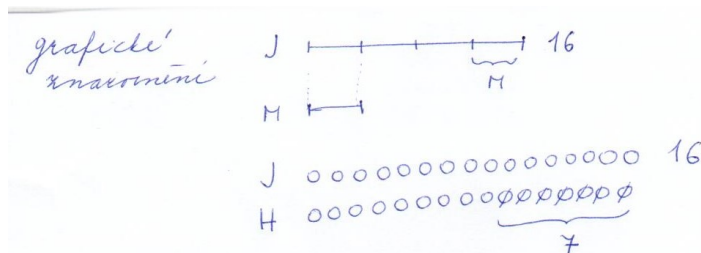
Na obrázku 6 je zřejmé nesprávné grafické znázornění 3. úlohy hned z několika pohledů. Student pro určení počtu hrušní využil v názoru pro operaci odčítání škrtnutí symbolů (stromů) v první řadě, jehož použití v úlohách typu „o n méně/více“ se jeví jako nevhodné. Záhadou je, z jakého důvodu škrtnal symboly stromů v druhé řadě pro určení počtu meruněk, kde vycházíme ze vztahu „meruňek bylo 4 krát méně než jabloní“. Chybné je rovněž znázornění počtu dvojího druhu stromů do záznamu počtu jabloní, viz předchozí upozornění u 1. a 2. úlohy.



Obr. 6: Studentský záznam grafického znázornění 3. úlohy

Obrázek 7 je dalším příkladem nesprávného grafického znázornění 3. úlohy z hlediska určení počtu hrušní, který student znázornil škrtnutím koleček – situace z obrázku 7 by se totiž dala interpretovat: „Hrušní bylo 16, ale 7 jich bylo pokáceno. Kolik hrušní zůstalo?“. Další aspekt, který by mohl být pro žáka matoucí,

je dvojí způsob záznamu počtu jabloní (pomocí koleček i pomocí úseček).

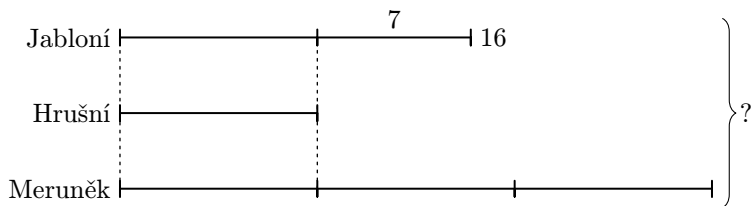


Obr. 7: Studentský záznam grafického znázornění 3. úlohy

4. úloha

V sadu rostlo 16 jabloní, hrušní tam bylo o 7 méně než jabloní. Meruněk bylo v sadu třikrát více než hrušní. Kolik rostlo v sadu všech stromů uvedených druhů?

Vhodné znázornění:



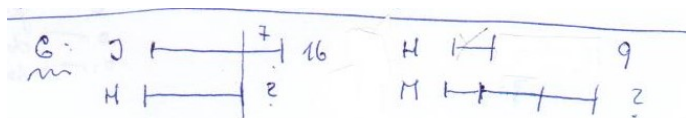
Výpočet: $16 + (16 - 7) + 3 \cdot (16 - 7) = 52$ nebo $16 - 7 = 9$

$$9 \cdot 3 = 27$$

$$16 + 9 + 27 = 52$$

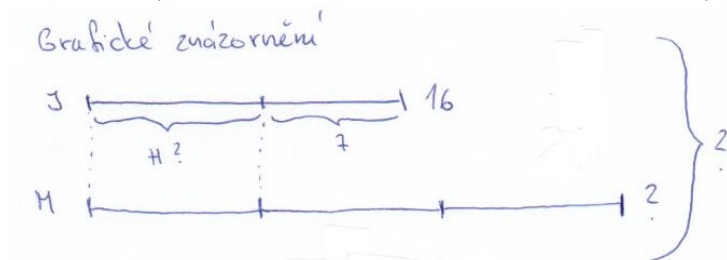
Odpověď: V sadu rostlo 52 stromů uvedených druhů.

Studentský záznam grafického znázornění 4. úlohy na obrázku 8 by mohl být pro žáka matoucí, neboť obsahuje dvě úsečky různých délek, obě však představují tentýž počet hrušní (jedna vlevo dole, druhá vpravo nahoře). Další chybu lze spatřovat v nepřesném zakreslení úsečky vpravo dole, která zřejmě reprezentuje počet meruněk, jenž má být trojnásobkem počtu hrušní.



Obr. 8: Studentský záznam grafického znázornění 4. úlohy

Ukázka grafického znázornění 4. úlohy na obrázku 9 odráží jev, kdy počty dvou různých druhů stromů jsou znázorněny v rámci jedné úsečky (tentýž jev byl interpretován na obrázcích 3 a 4).

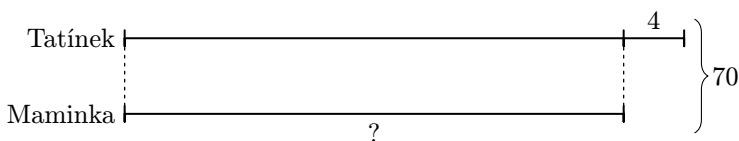


Obr. 9: Studentský záznam grafického znázornění 4. úlohy

5. úloha

Maminka a tatínek mají dohromady 70 let. Maminka je o 4 roky mladší než tatínek. Kolik let je mamince? Kolik let je tatínkovi?

Vhodné znázornění:



Výpočet: $70 - 4 = 66$

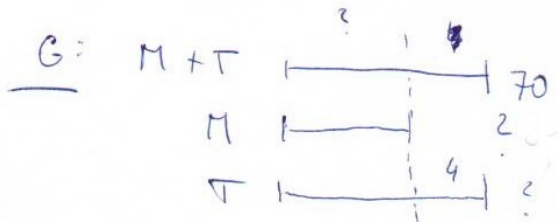
$66 : 2 = 33$

$33 + 4 = 37$

Odpověď: Mamince je 33 let, tatínkovi je 37 let.

Ukázka studentského znázornění 5. úlohy na obrázku 10 by mohla být pro žáka problematická z toho důvodu, že úsečky představující věk tatínka a věk obou rodičů jsou téměř shodné, přitom ve skutečnosti stejný počet let nereprezentují. Při grafickém znázornění slovní úlohy s využitím úseček či obdélníků je třeba brát

zřetel i na poměry těchto útvarů v souvislosti s počtem objektů či jednotek, které reprezentují.



Obr. 10: Studentský záznam grafického znázornění 5. úlohy

Lze konstatovat, že výše uvedené ukázky představující chybná či nesprávná studentská použití grafického znázornění slovních úloh se jeví jako kritická pro jejich samotná řešení. Dá se tedy předpokládat, že by se mohly stát dalším zdrojem žákovských obtíží při řešení slovních úloh, neboť neodráží reálnou situaci v úlohách zadanou.

Závěr

Řešení slovních úloh je často označováno jako kritické místo ve výuce matematiky na 1. i 2. stupni ZŠ. V rámci různých výzkumů bylo v minulosti poukázáno na možné a opakující se příčiny, které mohou vést žáky k problémům při řešení slovních úloh (Blažková et al., 2000; Blažková, 2020; Hejný, 1995; Novotná, 2000; Rendl et al., 2013; Stehlíková, 1995; Vondrová et al., 2015; Vondrová et al., 2019).

Zkušenosti autorky tohoto článku získané při práci s žáky řešení slovní úlohy potvrzují, že kritickou oblastí této problematiky může být chybný či nevhodně zvolený grafický názor reálné situace zadané ve slovní úloze, což potvrzují další výzkumy (Vondrová et al., 2015; Vondrová et al., 2019). Autorka tohoto článku rovněž pozorovala, že použití optimálního grafického znázornění pro slovní úlohu bývá častým problémem nejen u žáků, ale i u studentů učitelství 1. stupně ZŠ. Toto problematické místo výuky matematiky sledované u studentů učitelství 1. stupně ZŠ se stalo zdrojem a inspirací pro realizaci popsaneého průzkumu.

Tento článek je výsledkem průzkumu, který ověřoval znalosti a dovednosti studentů vztahující se k tvorbě grafického názoru při řešení slovních úloh. Průzkum byl realizován formou písemné práce v závěru podzimního semestru akademického roku 2023/2024, a zúčastnilo se ho 75 studentů čtvrtého ročníku učitelství 1. stupně na Pedagogické fakultě MU v Brně. Znalosti a dovednosti v této oblasti byly identifikovány prostřednictvím zadání vybraných slovních úloh z učiva matematiky 1. stupně, které měli studenti vzorově vyřešit s využitím vhodného grafického znázornění. Výsledky tohoto průzkumu odhalují, že přibližně 16 % studentů při řešení vybraných slovních úloh učiva 1. stupně ZŠ použilo nesprávné či nevhodné grafické znázornění, které často vedlo k chybnému řešení úlohy. Ukázky vybraných grafických záznamů slovních úloh studentů této skupiny reflektují nedostatečnou znalost a dovednost v této problematice a výše v textu jsou komentovány. Lze očekávat, že způsoby nevhodného grafického znázornění, které jsou ve studentských záznamech evidovány, by se mohly žákům jevit jako problematické při vlastním řešení slovních úloh nebo být zdrojem dalších obtíží, neboť neodráží reálnou situaci zadání úloh. U těchto studentských záznamů jsou pozorovány následující fenomény, z nichž mnohé se opakovaly:

1. U slovních úloh typu „o n více/méně“ či „ n krát více/méně“ grafický názor často odráží jev, kdy počty dvou různých objektů jsou znázorněny v rámci počtu jednoho objektu (obr. 3, 4, 5, 6, 9).
2. Dvě úsečky různých délek představují tentýž počet objektů (obr. 8).
3. Dvě úsečky stejných délek představují různý počet objektů (obr. 10).
4. Stejný počet objektů je v jedné úloze graficky zaznamenán zástupnými symboly i úsečkou (obr. 7).
5. Dochází k poměrovým nepřesnostem při grafickém znázornění pomocí úseček (obr. 8, 10).
6. Grafický názor postrádá záznam všech číselných údajů ze zadání slovní úlohy (obr. 5).

7. U slovních úloh typu „o n méně“ a „ n krát méně“ studenti tuto skutečnost zaznamenávali škrtnutím zástupných symbolů (obr. 6, 7).

Po ukončení průzkumu byla se studenty uvedené skupiny provedena reflexe jejich nesprávných či nevhodných možností grafického znázornění zadaných slovních úloh za účelem eliminace mezer a chyb odhalených v této problematické oblasti, aby se proces nevhodného grafického záznamu nepřenesl dále do samotné výuky.

Literatura

- [1] Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (1992). *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 2. část*. Masarykova univerzita.
- [2] Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., & Blažek, M. (2000). *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*. Paido.
- [3] Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2011). *Kapitoly z didaktiky matematiky: slovní úlohy, projekty*. Pedagogická fakulta MU.
- [4] Blažková, R. (2020). *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Munipress.
- [5] Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. Munipress.
- [6] Cook, M. P. (2006). Visual representations in science education: The influence of prior knowledge and cognitive load theory on instructional design principles. *Science Education*, 90(6), 1073–1091. <https://doi.org/10.1002/sce.20164>
- [7] Divíšek et al. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. SPN.
- [8] Hejný, M. (1995). Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika*, 45(4), 386–399.
- [9] Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Pedagogická fakulta UK.

- [10] Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. SPN.
- [11] Malinová, E. (1983). *Didaktika matematiky na prvním stupni základní školy*. Univerzita Karlova.
- [12] Novák, B. (1999). *Matematika III. Několik kapitol z didaktiky matematiky*. Pedagogická fakulta Univerzity Palackého.
- [13] Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [14] Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- [15] Stehlíková, N. (1995). How children solved a mathematical word problem. An analysis. *ADUC (Acta Didactica Univer. Comenianae Mathematica)*, 4, 33–54.
- [16] Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Karolinum.
- [17] Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha*. Karolinum.
- [18] Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83–94. <https://doi.org/10.1159/000202727>
- [19] Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh*. SPN.

Abstract

Many Czech and foreign researchers consider the topic of word problems to be a critical moment in the teaching of mathematics at the 1st and 2nd grade of elementary school. In connection with this fact, a wide range of professional publications focused on the sources of difficulties that students face when solving word problems was created. Some publications see the pupil's own gra-

phic representation of the situation in the word problem as a problematic point when solving word problems. Following on from the results of the aforementioned researches, this article presents a study based on a survey that focused on the ways of graphical representation of word problems by students of the 4th year of teaching at the 1st grade of elementary school. The aim of the article is to present the results of the survey, which reveal the critical points of the described group of students in the creation of an optimal graphic record of the given situation in the word task. It can be expected that these gaps could be another cause of errors and problems of the students themselves in solving word problems in the future. This study could become a useful source of inspiration for primary school teaching students as well as primary school teachers in the described area.

Jitka Panáčová

Katedra matematiky PedF MU Brno

Poříčí 31

603 00 Brno

e-mail: panacova@ped.muni.cz