

Učitel matematiky

Dag Hrubý

Sbírky maturitních úloh z matematiky z let 1879-1934

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 4, 217–228

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152995>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

SBÍRKY MATURITNÍCH ÚLOH Z MATEMATIKY Z LET 1879–1934

DAG HRUBÝ

Sbírký maturitních úloh z matematiky představují užitečný didaktický materiál pro učitele matematiky na středních školách. Podávají svědectví o výuce matematiky v daném období, ve kterém byly vydány. Podnětem k napsání tohoto článku byly sbírky Josefa Dvořáka z let 1928–1934, které jsem získal v roce 2022 darem. Lze předpokládat, že druhé vydání Dvořákovy sbírky souvisí se změnou učebních plánů gymnázií a reálků, které byly vydány v roce 1933 v rámci tzv. Dérerovy reformy.¹ Napadlo mne zjistit, které podobné sbírky byly vydány před rokem 1934. Pro potřeby tohoto článku jsem vybral pouze sbírky, které mají ve svém názvu v jistém tvaru slovo *maturitní*. Podařilo se mi shromáždit následující sbírky:

Wallentin, F. (1888). *Maturitätsfragen aus der Mathematik zum Gebrauche für die obersten Klassen der Gymnasien und Realschulen*. Gerold's Sohn.

Sommer, J., & Hübner, V. (1905). *Maturitní otázky z matematiky*. Jednota českých matematiků.

Tomší, F. (1927). *Sbírka maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie*. Nákladem vlastním.

Kniha Františka Tomší vyšla ve druhém upraveném vydání:
Tomší, F. (1930). *Sbírka maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie*. Jednota československých matematiků a fysiků.

¹Ivan Dérer byl v letech 1929–1934 ministrem školství a národní osvěty.

Dvořák, J. (1928). *Maturitní otázky z matematiky*. Česká grafická unie a. s.

Kniha Josefa Dvořáka vyšla ve druhém přepracovaném vydání ve dvou dílech:

Dvořák, J. (1932). *Maturitní otázky z matematiky. Díl I*. Nákladem vlastním.

Dvořák, J. (1934). *Maturitní otázky z matematiky. Díl II*. Nákladem vlastním.

Bezloja, A. (1934). *Sbírka maturitních úkolů z matematiky pro střední školy*. Dědictví Havlíčkovo.

Nejslavnější sbírkou je sbírka Franze Wallentina, která poprvé vyšla v roce 1879. Sbírkou je možné stále zakoupit např. na Amazonu. Třetí vydání sbírky z roku 1888 má rozsah 200 stran a je rozděleno do dvou kapitol s názvy *Aritmetika* a *Geometrie*. Kapitola *Aritmetika* obsahuje následující partie matematiky:

rovnice prvního stupně s jednou neznámou, rovnice prvního stupně s více neznámými, rovnice druhého stupně s jednou neznámou, rovnice druhého stupně s více neznámými, neurčité rovnice, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost, výpočet úroků a důchodů, kombinatorika, binomická věta, odmocniny, logaritmy, řetězové zlomky.

Kapitola *Geometrie* se skládá z podkapitol: Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, Analytická geometrie, které obsahují tyto partie matematiky:

konstrukční úlohy, pravidelné mnohoúhelníky, výpočetní úlohy z planimetrie, goniometrie a goniometrické rovnice, pravoúhlý trojúhelník, obecný trojúhelník, čtyřúhelník, sférická trigonometrie, hranol, válec, jehlan, kužel, pravidelná tělesa, přímka, kružnice, elipsa, parabola, hyperbola.

Sbírka Jana Sommera, profesora gymnázia v Praze III a Václava Hübnera, profesora reálky na Královských Vinohradech, má rozsah 130 stran a obsahuje 1 114 úloh.² Sbírka je rozdělena do dvou kapitol: *Algebra* a *Geometrie*. Kapitola *Algebra* má tento obsah:

²V době vydání této sbírky byly Královské Vinohrady čtvrtým největším samostatným městem na území České republiky. K Praze byly připojeny v roce 1922.

rovnice prvního stupně, rovnice druhého stupně o jedné neznámé, rovnice vyšší o jedné neznámé, rovnice druhého stupně o dvou neznámých, neurčité rovnice prvního stupně o dvou neznámých, řady aritmetické, řady geometrické, složené úrokování, skupiny, binomická poučka, pravděpodobnost.

Kapitola *Geometrie* je členěna následovně:

planimetrie, stereometrie, úlohy a rovnice goniometrické, trigonometrie, sférická geometrie, konstruování algebraických výrazů, algebraické řešení geometrických úloh strojných, analytická geometrie.

Na závěr této sbírky je uvedeno upozornění, ve kterém je mimo jiné zmíněno, že podle ministerských pokynů pro gymnázia se doporučuje k písemné maturitní zkoušce jedna úloha z aritmetiky, druhá úloha z trigonometrie, třetí úloha ze stereometrie a čtvrtá úloha z analytické geometrie.

Sbírka Františka Tomší, profesora reálky v Kutné Hoře, má rozsah 90 stran a obsahuje 357 úloh z matematiky a 220 úloh z deskriptivní geometrie. Úlohy z matematiky jsou rozděleny do následujících kapitol: *Algebra*, *Planimetrie*, *Stereometrie*, *Trigonometrie rovinná*, *Trigonometrie sférická*, *Analytická geometrie*. V kapitole *Algebra* je zařazeno také 16 úloh z infinitezimálního počtu. Druhé vydání sbírky obsahuje navíc kapitolu *Základy vyšší matematiky*.

Sbírka Josefa Dvořáka, profesora reálky v Písku, rozsahem 392 stran, obsahuje ve svém prvním vydání 480 řešených příkladů. Je členěna do následujících kapitol: *Rovnice*, *Řady*, *Složené úrokování*, *Kombinatorika*, *Počet pravděpodobnosti*, *Planimetrie*, *Stereometrie*, *Trigonometrie rovinná*, *Trigonometrie sférická*, *Analytická geometrie*, *Začátky počtu infinitezimálního*. V kapitole *Řady* jsou vedle řad zařazeny také aritmetická a geometrická posloupnost. Kapitola *Rovnice* obsahuje rovnice algebraické, rovnice iracionální, rovnice logaritmické a exponenciální a rovnice goniometrické. *Pravděpodobnost* je rozdělena na matematickou pravděpodobnost, pravděpodobnost v geometrii, matematickou naději a pravděpodobnost a posteriori. Druhé vydání sbírky obsahuje navíc historické a metodické poznámky.

Alois Bezloja, ředitel Státního československého ženského učitelského ústavu v Brně, je autorem sbírky, která obsahuje 565 úloh. Jsou zde úlohy z aritmetiky (190 úloh), úlohy geometrie (337 úloh) a úlohy zařazené do tzv. dodatku, který obsahuje 38 úloh z pojišťovací aritmetiky, sférické trigonometrie a infinitezimálního počtu.

Všechny uvedené sbírky jsou k dispozici v Pedagogické knihovně J. A. Komenského v Praze, Jeruzalémská 957/12. Z uvedených sbírek jsem vybral úlohy, které mne zaujaly. Úlohy jsem řešil podle vlastního uvážení, a tak je velmi pravděpodobné, že existují jejich elegantnější řešení. Pokud najdete jiné řešení, které Vám udělá radost, tak mi dejte vědět na adresu hruby@gymjev.cz.

Úloha 1 (Wallentin, 1888, s. 31). Zlomek $\frac{674}{385}$ je rozložen na tři částečné zlomky tak, že součet jejich čítelů je roven cifernému součtu jejich jmenovatelů.³

Řešení. Protože platí $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, můžeme požadovaný rozklad napsat ve tvaru

$$\frac{674}{385} = \frac{x}{5} + \frac{y}{7} + \frac{z}{11}. \quad (1)$$

Podle zadání je součet čítelů $x + y + z$ roven cifernému součtu jmenovatelů $5 + 7 + 1 + 1$. To znamená, že je

$$\begin{aligned} x + y + z &= 14 \\ z &= 14 - x - y. \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (1) dostáváme

$$\frac{674}{385} = \frac{x}{5} + \frac{y}{7} + \frac{14 - x - y}{11} = \frac{42x + 20y + 490}{385}.$$

³Der Bruch $\frac{674}{385}$ ist in drei Partialbrüche zu zerlegen, so dass die Summe der Zähler gleich ist der Summe der Ziffern, aus denen die drei Nenner bestehen.

Pro čitatele tohoto zlomku platí

$$42x + 20y + 490 = 674$$

$$42x + 20y = 184$$

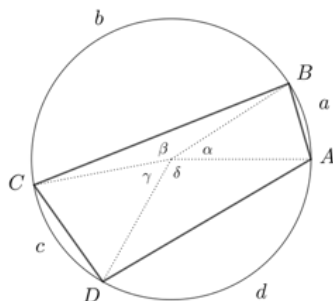
$$21x + 10y = 92$$

$$10y = 92 - 21x.$$

Číslo $92 - 21x$ je dělitelné 10. To je možné pouze v případě, že je $x = 2$. Potom je $10y = 50$, a tedy $y = 5$ a $z = 7$. Řešením úlohy je rozklad $\frac{674}{385} = \frac{2}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{11}$.

Úloha 2 (Wallentin, 1888, s. 109). Obvod kruhu s poloměrem r je rozdělen na čtyři části a, b, c, d tak, že pro jejich poměry platí $a : b = 1 : 5$, $a : c = 2 : 3$, $d : c = 5 : 2$. Vypočtěte obsah tětívového čtyřúhelníku, který je těmito částmi vymezen.⁴

Řešení.



Obr. 1: Tětívový čtyřúhelník

Z daných poměrů sestavíme postupný poměr $a : b : c : d = 4 : 20 : 6 : 15$. Úhlu 360° odpovídá 45 dílů, jednomu dílu 8° . Označíme-li S střed kružnice opsané tětívovému čtyřúhelníku $ABCD$ a úhly $\alpha = |\angle ASB|$, $\beta = |\angle BSC|$, $\gamma = |\angle CSD|$, $\delta = |\angle DSA|$ (obr. 1), pak pro obsah daného čtyřúhelníku platí

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta),$$

⁴Die Peripherie eines Kreises mit dem radius r ist so in vier Theile a, b, c und d getheilt, dass sich $a : b = 1 : 5$, $a : c = 2 : 3$, $d : c = 5 : 2$ verhalten. Der Flächeninhalt des durch diese Theilungspunkte bestimmten Sehnenviereckes soll berechnet werden.

kde r je poloměr kružnice čtyřúhelníku opsané. Z poměrů $a : b : c : d = 4 : 20 : 6 : 15$ dostaneme následující velikosti úhlů: $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 160^\circ$, $\gamma = 48^\circ$, $\delta = 120^\circ$. Po dosazení do vzorce pro obsah dostáváme

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin 32^\circ + \sin 160^\circ + \sin 48^\circ + \sin 120^\circ)$$

$$S = \frac{1}{2}r^2(\sin 32^\circ + \sin 48^\circ + \sin 160^\circ + \sin 120^\circ)$$

$$S = \frac{1}{2}r^2(2 \sin 40^\circ \cos 8^\circ + 2 \sin 140^\circ \cos 20^\circ)$$

$$S = r^2(\sin 40^\circ \cos 8^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ)$$

$$S = r^2 \sin 40^\circ \cos 14^\circ \cos 6^\circ.$$

Úloha 3 (Sommer & Hübner, 1905, s. 9). Ve dvou soustavách logaritmických, které mají základy kladné a celé, jest:

$$\log_b a - \log_a b = \frac{8}{3} \quad (2)$$

$$ab = 16. \quad (3)$$

Jest určití základy a, b .

Řešení. Protože je $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ a tedy také $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$, můžeme soustavu napsat ve tvaru

$$\frac{\log a}{\log b} - \frac{\log b}{\log a} = \frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\log a + \log b = \log 16. \quad (5)$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme

$$3 \log^2 a - 8 \log a \log b - 3 \log^2 b = (3 \log a + \log b)(\log a - 3 \log b) = 0.$$

Platí $\log a = 3 \log b$ nebo $\log a = -\frac{1}{3} \log b$. Odtud plyne $a = b^3$ nebo $a = b^{-\frac{1}{3}}$. Po dosazení do rovnice (2) dostáváme $b^4 = 16$ nebo $b^{\frac{2}{3}} = 16$, tedy $b = 2$ nebo $b = 64$. Odpovídající hodnoty pro a jsou $a = 8$, $a = \frac{1}{4}$. Vzhledem k zadání úlohy vyhovují hodnoty $a = 8$ a $b = 2$.

Úloha 4 (Sommer & Hübner, 1905, s. 44). Jaký jest trojúhelník v němž $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{3}{7}$?

Řešení. Platí, že $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} = \frac{2}{5}$ a $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \beta}{1+\cos \beta}} = \frac{3}{7}$. Po umocnění obdržíme

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{4}{25} \quad \text{a} \quad \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} = \frac{9}{49}.$$

Odtud již plyne $\cos \alpha = \frac{21}{29}$ a $\cos \beta = \frac{20}{29}$. Nyní se zaměříme na čísla 20, 21, 29. Pokud odhalíme, že je $20^2 + 21^2 = 29^2$, tak máme úlohu vyřešenou. Hledaný trojúhelník je pravoúhlý s přeponou délky 29 a odvěsnami délek 20 a 21.

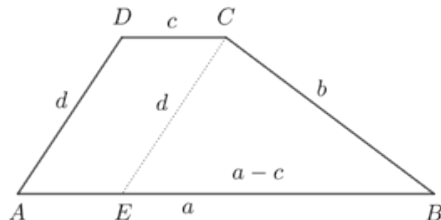
Úloha 5 (Tomší, 1930, s. 15). Určiti obsah lichoběžníku ze známých stran a, b, c, d .

Řešení. Obsah S lichoběžníku je rovem součtu obsahů kosodélníku $AECD$ a trojúhelníku EBC (obr. 2). Pro obsah kosodélníku platí $S_{AECD} = cv$, kde v je výška lichoběžníku. Tuto výšku určíme ze vzorce $S = \left(\frac{a+c}{2}\right)v$ pro obsah lichoběžníku. Je tedy $v = \frac{2S}{a+c}$. Obsah trojúhelníku EBC určíme pomocí Hérónova vzorce. Pro obvod $2s$ tohoto trojúhelníku platí $2s = a - c + b + d$, resp. $s = \frac{a-c+b+d}{2}$. Po dosazení do Hérónova vzorce dostaneme

$$S_{EBC} = \sqrt{s(s-a+c)(s-b)(s-d)}$$

$$S_{EBC} = \sqrt{\left(\frac{a-c+b+d}{2}\right)\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a-c-b+d}{2}\right)\left(\frac{a-c+b-d}{2}\right)}$$

$$S_{AECD} = cv = \frac{2Sc}{a+c}.$$



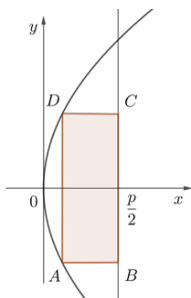
Obr. 2: Lichoběžník $ABCD$

Pro obsah lichoběžníku platí $S = S_{AECD} + S_{EBC} = \frac{2Sc}{a+c} + S_{EBC}$. Je tedy $S - \frac{2Sc}{a+c} = S_{EBC}$ a $S \cdot \frac{a-c}{a+c} = S_{EBC}$ a $S = \frac{a+c}{a-c} S_{EBC}$. Po dosazení za S_{EBC} obdržíme výsledný vzorec

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{a+c}{a-c} \right) \sqrt{(a-c+b+d)(b+c+d-a)(a-c-b+d)(a-c+b-d)}.$$

Úloha 6 (Tomší, 1930, s. 48). Ohniskem paraboly $y^2 = 2px$ vedena sečna rovnoběžná s osou y . Vepsati takto vzniklé úseči největší pravoúhelník, jehož dva vrcholy leží na sečně a dva na parabole.

Řešení.



Označíme-li x -ovou souřadnici průsečíku přímky AD s osou x jako x , pak bude $|AB| = \frac{p}{2} - x$ a $|AD| = 2\sqrt{2px}$ (obr. 3). Pro obsah pravoúhelníku dostáváme

$$S = \left(\frac{p}{2} - x \right) 2\sqrt{2px} = \sqrt{2p^3x - 8p^2x^2 + 8px^3}.$$

Snadno můžeme odhadnout, že minimální hodnotu má funkce $S = S(x)$ v bodech $x = 0$ a $x = \frac{p}{2}$. Maximum určíme pomocí první derivace

Obr. 3: Parabola
 $y^2 = 2px$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{p^3 - 8p^2x + 12px^2}{\sqrt{2p^3x - 8p^2x^2 + 8px^3}}.$$

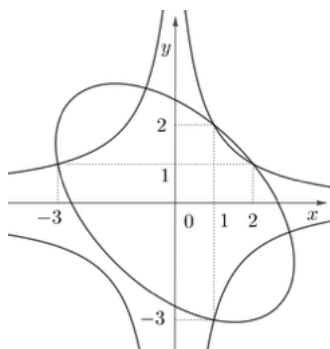
Nulové body první derivace jsou kořeny rovnice $12px^2 - 8px^2 + p^3 = p(6x - p)(2x - p) = 0$. Snadno nahlédneme, že maximum je v bodě $x = \frac{p}{6}$.

Úloha 7 (Dvořák, 1932, s. 20). Jest stanoviti racionální kořeny soustavy rovnic.

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \quad (6)$$

$$x + x^2y^2 + y = 7. \quad (7)$$

Řešení. Proti roku 1932 máme výhodu, že si pomocí GeoGebra můžeme rychle ukázat geometrickou interpretaci dané úlohy (obr. 4).



Obr. 4: Grafické řešení úlohy 7

Nyní ihned vidíme, že úloha má 6 řešení. Snadno ověříme, že podmínkám úlohy vyhovují dvojice $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -3)$, $(-3; 1)$. Zbývající dvojice nejsou dvojice racionálních čísel. Tyto úvahy podpoříme algebraickým řešením dané soustavy. Zvolíme-li substituci $x + y = u$, $xy = v$, pak je $u^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v$. Po dosazení do rovnic (6), (7) obdržíme soustavu

$$u^2 - v = 7 \quad (8)$$

$$u + v^2 = 7. \quad (9)$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme rovnici

$$u^2 - v^2 - v - u = 0$$

$$(u + v)(u - v) - (u + v) = 0$$

$$(u + v)(u - v - 1) = 0.$$

Z poslední rovnice plyne $u + v = 0$ nebo $u - v - 1 = 0$. V případě $u = -v$ dostaneme po dosazení do rovnice (8) nebo (9) rovnici $u^2 + u - 7 = 0$, která ale nemá racionální kořeny. Zbývá tedy možnost $v = u - 1$. Po dosazení do rovnice (8) nebo (9) dostaneme rovnici $u^2 - u - 6 = (u - 3)(u + 2) = 0$. Je tedy $u = 3$, $v = 2$ nebo $u = -2$, $v = -3$. V případě $u = 3$, $v = 2$ dostáváme soustavu

$$x + y = 3$$

$$xy = 2.$$

Řešením této soustavy jsou dvojice $(2; 1), (1; 2)$. V případě $u = -2, v = -3$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}x + y &= -2 \\ xy &= -3.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou dvojice $(-3; 1), (1; -3)$.

Poznámka. Není těžké odhadnout, že osy elipsy $x^2 + xy + y^2 = 7$ jsou přímky $y = x$ a $y = -x$ a můžeme tak určit souřadnice vrcholů elipsy. Po dosazení do rovnice elipsy dostáváme tyto souřadnice

$$(\sqrt{7}; -\sqrt{7}), (-\sqrt{7}; \sqrt{7}), \left(\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right), \left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right).$$

Pro poloosy pak platí $a = \sqrt{14}, b = \sqrt{\frac{14}{3}}$. Protože střed elipsy leží v počátku soustavy souřadnic, můžeme říci, že elipsa $x^2 + xy + y^2 = 7$ vznikla z elipsy $x^2 + 3y^2 = 14$ jejím otočením o úhel $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Příslušná transformace je dána rovnicemi

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi = x \cos \frac{3}{4}\pi + y \sin \frac{3}{4}\pi = -x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi = -x \sin \frac{3}{4}\pi + y \cos \frac{3}{4}\pi = -x \frac{\sqrt{2}}{2} - y \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

V soustavě souřadnic $O_{x', y'}$ má elipsa $x^2 + xy + y^2 = 7$ rovnici $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Po dosazení za x' a y' postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{(x-y)^2}{14} + \frac{(x+y)^2}{\frac{14}{3}} &= 2 \\ (x-y)^2 + 3(x+y)^2 &= 28 \\ x^2 + xy + y^2 &= 7.\end{aligned}$$

Maturitní zkoušky na gymnáziích byly v Rakousko-Uhersku zavedeny v roce 1849 v rámci Bonitz-Exnerovy reformy. K jejich

výrazné změně došlo v roce 1908, kdy se uskutečnila tzv. Marchetova reforma.⁵ Jedním z výsledků Marchetovy reformy je zavedení pojmu funkce a základů infinitezimálního počtu do učebních osnov matematiky na gymnáziích a reálkách. Sbírky maturitních úloh z matematiky, které byly vydány před rokem 1908, úlohy z matematické analýzy neobsahují. Z rozboru zde uvedených sbírek maturitních úloh z matematiky plyne, že obsahují v průměru náročnější úlohy v porovnání se současným stavem. Srovnávat náročnost výuky matematiky na gymnáziích v první polovině dvacátého století (přesněji do roku 1939) se současnou výukou matematiky je obtížné, protože probíhala za zcela jiných podmínek. V této souvislosti doporučuji článek Petra Vopěnky *Memorandum o škole a matematice*.⁶

Literatura

- [1] Bezloja, A. (1934). *Sbírka maturitních úkolů z matematiky pro střední školy*. Dědictví Havlíčkovo.
- [2] Dvořák, J. (1928). *Maturitní otázky z matematiky*. Česká grafická unie a. s.
- [3] Dvořák, J. (1932). *Maturitní otázky z matematiky. Díl I.* Nákladem vlastním.
- [4] Dvořák, J. (1934). *Maturitní otázky z matematiky. Díl II.* Nákladem vlastním.
- [5] Sommer, J., & Hübner, V. (1905). *Maturitní otázky z matematiky*. Jednota českých matematiků.
- [6] Tomší, F. (1927). *Sbírka maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie*. Nákladem vlastním.
- [7] Tomší, F. (1930). *Sbírka maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie*. Jednota československých matematiků a fysiků.

⁵Gustav Marchet byl v letech 1906–1908 ministr kultu a vyučování Předlitavska, tj. Rakousko-Uherska bez Uherska.

⁶<https://adoc.pub/memorandum-o-kole-a-matematice-petr-vopnka-emeritni-profesor.html>

- [8] Wallentin, F. (1888). *Maturitätsfragen aus der Mathematik zum Gebrauche für die obersten Klassen der Gymnasien und Realschulen*. Gerold's Sohn.

Dag Hrubý
K. H. Borovského 476
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz