Matej Slabý

Spojiť či nespojiť? Spojité verzus diskrétne grafy

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 1, 21–39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153005

SPOJIŤ ČI NESPOJIŤ?
SPOJITÉ VERZUS DISKRÉTNE GRAFY

Matej Slabý[1]

Úvod

Téma funkcie je jednou z najdôležitejších oblastí matematického vzdelávania a učebných osnov matematiky v rôznych krajinách. Na druhej strane však viaceré štúdie potvrdzujú pretrvávajúce problémy, ktoré majú žiaci s funkciami (napr. Acevedo Nistal et al., 2014; Sebsibe et al., 2019). V spolupráci s univerzitami z Nemecka, Poľska, Cypru a Holanska sa naša Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach zapojila do projektu FunThink na podporu rozvoja funkčného myslenia žiakov a učiteľov matematiky. Zdieľame spoločnú víziu, že matematické vzdelávanie sa môže výrazne zlepšiť posilnením funkčného myslenia. Funkčné myslenie sa považuje za „proces budovania konceptu funkcie a uvažovania o funkciách“ (Blanton et al., 2015; Pittalis et al., 2020; FunThink team, 2021). Na všetkých úrovniach matematického vzdelávania sa rozvoj funkčného myslenia považuje za kľúčovú oblasť vo vzdelávaní matematiky od začiatku dvadsiateho storočia (Vollrath, 1986).

Dôvodom ťažkostí žiakov s funkčným myslením môže byť abstraktná povaha „funkcií“, ktoré sú prístupné len prostredníctvom špecifických reprezentácií (napr. graf, rovnica, tabuľka, opis situácie), alebo potreba prechodu medzi matematikou a reálnym kontextom (napr. McCulloch et al., 2022; Ostermann et al., 2018; Ronda, 2015). V rámci projektu FunThink sme preto vyvinuli kurz

[1] Tento príspevok vznikol s podporou medzinárodného projektu FunThink Project Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677).

pre budúcich učiteľov matematiky a učiteľov matematiky z praxe, ako aj výskumný nástroj zameraný na identifikáciu ich špecifických matematických znalostí. Pre ďalšie vzdelávanie učiteľov je kľúčové tieto znalosti identifikovať, analyzovať a následne pomocou navrhnutých aktivít rozvíjať ich funkčné myslenie.

Hlavným cieľom tejto štúdie je charakterizovať poznanie a odborné vedomosti učiteľov matematiky z praxe a študentov učiteľstva matematiky o pojme funkcia v kontexte rozvoja funkčného myslenia pri riešení matematických úloh. V rámci projektu FunThink sme vytvorili výskumný nástroj, ktorý obsahoval 36 matematických úloh. Dôvodom je skutočnosť, že matematické úlohy zohrávajú veľmi dôležitú úlohu v profesijnom rozvoji učiteľov matematiky (napr. Zaslavsky & Leikin, 2004). Tieto úlohy riešilo 16 študentov učiteľstva a 9 učiteľov v praxi. Na podrobnú analýzu sme vybrali niekoľko úloh, a pomocou kvalitatívnej výskumnej metódy Task-Based Interview sme s respondentmi viedli semištruktúrované rozhovory, aby sme lepšie porozumeli spôsobu, ako učitelia v praxi a budúci učitelia rozumejú zadaným úlohám a ako ich riešia (Goldin, 2000). Následne sme analyzovali písomné riešenia úloh a nahraté záznamy z rozhovorov. V tomto príspevku sme sa zamerali na dve úlohy, ktoré sa týkali spojitých a diskrétnych grafov.

Podľa viacerých výskumov (napr. Janvier, 1983; Kerslake, 1981) robí žiakom nemalé problémy rozhodovanie o tom, či zakreslenie grafu je alebo má byť reprezentované spojitým alebo diskrétnym spôsobom. Žiaci chybujú oboma smermi, t. j. reprezentujú alebo interpretujú spojité údaje diskrétnym spôsobom a reprezentujú alebo interpretujú diskrétne údaje spojitým spôsobom. Vysvetlíme to na dvoch úlohách (pozri obrázok 1 a 2). Úloha 1 je zameraná na diskrétny dej, to je taký, v ktorom sa hodnoty menia skokovo, a teda v oddelených, nespojitých krokoch (zdvojnásobovanie zrniečok). Úloha 2 je modelovaná pomocou spojitého deja, a teda plynulým grafom, bez prerušenia (postupné dvíhanie vodnej hladiny).

Úloha 1: Vynálezca šachovej hry údajne požadoval od indického vládcu odmenu takto – za prvé pole šachovnice jedno pšeničné zrnko, za druhé pole šachovnice dve pšeničné zrnká, za tretie pole štyri zrnká,.. Čiže za každé ďalšie pole šachovnice dvojnásobné množstvo zrniek ako za predchádzajúce. Mohol mu vládca odmenu vyplatiť? Načrtnite graf závislosti počtu pšeničných zrniek od počtu hracích políčok šachovnice.

Obr. 1: Ukážka úlohy zameranej na diskrétny dej
(`www.galeje.sk` – exponenciálna funkcia)

Úloha 2: Pri prívalových dažďoch stúpa vodná hladina riek veľmi rýchlo. V Slavkovskom potoku pri Brezovici sa každú hodinu výška vodnej hladiny zdvojnásobuje. Akú vodnú hladinu bude mať rieka v priebehu piatich hodín, ak jej nepovodňový vodný stav je 8 cm? Načrtnite graf závislosti výšky vodnej hladiny od času.

Obr. 2: Ukážka úlohy zameranej na spojitý dej

Ak by sme požiadali žiakov o predikciu oboch situácií, často sa stáva, že v oboch prípadoch využijú graf, ktorý bude spojitý. Leinhardt et al. (1990) uvádzajú, že žiaci často spájajú body z dôvodov, ktoré súvisia s ich predstavami o vzhľade grafu (spojením bodov je graf presnejší a úhľadnejší); alebo naopak, body by sa mali spojiť len vtedy, ak ležia na jednej priamke a/alebo tvoria nejaký iný rozpoznateľný vzor. Viaceré štúdie tiež poukázali na tendenciu žiakov "vidieť"len vyznačené body na grafe spojitej funkcie (napr. Stein & Leinhardt, 1989).

V slovenských učebniciach matematiky (Hecht, 2006; Hecht & Černek, 2002; Kubáček, 2010; Odvárko et al., 1985) sa len veľmi zriedkavo vyskytujú úlohy zamerané na diskrétny dej. Ak sa taká úloha vyskytuje, nie je riešená, nachádza sa v časti cvičenia na samostatnú prácu alebo zopakovanie učiva. Vyskytujú sa v nich úlohy, v ktorých sú pre spojitý dej známe iba diskrétne hodnoty a hodnoty medzi jednotlivými bodmi sú len odhadované, prípadne sú body spájané úsečkami. Ide teda o dosť aktuálny problém, s ktorým sa stretávajú, ako budeme vidieť v analýze úloh nižšie, aj učitelia matematiky z praxe a budúci učitelia matematiky, pričom sami riešia to, či body v grafe funkcie spájať alebo nie a prečo.

V tomto príspevku sa zameriame na jeden smer, či a kedy reprezentujú budúci učitelia a učitelia matematiky z praxe spojitý dej ako diskrétne body a kedy body v grafe spájajú. So zreteľom na teoretický úvod odpovieme na výskumnú otázku: Aké špecifické poznanie učiteľov matematiky z praxe a budúcich učiteľov matematiky sa prejavuje pri riešení matematických úloh zameraných na konštrukciu grafu funkcie? K tomu nám budú slúžiť dve úlohy z výskumného nástroja (pozri obrázky 3 a 4), ktoré obe skupiny riešili.

Ak sa má umelá družica Zeme pohybovať po kruhovej dráhe, musí dosiahnuť určitú minimálnu rýchlosť, tzv. prvú kozmickú rýchlosť. V tabuľke sú uvedené niektoré dvojice zaznamenávajúce závislosť číselnej hodnoty v rýchlosti (km/s) od číselnej hodnoty vzdialenosti h (v stovkách km) družice od Zeme.

h	$0,5$	1	2	3	4	5	6	7
v	$7,6$	$7,4$	$6,9$	$6,5$	$6,2$	$5,9$	$5,7$	$5,4$

Zostrojte graf funkcie danej uvedenou tabuľkou.

Obr. 3: Úloha 12 z výskumného nástroja (Odvárko, 1985, s. 50)

Alex si kúpil nové auto, na ktorom ukazovateľ prejdených kilometrov udáva 80 km. To sa však čoskoro zmení, lebo sa zajtra chystá na väčší výlet. Opíš ako (tabuľkou, grafom, rovnicou), ak bude jeho priemerná rýchlosť 70 km/h.

Obr. 4: Úloha 30 z výskumného nástroja (upravená úloha zo stránky www.galeje.sk)

Metodológia

Do výskumu sa zapojili budúci učitelia matematiky (výskumná vzorka 1) a učitelia matematiky z praxe (výskumná vzorka 2), ktorí riešili sériu úloh (výskumný nástroj) zameranú na funkcie v rámci domáceho zadania. Neskôr na stretnutiach s lektormi prebiehali skupinové rozhovory a riadené semi-štrukturované rozhovory s celými výskumnými vzorkami o ich riešeniach úloh.

Výskumná vzorka 1

Prvú výskumnú vzorku tvorili študenti učiteľstva matematiky (denná forma) v rámci predmetu Didaktika matematiky na Univerzite Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach. Kurz pozostával z 26 lekcií rozdelených do 13 stretnutí (jedno stretnutie trvalo 90 minút). Cieľom kurzu bolo rozvíjať špecializované vedomosti študentov matematiky týkajúce sa funkcií. Stretnutí sa zúčastnilo 16 študentov vo veku 22–23 rokov (2 muži a 14 žien). Boli to študenti

1. ročníka magisterského štúdia zimného semestra akademického roku 2023/2024 a všetci získali bakalársky titul v odbore matematika v kombinácii s iným predmetom (5 študentov – geografia, 4 študenti – fyzika, 2 študenti – informatika/chémia, 1 študent – biológia/psychológia/anglický jazyk).

Výskumná vzorka 2

Druhú vzorku tvorili učitelia z praxe, ktorí sa dobrovoľne zapojili do štúdie v rámci programu profesijného rozvoja v rámci národného projektu IT Akadémia. Tento projekt trval dva mesiace a obsah vzdelávania bol rozdelený do piatich celodenných stretnutí. Štúdie sa zúčastnilo deväť učiteľov druhého stupňa základnej školy. Každý z nich získal magisterský titul v odbore matematika v kombinácii s iným prírodovedným predmetom (3 učitelia – fyzika, 2 učitelia – informatika/geografia, 1 učiteľ – finančná matematika/biológia). Boli to učitelia z východnej časti Slovenskej republiky (Košický kraj), dvaja muži a sedem žien vo veku od 28 do 52 rokov s rôznou dĺžkou praxe, minimálne však dva roky.

Výskumný nástroj

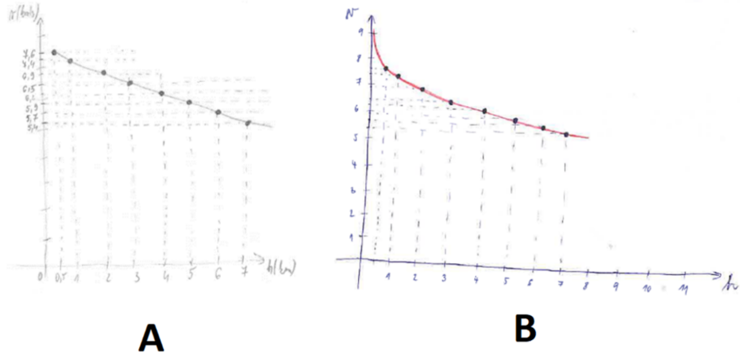
Výskumný nástroj pozostával z 36 úloh, pričom sme sa v tomto výskume zamerali iba na úlohy 12 a 30 (pozri obrázok 3 a 4), ktoré riešia problém spojité verzus diskrétne grafy. Obe úlohy majú reálny kontext; sú konštrukčné (súvisia s aktom vytvárania niečoho nového – konštrukcia grafu, vykresľovanie bodov z údajov, ...); a sú zamerané na prechody medzi rôznymi reprezentáciami funkcie (v úlohe 12 ide o prechod od slovného opisu a tabuľky ku grafu, v úlohe 30 ide o prechod od slovného opisu ku grafu, tabuľke a/alebo predpisu funkcie).

Analýza dát

V nasledujúcej časti sa pozrieme na analýzu konkrétnych riešení študentov matematiky, učiteľov matematiky z praxe a niektoré repliky zo spoločnej diskusie, ktoré nám umožnia odpovedať na výskumnú otázku. Keďže ide o vybrané časti rozhovorov, tak uvádzame aj čísla replík. Všetky mená učiteľov i študentov sú pseudonymy.

Budúci učitelia matematiky

Takmer všetci učitelia matematiky (okrem študentky Danky, pozri obrázok 5) úlohu 12 (pozri obrázok 3) vyriešili náčrtom grafu bez komentára a všetci študenti učiteľstva jednotlivé body spojili. V ôsmich prípadoch študenti načrtli graf, ktorý neskôr v diskusii opísali ako klesajúcu lineárnu funkciu (pozri obrázok 5A) a sedem študentov načrtlo graf, ktorý vizuálne pripomínal skôr exponenciálnu klesajúcu funkciu (pozri obrázok 5B).



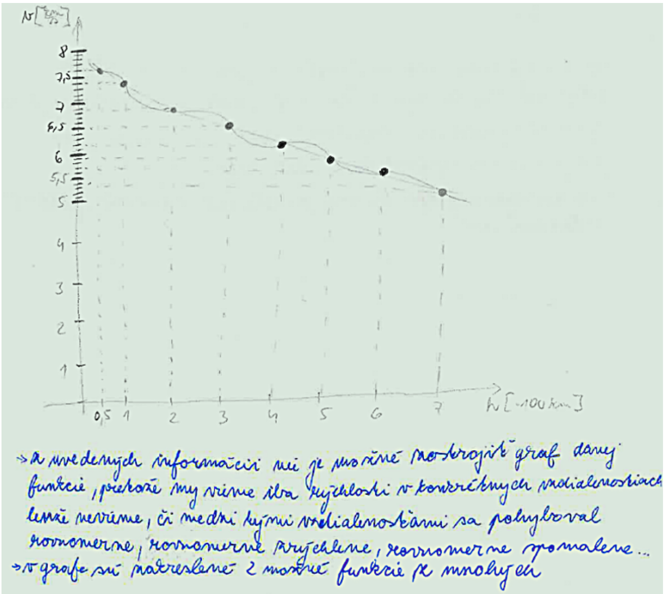
Obr. 5: Riešenia úlohy 12 dvoch študentov učiteľstva matematiky

Keď sa pozrieme na hodnoty v tabuľke na obrázku 3, vidíme, že hodnoty neklesajú o rovnakú konštantu. Avšak väčšina študentov si zrejme túto funkciu namodelovala ako lineárnu funkciu s ohľadom na jednotky (keďže ide o stovky kilometrov, dochádza k veľkému zaokrúhľovaniu). Zrejme sa spoľahli na vizuálny dojem grafu, pričom sa spätne nevrátili k tabuľke, aby skontrolovali svoje tvrdenie. Tiež tu mohlo ísť o miskoncepcie týkajúce sa škálovania (Leinhardt et al., 1990). Náčrty študentov ukazujú, že pri nesprávnej voľbe mierky dochádza k miernemu skresleniu. Dôležité sú však diskusie 1 a 2, kde študenti riešia či jednotlivé body spájať alebo nie (s krátkym odôvodnením).

Diskusia 1.

26 Lektor:	Ešte jedna otázka. Spájať, nespájať tie body, ktoré ste si načrtli?
27 Simona:	No ja som si tak asi… nevedela som či hej či nie.
28 Mária:	Ja si myslím, že spojiť.
29 Simona:	Ale tým, že… to je rýchlosť, asi by som to spojila. Asi by to nemalo logiku, keby to nebolo spojené.
30 Hana:	Ako v závislosti… tá vzdialenosť, neskočím zo vzdialenosti jedna na vzdialenosť dva.
31 Simona:	Hej.
32 Hana:	To je aj také intuitívne pre žiakov určite.
33 Simona:	Tým, že to plynie, tak by to malo byť spojené.
34 Lektor:	A ako viem, ako mám spájať tie dva body vedľa seba? Keď sa pozriem na hodnoty napríklad medzi jednotkou a dvojkou, tak medzi nimi nemám žiadne hodnoty v tabuľke.
35 Mária:	Mohla by ísť (družica) veľmi rýchlo a zrazu by spomalila. Ale, presne to bude aj v tej tridsiatke ten problém. No, že máme tendenciu to proste kresliť rovno.
36 Lektor:	Tak sa skúsme aj o tej tridsiatke porozprávať. Lebo tam vidno už, že Mária nemá spojené body priamo jednou cestou, ale niekoľkými. Prečo?
37 Mária:	Akože, neviem či to vidno, ale mám tu aj takú, že rovnú aj kľukatú, že obidva sú správne, keď v tom danom bode prejde cez ten bod, tak áno, je to z tej tabuľky, sedí to s predpisom, ale už tie jednotlivé, že proste môže to auto ísť raz rýchlejšie, raz pomaly.
38 Simona:	Že tá rýchlosť medzi tými dvoma bodmi, ktoré my máme k dispozícii, medzi nimi akože môže byť rôzna. Nemusí to… ahá, ehm.

Študentka Danka ako jediná spojila body dvoma (rôznymi, pričom ich je nekonečne veľa) spôsobmi a v komentári uvádza, že kvôli informácii o rovnomernom pohybe nevie zostrojiť jednoznačný graf danej funkcie (pozri obrázok 5). Avšak pri náčrte aj Danka spája jednotlivé body, pretože ide o pohyb v čase (rýchlosť). V diskusii 1 ju Mária dopĺňa a spomína, že máme tendenciu graf kresliť ako lineárnu funkciu, čo je aj jej riešením (pozri obrázok 5B). Študentka Simona bola celý čas neistá, či v úlohách 12 a 30 body spojiť alebo nie (pozri diskusia 1, repliky 26–33, 38), pričom ju spoločná diskusia v triede presvedčila, že urobila dobre, keď body spojila.



Obr. 6: Riešenie úlohy 12 študentky Danky

V diskusiu o úlohe 30 Mária ešte dopĺňa, že nemá rada úlohy na rýchlosť, pretože u nej pretrvali isté nezrovnalosti zo študentských čias, kedy toto učivo nebolo správne podané a tým pádom aj pochopené. Cíti v tej úlohe hlavnú rolu fyziky, avšak tvrdí, že matematici by takéto úlohy nemali nechávať iba na fyzikov a taktiež, že sú to praktické úlohy zo života a je nutné ich so žiakmi počítať. Čo je však u nej veľmi zaujímavé, v úlohe 12 jednotlivé body spojila len jednou konkrétnou cestou, v úlohe 30 sa však zamýšľa nad rôznymi možnosťami spájania jednotlivých bodov (pozri diskusia 1, replika 37).

Diskusia 2.

2 Danka: Tak je dôležitá aj takáto úloha (úloha 12), lebo je z reálneho sveta, že nie len taká čisto teoretická. Keď sa umelá družica pohybuje, tak to môže zaujať tie deti. No a potom, je tu aj práca s tabuľkou, zostrojiť graf, takže rôzne interpretácie.

3 Sofia: Súhlasím s Dankou, že práca s tým grafom a podľa mňa je zaujímavá aj z hľadiska medzipredmetových vzťahov, že s fyzikou je to prepojené. A trošku je tam aj také uvedomenie ako sa to môže správať. Keď pozerám na tvoje riešenie (Danka) tak iba v tých určitých bodoch máme ako sa to správa, ale pomimo sa to môže správať aj inak, ak tomu dobre rozumiem. No a to som si ja napríklad neuvedomila. Pospájala som to a hotovo a nepozerala som sa vôbec tak na to, že medzi tými hodnotami sa to môže tak inak správať. Že to nemusí byť takto presne.

4 Lektor: Ide teda o graf funkcie?

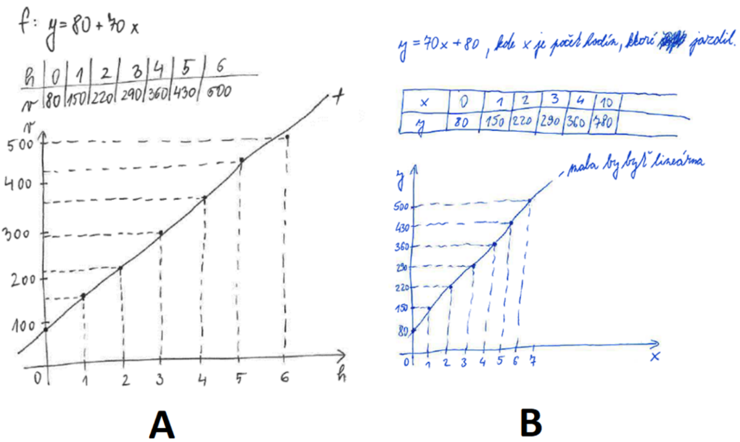
5 Danka: Tak… je to funkcia, nie? (neisto)

6 Lektor: A čo by teda robilo žiakom problém?

7 Danka: No ono to je také, že keď sú žiaci v akom? Deviatom ročníku. Tak oni… neviem ako to je teraz presne z fyziky, kedy sa presne berú pohyby, ale oni ešte nevedia, že je ešte taký pohyb, ktorý nemusí byť iba rovnomerný. Ale je dôležité ich upozorniť ešte na to, že tá družica sa nemusí pohybovať rovnomerne. Že my vieme rýchlosti iba v tých konkrétnych časoch, v tej výške, a to čo sa deje medzitým, to už nie je nikde napísané v tom zadaní, že čo sa s tou družicou deje.

V diskusii 2 študentka Sofia priznáva, že sa nad tým, ako spájať body vôbec nezamýšľala, pospájala hodnoty a vďaka nepresnému náčrtu vytvorila graf lineárnej funkcie. Dokonca u Danky sú tam aj isté pochybnosti o tom, či ide alebo nejde o funkciu. Na to však dopĺňa, že u žiakov by bol v tejto úlohe ten problém, že nepoznajú iný ako rovnomerný pohyb. Vníma ako veľký problém to, že nevieme, čo sa deje medzi jednotlivými hodnotami v grafe a že je veľmi dôležité viesť so žiakmi diskusiu.

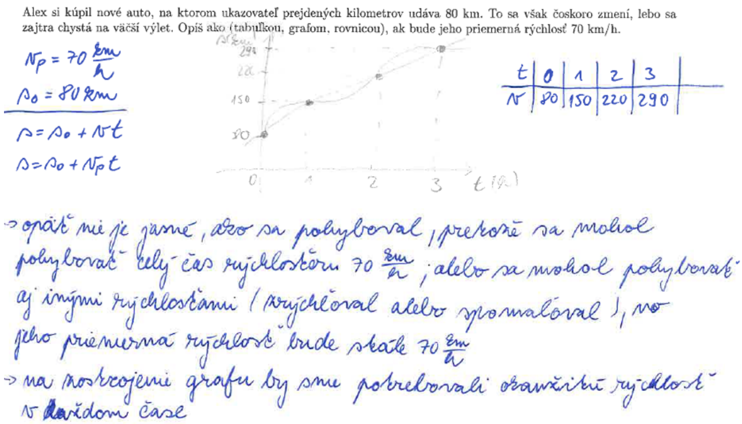
Podobne ako v úlohe 12, v úlohe 30 dvanásti študenti načrtli graf ako lineárnu funkciu s komentárom, že náčrt vyplýva z tabuľky a z predpisu (pozri obrázok 7). Väčšina študentov teda automaticky predpokladá rovnomerný pohyb auta po celú dobu jazdy. Z komentára na obrázku 7B cítiť neistotu študenta, ktorý tvrdí, že by to mala byť lineárna funkcia, nie je o tom presvedčený.



Obr. 7: Riešenia úlohy 30 dvoch študentov učiteľstva matematiky

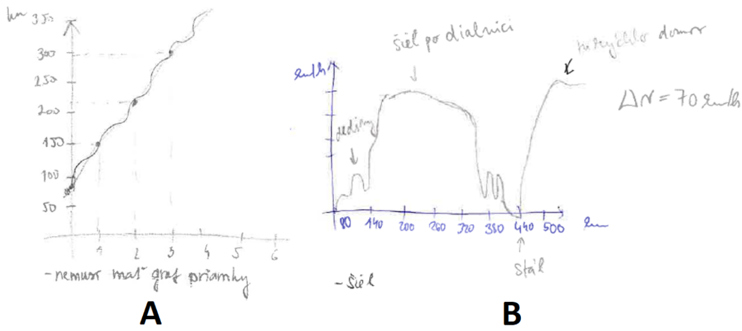
Podobne ako úlohu 12 rieši Danka aj úlohu 30, kde načrtla dve rôzne možnosti z nekonečna možných (pozri obrázok 8) a tvrdí, že na zostrojenie grafu by potrebovala okamžitú rýchlosť v každom čase, čo je v podstate nemožné.

Okrem Danky sa nad viacerými rôznymi možnosťami pohybu auta tentokrát zamýšľa aj študentka Mária a načrtla viacero rôznych možností spájania bodov v grafe funkcie (pozri obrázok 9A). Zaujímavé riešenie ponúka obrázok 9B, kde študentka na x-ovú os dáva kilometre (nezávislá premenná) a na y-ovú os rýchlosť (závislá premenná) a ponúka „jednu z množstva ciest“, ktoré mohlo auto prejsť. Ak išlo auto pomalšie, znamená to, že prechádza de-



Obr. 8: Riešenie úlohy 30 študentky Danky

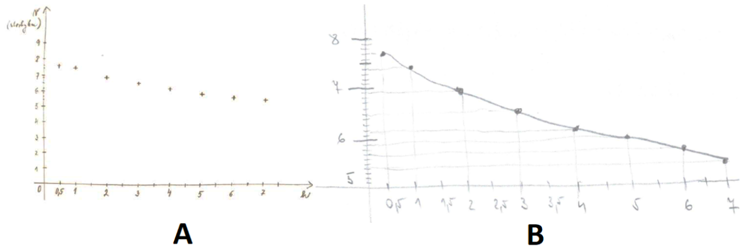
dinami alebo sa pomaly posúva v kolóne. Rýchlu jazdu pripisuje jazde na diaľnici. V priemere však auto ide rýchlosťou 70 km/h. Týmto spôsobom sa vyhla diléme či body na grafe spájať alebo nie, keďže graf rieši inú funknčú závislosť ako závislosť dráhy od času.



Obr. 9: Riešenie úlohy 30 dvoch študentov učiteľstva matematiky

Učitelia matematiky z praxe

Na rozdiel od študentov matematiky, u dvoch učiteľov z praxe sa vyskytlo riešenie, kde body v grafe neboli spojené, načrtli diskrétny graf (obrázok 10A). Piati učitelia v úlohe 12 načrtli spojitý graf (obrázok 10B), ktorý vizuálne vo viacerých prípadoch pripomínal lineárnu funkciu.



Obr. 10: Riešenia úlohy 12 dvoch učiteľov matematiky

Diskusia 3.

1 Gréta: Jojoj, tak tá družica, tiež som nespájala nič, lebo toto mi bolo také predivné.

2 Viera: Nespájala som, lebo nevychádzalo ani-ani. Lebo zo začiatku tak čudne klesla.

3 Gréta: Tam ma zadanie zaviedlo do neistoty. Ani si neviem veľmi predstaviť ten pohyb, ani prečo to takýmto spôsobom skáče.

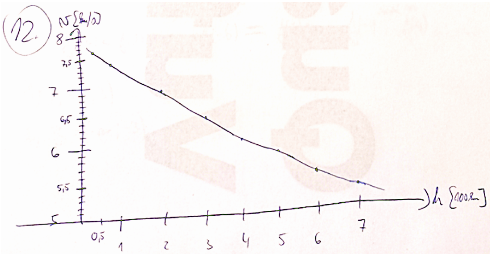
4 Michal: Ja som to spojil. Nie je to ani lineárna, ani nič, je to podľa mňa natiahnutá „nepriama úmera“. Ale spojil som to.

5 Gréta: Nepriama až tak nie, lebo v podstate tam aj ten koeficient, . . . keby sme tak pozerali, že nie je to . . . toto by som určite, že . . . a toto čo sa dialo medzi tým, že umelá družica po kruhovej dráhe . . .

6 Viera: Ja som ani nevedela akým spôsobom to spájať.

7 Gréta: Toto je také nejednoznačné. Nevedela som o čo sa oprieť.

Rozhodnutie nespájať jednotlivé body vyplýva z diskusie 3, kde v replike 1 Gréta tvrdí, že jej to bolo divné spájať a Viera v replike 2 spomína, že nevychádzala ani lineárna funkcia ani exponenciálna funkcia ani iná elementárna funkcia. Gréta sa v replike 5 snaží chytiť aspoň nejakej informácie, hľadá niečo, čo by jej pomohlo, no svoje myšlienky sama nevie uchopiť. Repliky 6 a 7 naznačujú „problémy“ učiteliek s danou úlohou vďaka tomu, že medzi jednotlivými hodnotami v tabuľke na obrázku 1 nenašli žiaden vzťah a teda žiaden rozpoznateľný vzor. Michal, spolu s ďalšími piatimi učiteľmi jednotlivé body spojil (pozri obrázok 11), pričom je zaujímavé aj jeho škálovanie.



Obr. 11: Riešenia úlohy 12 učiteľa Michala

Diskusia 4.

4 Viera: Neviem. Tak sme sa na tom až tak nezhodli. Lebo s tým spájaním je to vždycky tak, že očakávame nejaký čo? Voľný priebeh. Nevieme si to ani predstaviť až tak dobre. O kozmických rýchlostiach sa na fyzike na základných školách nerozpráva. Takže …

5 Lektor: Takže nie sme si istý ako to máme pospájať alebo pospájali ste to? Kto to pospájal? Tu bol skôr formulovaný taký názor, že ja neviem ako sa to správa medzi tými jednotlivými hodnotami.

6 Michal: Ja som to pospájal.

7 Patrik: Aj ja som to spojil.

8 Judita: Aj ja. Lebo tam sa bude určite nejako prechádzať a ináč to je v stovkách kilometrov. Čiže tam už hore-dole pri takých týchto jednotkách.

9 Viera: Zanedbateľné …

10 Emma: Ale jednoducho to neskáče z jedného bodu do druhého.

11 Lektor: Dobre, to znamená, že my vieme, že tá funkcia, môžeme povedať, že je …

12 Michal: Spojitá …

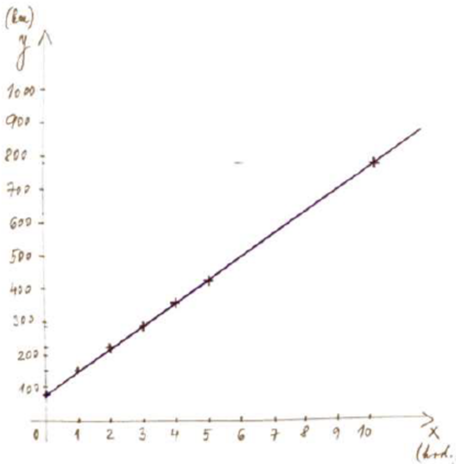
13 Judita: Spojitá …

14 Lektor: Spojitá, a teda sa vám žiada nejako to spojiť, tie body. Dobre no, poďme teraz k tejto 30ke úlohe. (Prečítala úlohu 30.)
15 Patrik: Tu by sa to asi nemalo spojiť.
16 Lektor: Tak pani Viera poďte na to.
17 Viera: Presne ten istý argument ma dobehol. V podstate… jasnačka… že ten výlet…
18 Lektor: Ale tu bez zaváhania všetci. Všetci ste to spojili: Je to predsa lineárna funkcia… (zdravo provokatívne)
19 Veronika: Je to lineárna funkcia? (smiech)

V spoločnej diskusii 4 sa aj učitelia opierali o fyziku a odôvodnili rôzne problémy, ktoré môžu pri úlohe 12 vzniknúť tým, že sa o niektorých faktoch, ako napr. kozmická rýchlosť, na školách neučí. V diskusii 4 na otázku, či spájať jednotlivé body, učiteľka Judita reaguje poznámkou, že by ich určite spojila, pretože sú

Čas jazdy (v hod.)	0	1	2	3	4	5	10
Ukazovateľ prejdených kilometrov	80	150	220	290	360	430	780

$y = 70 \, . \, x + 80$



Obr. 12: Riešenie úlohy 30 konkrétnym učiteľom matematiky

to zaokrúhlené hodnoty (vzdialenosť je v stovkách kilometrov za hodinu), a to môže skresliť namerané dáta (replika 8). Učiteľka Emma tvrdí, že je to nutné spojiť, pretože družica neskáče z bodu do bodu, ale ide o pohyb (replika 10). Zatiaľ čo by v 12. úlohe Patrik body spojil, v 30. úlohe o tom dosť pochyboval, ale v jeho riešení bol graf spojitý. Všetci učitelia matematiky, aj keď pochybovali (pozri diskusia 4, repliky 15–19) spojili body na grafe tak, ako vidíme na obrázku 12.

Diskusia 5.

1 Laura:	Dvanásta úloha.
2 Emma:	To tam tiež je ako len nakresliť graf. Toto by zvládli z tabuľky.
3 Judita:	Dokonca tabuľku už majú a mali aj v predošlých úlohách.
4 Emma:	To je tiež také, pekné.
5 Judita:	Ako, nie je náročná.
6 Emma:	Nie, nie.
7 Laura:	Nie je.
8 Laura:	Tridsiata úloha.
9 Emma:	To je taká tá klasická, tridsiatka.
10 Judita:	Hej, to už čosi také bolo. Aj, že musí pripočítavať čosi k tomu.

Zaujímavá je aj krátka diskusia 5 medzi troma učiteľkami v malej skupine, ktoré sa k úlohám 12 a 30 vyjadrili veľmi vágne. Učiteľky Laura, Emma a Judita v tom mali jasno. Úlohy sú jednoduché a žiaci by ich bez problémov zvládli. Ani jedna z nich sa však nezamýšľa nad tým, ako body spájať, prečo ich spájať a hneď načrtli v oboch prípadoch grafy, ktoré vyzerajú ako grafy lineárnej funkcie.

Záver

Na základe riešení úloh 12 a 30 a niekoľkých diskusií s učiteľmi z praxe a budúcimi učiteľmi matematiky sme zistili, že v oboch skupinách sa respondenti cítili neisto pri rozhodovaní sa, či by sa mala situácia modelovať diskrétnym alebo spojitým spôsobom. Niekoľko učiteľov využilo vo svojich riešeniach modelovanie situácie pomocou lineárnej funkcie s komentárom, že sú na to žiaci v školách zvyknutí. V diskusii o už vyriešených úlohách sa viacerí priznali, že sa nad tým až tak nezamýšľali a spojili body najčastejšie čiarou, ktorá vyzerala ako priamka. To vytvorilo vizuálny dojem, že ide o graf lineárnej funkcie a následne sa už nevrátili k tabuľke hodnôt na kontrolu. Iba jedna študentka matematiky a dve pani učiteľky z praxe si uvedomili, že existuje nekonečné množstvo rôznych spôsobov ako body spojiť. Navyše vo viacerých riešeniach sa vyskytovali miskoncepcie, ktoré sú uvedené vo výskumoch a vyskytujú sa aj u žiakov, napríklad – skreslenie súvisiace s mierkou, linearita, výmena súradnicových osí, ... (napr. Leinhardt et al., 1990). Obe úlohy sa ukázali ako veľmi podnetné na spoločnú diskusiu, či už ide o pochybnosti či spájať jednotlivé body; o tom, ako bude graf vyzerať; alebo o tom, akú reprezentáciu použiť. Pomohli nám odhaliť nedostatky v porozumení pojmu funkcia. Úlohy môžu byť tiež podnetom k diskusii o tom, čo znamená modelovanie reálnej situácie pomocou funkcií. Modelovanie je o tom, že si situáciu trochu idealizujeme. V našich úlohách nevieme síce presne určiť ako budú grafy vyzerať medzi jednotlivými hodnotami, ale dané informácie nám môžu pomôcť v predpovedaní danej situácie. Ako príklad si vezmime problém, keď nám v aute dochádzajú pohonné hmoty. Moderné auto nám poskytuje odhad koľko kilometrov nám ešte vydrží benzín v aute. Je to síce veľmi hrubý odhad, ale zároveň je to pre nás dôležitá informácia, ktorá nám hovorí o aktuálnom stave.

Analýza riešení úloh a následná diskusia nám pomohla odhaliť niektoré nedostatky v poznaní učiteľov a budúcich učiteľov, ktorým je potrebné sa venovať pri ich príprave a ďalšom vzdelávaní. Viac o skúmanej problematike, ako aj o výskumnom nástroji, bude uvedené v dizertačnej práci autora a článku Slabý et al. (2022), kde je analyzovaná úloha 31 z výskumného nástroja.

Literatura

[1] Acevedo Nistal, A., van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2014). Improving students' representational flexibility in linear-function problems: An intervention. *Educational*

Psychology, 34(6), 763–786. https://doi.org/10.1080/01443410.2013.785064

[2] Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

[3] FunThink team. (2021). *Vision document.* https://www.funthink.eu/fileadmin/__Template/funthink/Downloadbereich/additional_Materials/Vision_Document/Vision_document.pdf

[4] Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In R. A. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Erlbaum, Hillsdale.

[5] Hecht, T., & Černek, P. (2002). *Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ – Funkcie* (1. vyd.). Orbis Pictus Istropolitana Bratislava.

[6] Hecht, T. (2006). *Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ – Funkcie II* (1. vyd.). Orbis Pictus Istropolitana Bratislava.

[7] Janvier, C. (1983). Teaching the concept of function. *Mathematical Education for Teaching, 4*(2), 48–60.

[8] Kerslake, D. (1981). Graphs. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics concepts*: 11–16 (pp. 120–136). John Murray.

[9] Kubáček, Z. (2010a). *Matematika pre prvý ročník gymnázií, 2. časť.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá.

[10] Kubáček, Z. (2010b). *Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá.

[11] Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64.

[12] McCulloch, A.W., Lovett, J. N., & Meagher, M. S. (2022). Challenging preservice secondary mathematics teachers' conceptions of function. *Mathematics Education Research Journal, 34*, 343–368. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00347-6

[13] Odvárko, O. (1985). *Matematika pre 2. ročník gymnázií.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

[14] Ostermann, A., Leuders, T. & Nückles, M. (2018). Improving the judgment of task difficulties: prospective teachers' diagnostic competence in the area of functions and graphs. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(6), 579–605. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9369-z

[15] Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631–674.

[16] Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 303–319. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9631-1

[17] Sebsibe, A. S., Dorra, B. T., & Beressa, B. W. (2019). Students' difficulties and misconceptions of the function concept. *International Journal of Research – Granthaalayah, 7*(8), 181–196. https://doi.org/10.5281/zenodo.3381160

[18] Slabý, M., Semanišinová, I., & Climent, N. (2022). The specialized knowledge of middle school teachers concerning the concept of function. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia, 14*, 81–101.

[19] Stein, M. K., & Leinhardt, G. (1989). *Interpreting graphs: An analysis of early performance and reasoning.* Unpublished manuscript, University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center, PA.

[20] Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics, 17*(4), 387–400.

[21] Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 5–32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

[22] Vavrinčíková, B. *Matematika v dialógoch – Graf funkcie.* https://www.galeje.sk/web_object/9442.pdf

Abstract

Several studies indicate that students encounter significant difficulties when determining how to represent or interpret continuous data in a discrete manner and to represent or interpret discrete data in a continuous manner. In this paper, we focus on whether and when pre-service and in-service mathematics teachers represent functional dependence in a continuous or discrete manner. In pursuit of this objective, we employed two tasks from the research tool, which pre-service and in-service teachers solved, and subsequently scrutinized both their solutions and collaborative discussions concerning these tasks.

Matej Slabý
ÚMAT, PF UPJŠ
Šrobárova 2
041 80 Košice
e-mail: matej.slaby@upjs.sk