

Rozhledy matematicko-fyzikální

Luděk Spíchal

Nekonečné součiny, pětiúhelník, zlatý řez a číslo π

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 2, 1–13

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153036>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Nekonečné součiny, pětiúhelník, zlatý řez a číslo π

Luděk Spíchal, Česká lesnická akademie, Trutnov

Na přelomu 16. a 17. stol. postupně vyvrcholilo úsilí vytěžit Archimédovu mnohoúhelníkovou metodu při aproximaci čísla π . Do tohoto úsilí zajímavým způsobem zasáhl rovněž francouzský právník a matematik François Viète (1540–1630), který v roce 1593 objevil nekonečný součin¹⁾, který bychom mohli moderním způsobem zapsat např. ve tvaru

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdot \dots, \quad (1)$$

když pracoval s mnohoúhelníkem, který měl 393 216 ($=6 \cdot 2^{16}$) stran a podařilo se mu správně vypočítat 9 desetinných pozic čísla π . Formule, kterou získal, je ve skutečnosti pro aproximaci poměrně komplikovaná, současně jí určitě ovšem nelze upřít jistou matematickou eleganci.

Přes výše uvedený výsledek, který je v současnosti považován za jednu z prvních známých formulí obsahujících nekonečný součin, se Viète sám nekonečnými součiny nijak zásadně nezabýval. Pro moderní matematiku byly a stále zůstávají důležité jeho inovace v oblasti algebry a dále také práce v oblasti metod řešení algebraických rovnic (např. Viètovy vzorce), které ovlivnily řadu pozdějších matematiků, jako byl např. John Wallis (1616–1703).

Wallisova práce týkající se nekonečných součinů obsažená v knize *Arithmetica Infinitorum* z roku 1656, využila některé myšlenky obsažené

¹⁾Nekonečný součin označuje součin nekonečného počtu činitelů. Obecně má tvar

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots,$$

kde a_k jsou jednotlivé činitele. Aby měl nekonečný součin smysl, musí posloupnost jeho částečných součinů

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

mít konečnou limitu, tj. musí konvergovat pro $n \rightarrow \infty$.

již ve Viětových algebraických reformách. V knize je uveden následující nekonečný součin²⁾

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots, \quad (2)$$

který Wallis objevil, když použil poměrně složitý postup výpočtu plochy poloviny kruhu, kdy již mohl využít infinitezimální počet jako převratnou novinku v matematice [5].

Ačkoliv je příkladů nekonečných součinů aproximujících číslo π výrazně méně než známých nekonečných řad pro aproximaci π , můžeme na tomto místě ještě připomenout výsledek, který získal švýcarský matematik Leonard Euler (1707–1783)

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{5^2 - 1} \cdot \frac{7^2}{7^2 - 1} \cdot \frac{11^2}{11^2 - 1} \cdot \dots, \quad (3)$$

neobvyklý tím, že obsahuje pouze mocniny prvočísel [2]. Euler k výsledku dospěl v roce 1735, když se zabýval tzv. basilejským problémem, který spočíval v určení součtu nekonečné řady³⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Ve svých úvahách se zaměřil na funkci (dnes nazývanou Riemannova zeta funkce)⁴⁾

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots \quad (4)$$

kde si uvědomil, že podle základní věty aritmetiky lze každé složené číslo jednoznačně zapsat ve tvaru prvočíselného rozkladu. Poté, co totéž udělal s každým jmenovatelem funkce (4), získal po dalších úpravách rovnost

²⁾Z dalších matematických konstant můžeme zmínit nekonečný součin pro Eulerovo číslo e , který vykazuje překvapivé souvislosti se vzorcem (2) pro $\pi/2$

$$e/2 = \left(\frac{2}{1}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{8}{7} \frac{8}{7}\right)^{1/8} \dots$$

³⁾Problém popsal v roce 1650 italský matematik Pietro Mengoli (1626–1686). Do širší pozornosti evropských matematiků později problém posunul basilejský profesor matematiky Jacob Bernoulli (1654–1705), který se sám neúspěšně pokoušel problém vyřešit.

⁴⁾Zeta funkce je důležitým pojmem v oblasti teorie čísel. Tvoří jádro tzv. Riemannovy hypotézy, která patří k nejdůležitějším nevyřešeným problémům současné matematiky.

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{27^x} + \dots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{25^x} + \frac{1}{125^x} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{(p^2)^x} + \frac{1}{(p^3)^x} + \dots\right) \dots,$$

$x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$, kde na levé straně je nekonečná řada a na straně pravé nekonečný součin. Činitelé nekonečného součinu představují pro $x > 1$ nekonečné geometrické řady, tedy

$$\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{27^x} + \dots\right) \\ \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{25^x} + \frac{1}{125^x} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{(p^2)^x} + \frac{1}{(p^3)^x} + \dots\right) \dots = \\ = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p^x}{p^x - 1} \cdot \dots = \prod_{p \text{ je prvočíslo}} \frac{p^x}{p^x - 1}.$$

Pro volbu $x = 2$ Euler dokázal rovnost (3), když se mu podařilo spojit nekonečnou řadu ve funkci (4) s nekonečnou řadou pro funkci sinus.

V článku si nejprve osvětlíme postup, kterým Viète dospěl k nekonečnému součinu (1). Následně na příkladu dělení pětiúhelníku odvodíme nekonečný součin pro aproximaci čísla π obsahující tzv. zlatý řez. Ukážeme rovněž, že podobně jako v článku [3] můžeme číslo π aproximovat pomocí zlatého řezu a vnořených odmocnin. V závěru pak v návaznosti na článek [4] ještě doplníme možnost aproximovat hodnotu čísla π v pětiúhelníku použitím rozvoje funkce arkus tangens do nekonečné řady.

1. Viětův vzorec pro aproximaci čísla π

Uvažujme pravidelný n -úhelník vepsaný kružnici o poloměru r , kde $|\angle ASB| = 2\alpha$ (obr. 1). Pro jeho obsah platí

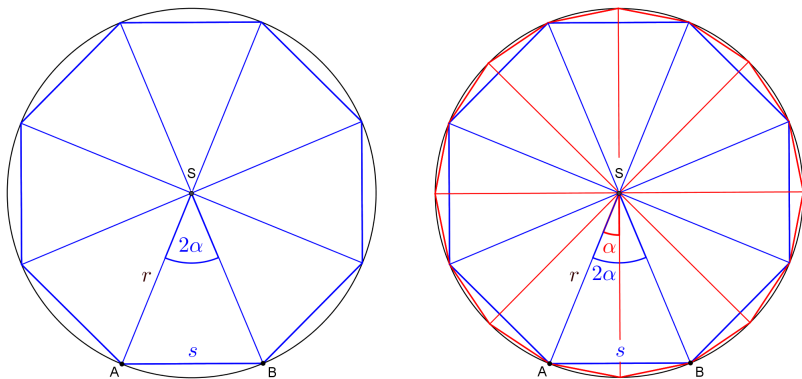
$$S_n = nr^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\alpha.$$

Pokud nyní zdvojnásobíme počet stran n -úhelníku, pak bude úhel 2α poloviční, tedy

$$S_{2n} = 2nr^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = nr^2 \sin \alpha,$$

a pro poměr obsahů takových n -úhelníků platí

$$\frac{S_n}{S_{2n}} = \cos \alpha.$$



Obr. 1: Pravidelný n a $2n$ -úhelník

Postupným opakovaním zdvojnásobování počtu stran n -úhelníku získáme posloupnost poměrů $\cos \alpha, \cos \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{4}, \dots$, kde po k děleních platí

$$\frac{S_n}{S_{2n}} \cdot \frac{S_{2n}}{S_{4n}} \cdot \dots \cdot \frac{S_{2^{k-1}n}}{S_{2^k n}} = \frac{S_n}{S_{2^k n}} = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}}. \quad (5)$$

Pro obsah k -tého obrazce vepsaného kružnici o poloměru r současně platí, že jeho limitou je obsah kruhu, tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k n} = \pi r^2.$$

Pokud nyní dosadíme do rovnosti (5) za $S_n, S_{2^k n}$ a dále zjednodušíme, pak dostáváme

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^{k-1}}}. \quad (6)$$

Viète zvolil jako výchozí n -úhelník čtverec, kde $n = 4$ a $\alpha = 45^\circ$, tj. $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$ a dále

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \\ \cos \frac{\alpha}{4} &= \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha/2)}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce (6) a úpravách získáme nekonečný součin, jehož zápis jsme uvedli v úvodu.

Viětův vzorec můžeme odvodit rovněž přímo využitím určitých vlastností goniometrických funkcí sinus a kosinus. Podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu platí, že

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} = \\ &= 8 \sin \frac{\alpha}{8} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} = \\ &\vdots\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ indukci dostáváme

$$\sin \alpha = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n} = 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ je

$$\sin \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} = \alpha \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2^k}, \quad (7)$$

neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} = \alpha.$$

Pokud dále dosadíme za $\alpha = \pi/2$, pak

$$\sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

kde po úpravě a zjednodušení dostáváme

$$\pi = \frac{2}{\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}. \quad (8)$$

Je zřejmé, že vzorec (7) představuje návod, jak formulovat nekonečné součiny analogické Viětovu vzorci.

2. Pětiúhelník a zlatý řez

Zlatý řez je číslo, které označuje poměr, kdy se úsečka dělí do dvou částí takovým způsobem, že poměr délky celé úsečky vůči délce její větší části se rovná poměru délky větší části k délce té menší [1]. Číselnou hodnotu zlatého řezu získáme z řešení rovnice

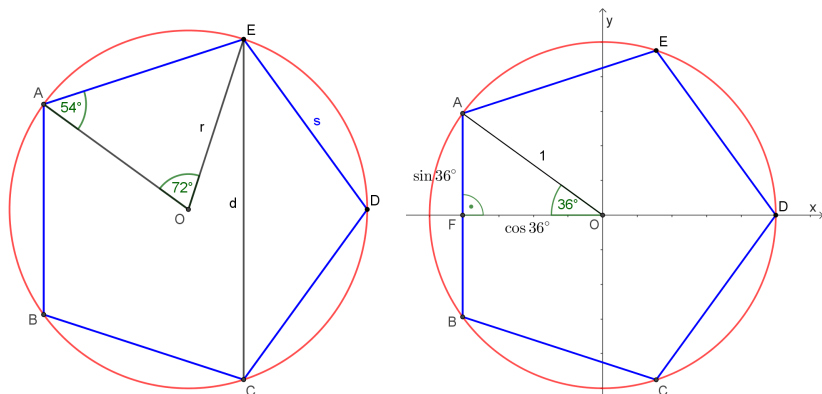
$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

kde x, y ($x > y$) jsou části úsečky o délce $x + y$. Pokud dále položíme $y = 1$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Zlatým řezem φ je kladný kořen

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Obr. 2: Pětiúhelník a zlatý řez

Zlatý řez je v geometrii neoddělitelně spjatý s pětiúhelníkem, neboť tvoří poměr délky úhlopříčky k délce strany pětiúhelníku (obr. 2 vlevo). Bez újmy na obecnosti budeme dále uvažovat pětiúhelník vepsaný kružnici o poloměru $r = 1$ (jednotková kružnice).

Na obr. 2 (vpravo) je do jednotkové kružnice vepsán pětiúhelník, kde vzdálenost $|OF| = \cos 36^\circ$. Ukažme, že $\cos 36^\circ = (1 + \sqrt{5})/4 = \varphi/2$. Pokud označíme $x = 18^\circ$, pak $2x = 90^\circ - 3x$ a dále

$$\sin 2x = \sin(90^\circ - 3x). \quad (9)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že $\sin(90^\circ - 3x) = \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, lze rovnici (9) zapsat ve tvaru $2 \sin x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, a dále po úpravách a zjednodušení

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0,$$

kde

$$\sin x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Pokud shrneme výše uvedené, pak platí

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\varphi}, \quad (10)$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \varphi}. \quad (11)$$

Podle vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu dále platí

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = \frac{1}{2\varphi} \sqrt{2 + \varphi}, \quad (12)$$

$$\cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = \frac{\varphi}{2}. \quad (13)$$

Na obr. 3 je naznačena konstrukce pětiúhelníku vepsaného jednotkové kružnici pomocí zlatého řezu. Z bodu $A[1/2, 0]$ opíšeme kruhový oblouk o poloměru $|AB| = \sqrt{5}/2$, který protíná osu x ve zlatém řezu φ . Kolmice k ose x procházející bodem $\varphi/2$ protíná kružnici v úsečce EI tvořící stranu vepsaného pětiúhelníku $EFGHI$.

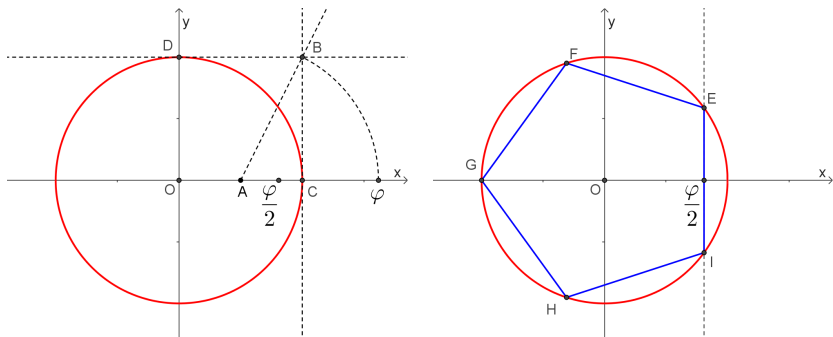
3. Číslo π a pětiúhelník

Využitím postupu, který objevil F. Viète, bychom v případě pravidelného pětiúhelníku jako výchozího tvaru celkem snadno získali nekonečný součin

$$\pi = \frac{5}{\varphi} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}} \cdot \dots, \quad (14)$$

neboť $n = 5$ a $\alpha = 36^\circ$.

Obdobně bychom ke stejnému výsledku dospěli v případě, že bychom nahradili přibližování obsahu n -úhelníku obsahu opsaného kruhu za přibližování obvodu n -úhelníku obvodu opsané kružnice.



Obr. 3: Konstrukce pětiúhelníku v jednotkové kružnici pomocí zlatého řezu

V úvodu jsme uvedli, že Viète použitím nekonečného součinu (1) dokázal správně určit devět desetinných pozic čísla π . Poté co jsme našli nekonečný součin (14), se celkem přirozeně nabízí otázka, kolik činitelů nekonečného součinu musíme minimálně použít, abychom získali stejný počet desetinných pozic jako Viète. Pokud označíme číslem k počet činitelů konečného součinu

$$\pi = \frac{5}{\varphi} \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\varphi}}}}}}_{k \text{ činitelů}} \cdot \dots,$$

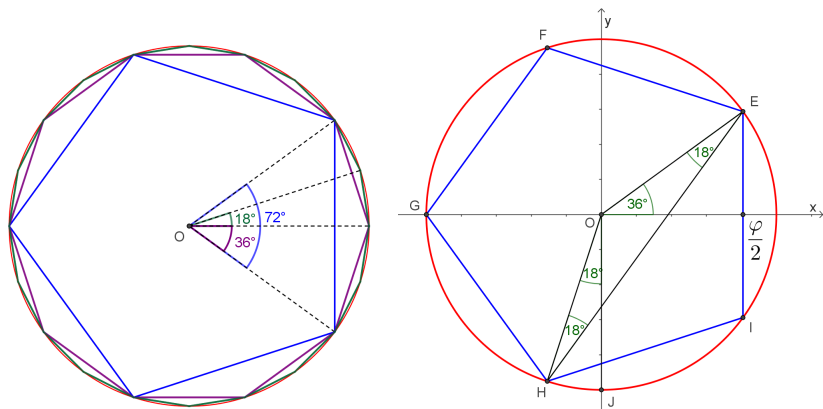
pak si lze ověřit, že $k = 15$.

V článku [3] je vzorec (1) zapsán pomocí vnořených druhých odmocnin a obsahuje pouze jeden součin

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}$$

Ukažme nyní odvození obdobného vzorce opět pro pětiúhelník, kdy v jednotlivých iteracích budeme opakovaně půlit úhel (obr. 4 vlevo), přičemž nás bude zajímat délka svislé odvěsny, která odpovídá sinu příslušného úhlu.

Pro výpočet délky odvěsny použijeme vzorce pro sinus a kosinus polovičního úhlu $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$.


Obr. 4: Aproximace čísla π v pětiúhelníku

Podle (13) je $\cos 36^\circ = \cos(\pi/5) = \varphi/2$ a dále postupně

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \varphi}, & \cos \frac{\pi}{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \varphi}, \\ \sin \frac{\pi}{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \varphi}}, & \cos \frac{\pi}{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}, \\ \sin \frac{\pi}{40} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}, & \cos \frac{\pi}{40} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}, \\ \sin \frac{\pi}{80} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}, & \cos \frac{\pi}{80} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}, \\ & & & \vdots \\ \sin \frac{\pi}{5 \cdot 2^k} &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}}. \end{aligned}$$

Aproximaci čísla π získáme jako limitu (tab. 1)

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 5 \cdot 2^{k-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \varphi}}}}}_{k \text{ druhých odmocnin}}}. \quad (15)$$

Závěr

Pokud bychom se ještě vrátili na úplný začátek článku a dovyprávěli příběh Archimédovy metody aproximace čísla π , pak téhož roku jako

F. Viète se nizozemský geometr Adriaan van Roomen (1561–1615) dopracoval k mnohoúhelníku s 2^{30} stranami a vypočítal π s přesností na 15 desetinných pozic. Ludolph van Ceulen (1540–1610) dokázal v roce 1596 pomocí mnohoúhelníku o 2^{62} stranách správně vypočítat nejprve 20 a později dokonce 35 desetinných míst. Nejlepšího výsledku aproximace π využívající mnohoúhelníkovou metodu pravděpodobně dosáhl v roce 1630 rakouský astronom Christoph Grienberger (1561–1636), kterému se podařilo správně spočítat 38 desetinných pozic použitím mnohoúhelníku o 10^{40} stranách [5].

k	Aproximace π	k	Aproximace π
1	3 ,09016 99438	6	3,14154 21879
2	3,12868 93008	7	3,14158 00371
3	3,13836 38291	8	3,14158 94995
4	3,14078 52607	9	3,14159 18650
5	3,14139 07937	10	3,14159 24564

Tabuľka 1: Aproximace čísla π (správné pozice tučně) podle rovnice (15)

V průběhu 17. století díky práci Isaaca Newtona (1642–1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716) postupně nahradil již poněkud těžkopádnou a výpočetně značně zdlouhavou Archimédovu metodu nastupující infinitezimální počet, a to zejména ve spojení se studiem nekonečných řad vhodných funkcí. Velký pokrok představoval objev a následné využití rozvoje funkce arkus tangens⁵⁾

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \quad (16)$$

⁵⁾ Funkce arkus tangens je inverzní k funkci tangens, jejíž definiční obor je omezen na interval $(-\pi/2; \pi/2)$. Arkus tangens zapisujeme v matematických výrazech ve tvaru arctg nebo tg^{-1} . Platí, že tangens daného úhlu udává číslo, jehož arkus tangens je opět daný úhel, např.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Řada byla nezávisle objevena skotským matematikem Jamesem Gregorem (1638–1675) a G. W. Leibnizem.

V roce 1706 anglický matematik John Machin (1680–1751) objevil vzorec

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{293},$$

pomocí kterého v kombinaci s řadou (16) dokázal určit 100 desetinných pozic čísla π . Různé Machinovy vzorce pak ještě dlouho hrály důležitou roli při aproximacích čísla π .

Podrobný postup aproximace využívající řadu (16) je uveden v článku [4], zde zmíníme základní principy týkající se aproximace čísla π v pětiúhelníku. Na obr. 4 (vpravo) je do pětiúhelníku umístěn trojúhelník HEO s vyznačenými vnitřními úhly, kde $90^\circ = 36^\circ + 3 \cdot 18^\circ$, resp. $\pi/2 = \pi/5 + 3\pi/10$, nebo také $\pi/4 = \pi/10 + 3\pi/20$.

Využitím rovností (10), (11) dostáváme

$$\operatorname{tg}(\pi/10) = \frac{\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}, \quad (17)$$

a dále

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(3\pi/20) &= \operatorname{tg}(\pi/4 - \pi/10) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\pi/10)}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg}(\pi/10)} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}}{1 + \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}} = \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1}. \end{aligned}$$

Použitím funkce arkus tangens pro úhly $\pi/10$, $3\pi/20$ dostáváme

$$\frac{\pi}{10} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} \right), \quad \frac{3\pi}{20} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1} \right),$$

a dále

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1} \right). \quad (18)$$

V této chvíli se vrátíme k rozvoji funkce arkus tangens do nekonečné řady (16), odkud po dosazení

$$x = \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}, \quad \text{resp. } x = \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi} - 1}{\varphi\sqrt{2+\varphi} + 1}$$

postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right) = \\
 &= \frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}} - \frac{1}{3\varphi^3\sqrt{(2+\varphi)^3}} + \frac{1}{5\varphi^5\sqrt{(2+\varphi)^5}} - \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right)^{2k-1}, \\
 & \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right) = \\
 &= \frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^5 - \dots = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^{2k-1}.
 \end{aligned}$$

a dále po dosazení do rovnice (18)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}}\right)^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(\frac{\varphi\sqrt{2+\varphi}-1}{\varphi\sqrt{2+\varphi}+1}\right)^{2k-1}. \quad (19)$$

V níže uvedené tabulce jsou uvedené správné desetinné pozice čísla π pro vybrané hodnoty k vypočtené podle rovnice (19).

$k_{\max}$	Správné desetinné číslice čísla π
5	3,141
10	3,14159 2
15	3,14159 2653
20	3,14159 26535 897
25	3,14159 26535 89793

Tabulka 2: Výpočet hodnoty čísla π podle rovnice (19)

Literatura

- [1] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.

- [2] Navarro, J.: *Tajemné π . Lze provést kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.
- [3] Servi, L. D.: Nested square roots of 2. *Amer. Math. Monthly*, roč. 110 (2003), č. 4, s. 326–330.
- [4] Spíchal, L.: Aproximace čísla π pomocí zlatého řezu a kovových průměrů. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 20–30.
- [5] Stewart, I.: *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Argo/Dokořán, Praha, 2019.

Dělitelnost pro konečná zobrazení

Tereza Krejčí, Masarykova univerzita, Brno

Dělitelnost je jedním ze základních kamenů matematiky. V tomto článku budeme hledat odpověď na otázku, kam nás dělitelnost může zavést, když se na ni podíváme v netradičním kontextu.

Abychom dělitelnost mohli definovat, potřebujeme množinu prvků – v klasickém případě $\mathbb{Z}$ – a binární operaci¹⁾ na této množině – tedy násobení.

Definice 1. Necht $a, b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že a dělí b , pokud existuje celé číslo c takové, že

$$b = a \cdot c.$$

Úplně analogicky lze dělitelnost ale definovat i pro odlišné množiny a operace. My budeme pracovat s množinou konečných zobrazení a operací skládání.

Zobrazením f mezi množinami A a B rozumíme množinu f uspořádaných dvojic (a, b) ; $a \in A, b \in B$ takovou, že pro každé a existuje právě jedno b , kde $(a, b) \in f$. Zobrazení tedy spočívá v přiřazení prvků z množiny obrazů ke vzorům z první množiny. Pokud $(a, b) \in f$, píšeme $f(a) = b$. Toto přiřazení budeme znázorňovat šipkami mezi vzory a obrazy. Složení zobrazení f a g značíme $g \circ f$ a chápeme jím zobrazení dané předpisem $g(f(x))$.

¹⁾ Binární operací rozumíme přiřazení $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tedy každé dvojici prvků přiřadíme jeden prvek, výsledek.