

# Rozhledy matematicko-fyzikální

---

Tereza Krejčí

Dělitelnost pro konečná zobrazení

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 100 (2025), No. 2, 13–25

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153039>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

- [2] Navarro, J.: *Tajemné  $\pi$ . Lze provést kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.
- [3] Servi, L. D.: Nested square roots of 2. *Amer. Math. Monthly*, roč. 110 (2003), č. 4, s. 326–330.
- [4] Spíchal, L.: Aproximace čísla  $\pi$  pomocí zlatého řezu a kovových průměrů. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 4, s. 20–30.
- [5] Stewart, I.: *Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta*. Argo/Dokořán, Praha, 2019.

## Dělitelnost pro konečná zobrazení

*Tereza Krejčí, Masarykova univerzita, Brno*

Dělitelnost je jedním ze základních kamenů matematiky. V tomto článku budeme hledat odpověď na otázku, kam nás dělitelnost může zavést, když se na ni podíváme v netradičním kontextu.

Abychom dělitelnost mohli definovat, potřebujeme množinu prvků – v klasickém případě  $\mathbb{Z}$  – a binární operaci<sup>1)</sup> na této množině – tedy násobení.

**Definice 1.** Necht  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Řekneme, že  $a$  dělí  $b$ , pokud existuje celé číslo  $c$  takové, že

$$b = a \cdot c.$$

Úplně analogicky lze dělitelnost ale definovat i pro odlišné množiny a operace. My budeme pracovat s množinou konečných zobrazení a operací skládání.

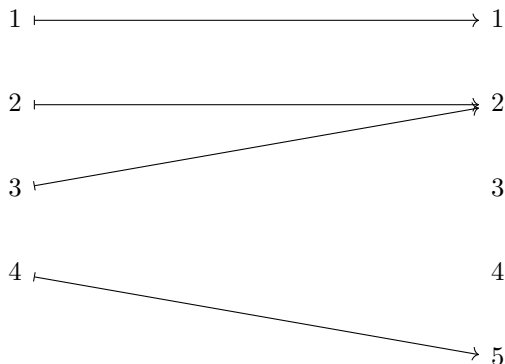
Zobrazením  $f$  mezi množinami  $A$  a  $B$  rozumíme množinu  $f$  uspořádaných dvojic  $(a, b)$ ;  $a \in A, b \in B$  takovou, že pro každé  $a$  existuje právě jedno  $b$ , kde  $(a, b) \in f$ . Zobrazení tedy spočívá v přiřazení prvků z množiny obrazů ke vzorům z první množiny. Pokud  $(a, b) \in f$ , píšeme  $f(a) = b$ . Toto přiřazení budeme znázorňovat šipkami mezi vzory a obrazy. Složení zobrazení  $f$  a  $g$  značíme  $g \circ f$  a chápeme jím zobrazení dané předpisem  $g(f(x))$ .

---

<sup>1)</sup> Binární operací rozumíme přiřazení  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tedy každé dvojici prvků přiřadíme jeden prvek, výsledek.

Aby se nám se zobrazeními lépe pracovalo a protože pro obecná zobrazení by vlastnosti dělitelnosti nebyly jednoznačné, budeme se zabývat pouze zobrazeními mezi konečnými ordinály. Konečným ordinálem  $\underline{n}$ , kde  $n$  je přirozené číslo, rozumíme množinu  $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$  se standardním uspořádáním.

Zobrazení  $f: \underline{4} \rightarrow \underline{5}$  tedy může vypadat třeba takto:



Prvky konečných ordinálů jsou čísla, a tak je intuitivně uspořádáme. Přeházení pořadí prvků ale podstatu zobrazení nijak neovlivní – mohli bychom je klidně uspořádat i jinak a stále by se jednalo o stejné zobrazení.

Abychom tedy dospěli k větší jednoznačnosti, budeme se držet standardního uspořádání a zároveň budeme pracovat pouze se zobrazeními, která *zachovávají pořadí*. To znamená, že pokud pro dva vzory  $n$  a  $m$  zobrazení  $f$  platí  $n \leq m$ , pak platí i  $f(n) \leq f(m)$ .<sup>2)</sup> Intuitivně si můžeme představit, že šipky jsou „rozmotané“ tak, aby se neprotínaly.

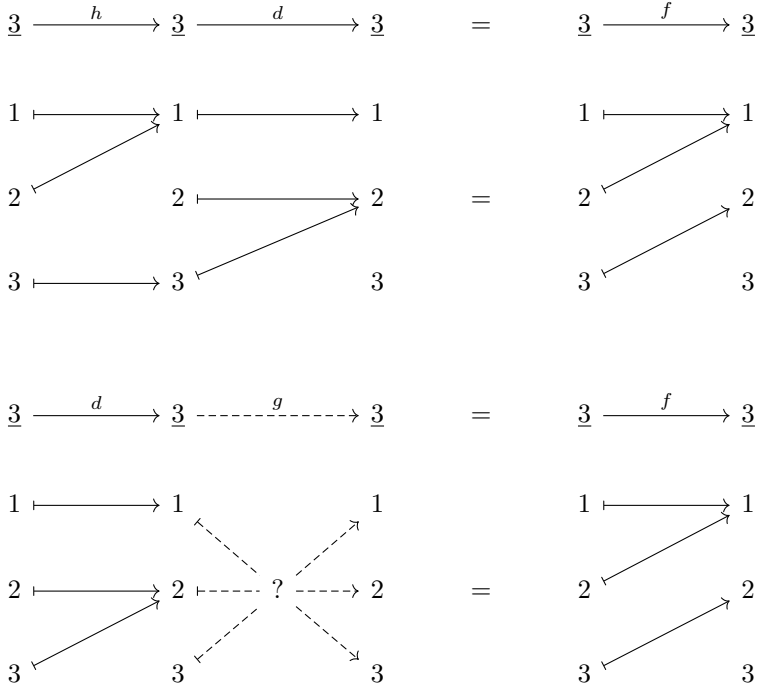
Od této chvíle předpokládejme, že zobrazení, s nimiž pracujeme, zachovávají pořadí, aniž bychom to pokaždé specifikovali. Díky tomu získáme například jednoznačné bijekce<sup>3)</sup>, které jsou mezi konečnými ordinály vždy identitami.

Nyní už se můžeme pustit do definice dělitelnosti pro konečná zobrazení. Je ale potřeba uvědomit si, že operace skládání zobrazení není

<sup>2)</sup> Také říkáme, že  $f$  je neklesající nebo neostře rostoucí zobrazení.

<sup>3)</sup> Bijekcí (neboli bijektivním zobrazením) rozumíme zobrazení, které je zároveň injektivní i surjektivní. To znamená, že každému prvku z množiny vzorů přiřadí právě jeden obraz a zároveň každý prvek z množiny obrazů má právě jeden vzor.

komutativní, tedy obecně neplatí  $h \circ g = g \circ h$ . Proto je možné, že zobrazení  $d$  dělí zobrazení  $f$  „z jedné strany“ (platí  $f = d \circ h$  pro nějaké zobrazení  $h$ ), už ale neexistuje zobrazení  $g$  takové, že  $f = g \circ d$ , jak můžeme vidět na obrázku níže.



Musíme tedy rozlišit *pravou* a *levou* dělitelnost.

**Definice 2.** Řekneme, že zobrazení  $d: \underline{k} \rightarrow \underline{m}$  zprava dělí zobrazení  $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ , pokud existuje zobrazení  $h: \underline{n} \rightarrow \underline{k}$  takové, že:

$$d \circ h = f.$$

**Definice 3.** Řekneme, že zobrazení  $d: \underline{n} \rightarrow \underline{l}$  zleva dělí zobrazení  $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$ , pokud existuje zobrazení  $g: \underline{l} \rightarrow \underline{m}$  takové, že:

$$g \circ d = f.$$

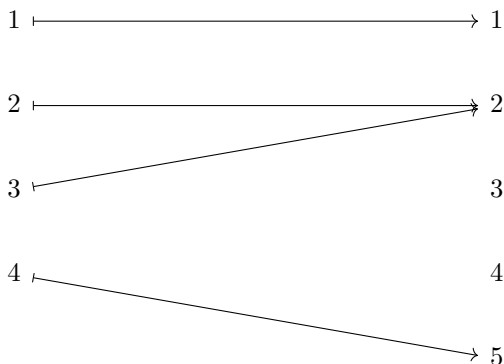
Na obrázku výše tedy zobrazení  $d$  zprava dělí zobrazení  $f$ , zatímco zleva je nedělí. Využijme tohoto příkladu k několika pozorováním.

V případě pravé dělitelnosti nutně potřebujeme, aby zobrazení  $d$  nějaké vzory zobrazilo na prvky 1 a 2 stejně jako zobrazení  $f$ . V opačném případě bychom mohli volit libovolné zobrazení  $h$ , ale složením těchto dvou zobrazení by nikdy nebylo  $f$ . Naopak pokud zobrazení  $d$  tuto podmínku splňuje, stačí sestavit  $h$  tak, aby každý prvek zobrazilo na prvek, který pak  $d$  zobrazí na příslušný obraz.

Nyní se zaměříme na levou dělitelnost a pokusme se vysvětlit, proč zobrazení  $g$  symbolicky zaznačené na obrázku nemůže existovat. Aby se složení  $g$  po  $d$  rovnalo  $f$ , musí být 2 zobrazena na 1; a 3 na 2. Toho ale nikdy nedocílíme, ať už  $g$  zvolíme jakkoli, protože  $d(2) = d(3)$ , a tak i jejich výsledný obraz bude stejný.

Abychom tato zjištění mohli popsat formálněji, potřebujeme se nejprve seznámit s termíny *obraz* a *koobraz*<sup>4)</sup>.

Obrazem zobrazení (značíme  $\text{im}$ ) rozumíme podmnožinu množiny, do níž zobrazujeme, obsahující právě ty prvky, které mají nějaký vzor. Obraz našeho ukázkového zobrazení je tedy množina  $\{1, 2, 5\}$ .



Pojem koobraz je o něco komplikovanější a můžeme ho chápat jako duální k obrazu. K jeho definici využijeme relací. Relace mezi množinami  $A$  a  $B$  je nějaká podmnožina kartézského součinu  $A \times B$ . Řekneme, že prvek  $a$  je v relaci  $\rho$  s prvkem  $b$ , pokud  $(a, b) \in \rho$ , a píšeme  $a \rho b$ .

Relaci  $\rho$  na množině  $A$  nazýváme relací ekvivalence, pokud je reflexivní  $(\forall a \in A: a \rho a)$ , symetrická  $(a \rho b \Rightarrow b \rho a)$  a tranzitivní  $(a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c)$ .

<sup>4)</sup> Anglicky „image“ a „coimage“, odtud i značení  $\text{im}$  a  $\text{coim}$ .

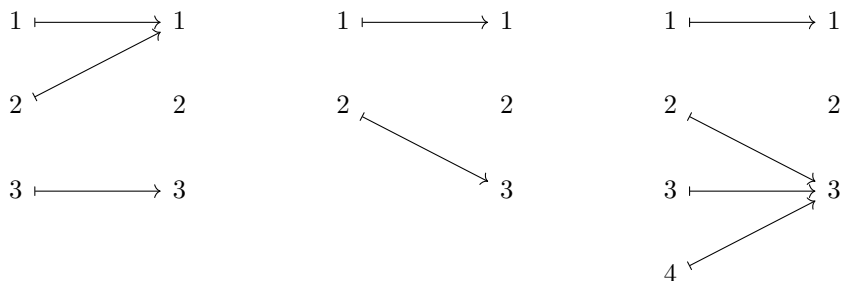
Uvažujme pro každé zobrazení  $f$  relaci ekvivalence  $\sim_f$ , která prvky rozdělí podle jejich obrazu tak, že dva prvky budou v relaci (píšeme  $a \sim_f b$ ), právě když  $f(a) = f(b)$ . Koobrazem (značíme  $\text{coim}$ ) potom rozumíme „rozdělení“ vzorů podle dané relace. Formálně jde o množinu takzvaných tříd ekvivalence, kdy každá třída sjednocuje prvky, které jsou navzájem v relaci.

Koobrazem tohoto zobrazení tedy bude množina  $\{[1], [2] = [3], [4]\}$ . Obsahuje tři třídy, které značíme podle jejich reprezentantů – třídu s prvkem 1, třídu s prvky 2 a 3 (které mají stejný obraz) a třídu s prvkem 4. Můžeme si všimnout, že každá třída koobrazu zobrazení odpovídá právě jednomu prvku obrazu a mezi těmito množinami existuje bijekce. Ve spojitosti s předchozími úvahami lze také vidět, že obraz nese informace stěžejní pro pravou dělitelnost zobrazení, zatímco koobraz charakterizuje vlastnosti, které nám pomohou popsat zobrazení z hlediska levé dělitelnosti. Tyto poznatky můžeme formálně shrnout následovně:

**Lemma 1.** *Nechť  $f$  je zobrazení  $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$  a  $d$  je zobrazení  $d: \underline{k} \rightarrow \underline{m}$ . Zobrazení  $d$  dělí zprava  $f$  právě tehdy, když  $\text{im } f \subseteq \text{im } d$ .*

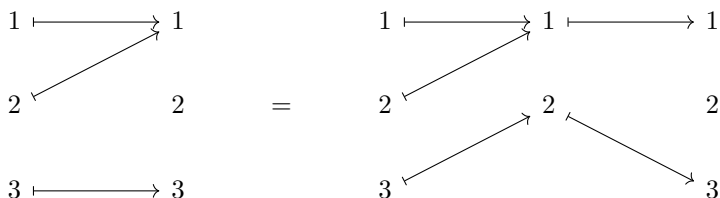
**Lemma 2.** *Nechť  $f$  je zobrazení  $f: \underline{n} \rightarrow \underline{m}$  a  $d$  je zobrazení  $d: \underline{n} \rightarrow \underline{l}$ . Zobrazení  $d$  dělí zleva  $f$  právě tehdy, když  $\sim_d \subseteq \sim_f$ <sup>5)</sup>.*

V této souvislosti je zajímavé zamyslet se, jak bychom mohli zobrazení z hlediska dělitelnosti lépe charakterizovat. Zajímá-li nás pouze pravá dělitelnost, všechna následující zobrazení se zprava dělí navzájem, neboť jejich obrazy se rovnají, a jsou tak z pohledu pravé dělitelnosti „stejná“. (Podobně ve standardní teorii čísel můžeme čísla 5 a  $-5$  považovat za stejná, co se týče vlastností dělitelnosti.)

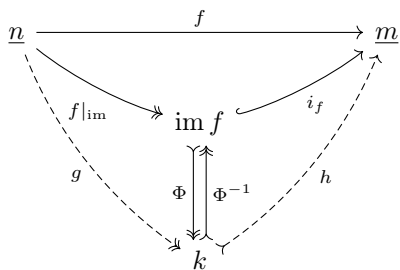


<sup>5)</sup>Tento vztah říká, že pokud jsou nějaké dva prvky v relaci podle zobrazení  $d$ , musejí být i v relaci podle zobrazení  $f$ . Jinými slovy, pokud  $d$  nějaké dva prvky „scvakne“, udělá to i  $f$ .

Všechna tato zobrazení mají jedno společné – můžeme je napsat jako složení nějakého zobrazení a injektivního zobrazení  $\underline{2} \rightarrow \underline{3}$  s obrazem  $\{1, 3\}$ , například následovně:



Není těžké rozmyslet si, že analogickým způsobem lze každé zobrazení  $f$  rozložit na injekci po surjekci přes ordinál  $\underline{k}$ , kde  $k = |\text{im } f| = |\text{coim } f|$ , jak znázorňuje následující graf<sup>6)</sup>. Pokud všechna zobrazení, s nimiž pracujeme, zachovávají pořadí, existuje navíc daný rozklad jednoznačně.



Tento rozklad je z hlediska dělitelnosti velmi zajímavý, protože každé zobrazení rozdělí na dvě složky – surjektivní  $g$ , která nese informaci o koobrazu zobrazení (neboli nám říká, jaké prvky dané zobrazení spojí), a je tedy zásadní z hlediska levé dělitelnosti; a injektivní  $h$ , jež nese informaci o obrazu zobrazení a charakterizuje jej z hlediska pravé dělitelnosti.

Z toho také vyplývá, že pracujeme-li například pouze s levou dělitelností, injektivní složka zobrazení v našich úvahách takřka nehraje roli a levou dělitelnost nijak neovlivňuje. Pro jednoduchost tedy v takových případech můžeme úvahy zúžit pouze na surjektivní zobrazení (jejichž injektivní složkou je prostá identita). Analogicky pak pro práci s pravou dělitelností stačí uvažovat pouze injektivní zobrazení, aniž by došlo k újmě na obecnosti.

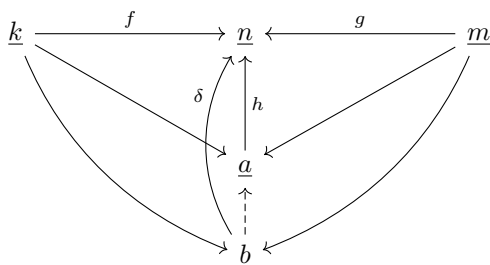
<sup>6)</sup> Značením  $f|_{\text{im}}$  rozumíme zobrazení  $\underline{n} \rightarrow \text{im } f$  definované předpisem  $f|_{\text{im}}(x) = f(x)$  a  $i_f$  je inkluze  $\text{im } f \rightarrow \underline{m}$ , tedy  $i_f(x) = x$ . Zobrazení  $\Phi$  je bijekce.

## Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Jelikož dělitelnost pro konečná zobrazení vychází z teorie čísel, nabízí se pokusit se najít analogie i k dalším známým konceptům, jako jsou například největší společní dělitelé. V teorii čísel můžeme největšího společného dělitele kromě zřejmé definice zavést i jako přirozené číslo, které je dělitelné všemi společnými děliteli. Tato definice nám poslouží i v případě zobrazení.

### Pravá dělitelnost

**Definice 4.** Mějme zobrazení  $f$  a  $g$  zobrazující na stejný ordinál  $\underline{n}$ . Pak jejich společným pravým dělitelem je každé zobrazení  $h$ , které zprava dělí jak  $f$ , tak  $g$ . Jejich největším společným pravým dělitelem nazveme každého jejich společného dělitele  $\delta$ , který je zprava dělitelný všemi jejich společnými pravými děliteli.

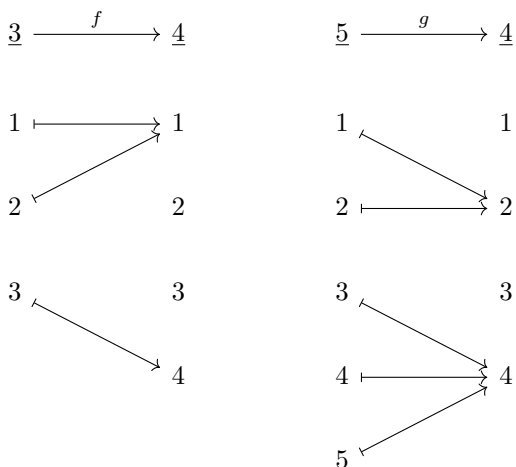


Pokusme se nyní obecně nalézt největšího pravého dělitele dvou zobrazení  $f$  a  $g$ . Už víme, že pro každého jejich společného pravého dělitele  $h$  musí platit  $\text{im } f \subseteq \text{im } h$  a  $\text{im } g \subseteq \text{im } h$ , tedy i  $\text{im } f \cup \text{im } g \subseteq \text{im } h$ . Také jistě lze vždy zkonstruovat zobrazení  $\delta$  na ordinál  $\underline{n}$  tak, že  $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g$ . Podle podmínky dělitelnosti je zobrazení  $\delta$  dělitelem  $f$  i  $g$  a zároveň pro každého společného dělitele  $h$  dostáváme  $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g \subseteq \text{im } h$ , odkud  $h$  zprava dělí  $\delta$ . Našli jsme tedy společného dělitele, jenž je dělitelný všemi společnými děliteli, a tak z definice je  $\delta$  největší společný pravý dělitel zobrazení  $f$  a  $g$ .

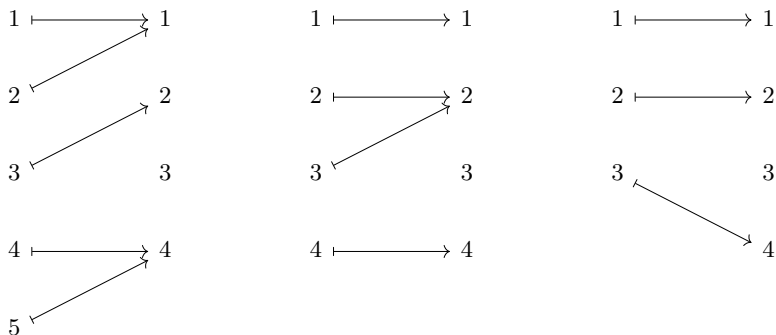
Můžeme si snadno rozmyslet, že zobrazení  $\delta$ , která splňují podmínku  $\text{im } \delta = \text{im } f \cup \text{im } g$ , je nekonečně mnoho, neboť je můžeme sestavit z libovolné množiny  $k$ , kde  $k \geq |\text{im } f \cup \text{im } g|$ . My už ale víme, že všechna tato zobrazení jsou z pohledu pravé dělitelnosti totožná a stačí nám uvažovat pouze jejich společnou injektivní složku. Injektivní největší společný dělitel dvou zobrazení tedy vždy existuje jednoduše.



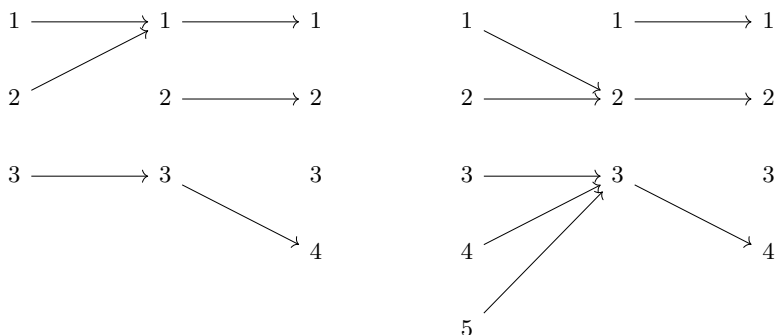
Tyto myšlenky lze ilustrovat na následujícím příkladu dvou zobrazení:



Jejich největším společným pravým dělitelem je každé zobrazení  $A \rightarrow \underline{4}$  takové, že jeho obrazem je sjednocení obrazů  $\text{im } f$  a  $\text{im } g$ , tedy  $\{1, 4\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 4\}$ . Příklady těchto zobrazení vidíme na obrázku níže.



Jediným injektivním největším společným pravým dělitelem je zobrazení napravo. Můžeme se jednoduše přesvědčit, že skutečně dělí obě zobrazení  $f$  i  $g$ .



Pokud bychom namísto největšího společného dělitele hledali nejmenší společný pravý násobek, mohli bychom postupovat velmi analogicky, jak je vidět už při srovnání jejich definic.

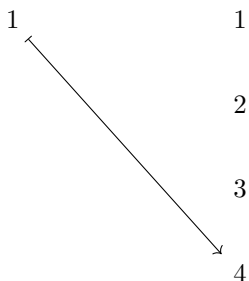
**Definice 5.** Mějme zobrazení  $f$  a  $g$  zobrazující na stejný ordinál  $\underline{n}$ . Pak jejich společným pravým násobkem je každé zobrazení  $h$ , které je zprava dělitelné jak  $f$ , tak  $g$ . Jejich nejmenším společným pravým násobkem nazveme každý jejich společný násobek  $\nu$ , který zprava dělí všechny jejich společné pravé násobky.

Analogicky budeme pracovat i při jeho hledání, a budeme tedy pohlížet na obrazy zobrazení. Mějme tedy zobrazení  $f$  a  $g$  z předchozí definice a pokusme se najít jejich nejmenší společný pravý násobek  $\nu$ .

Tentokrát o každém společném násobku  $h$  víme, že  $f$  a  $g$  zprava dělí  $h$ , a tudíž z kritérií dělitelnosti plyne  $\text{im } h \subseteq \text{im } f$  a  $\text{im } h \subseteq \text{im } g$ , odtud  $\text{im } h \subseteq \text{im } f \cap \text{im } g$ . Jistě můžeme zkonstruovat zobrazení  $\nu$  na ordinál  $\underline{n}$  takové, že  $\text{im } \nu = \text{im } f \cap \text{im } g$ , a už snadno dokážeme, že takové  $\nu$  je nejmenším společným pravým násobkem  $f$  a  $g$ . Stačí tedy ukázat, že také dělí jakýkoli společný pravý násobek. Pro ten platí  $\text{im } h \subseteq \text{im } f \cap \text{im } g = \text{im } \nu$ , a tedy opravdu  $\nu$  dělí  $h$ .

Jelikož pracujeme s pravou dělitelností, opět můžeme klást podmínku injektivitu a nalézt injektivní nejmenší společný pravý násobek.

V případě zobrazení, se kterými jsme pracovali při hledání největšího společného dělitele, bychom potřebovali nalézt zobrazení  $\nu$  s obrazem  $\text{im } \nu = \text{im } f \cap \text{im } g = \{1, 4\} \cap \{2, 4\} = \{4\}$  a injektivní nejmenší společný pravý násobek  $\nu$  by tedy vypadal následovně:



Lze upozorovat, že mezi děliteli a násobky zobrazení existuje dualita – mnohé definice, konstrukce i důkazy mají tutéž strukturu, jen pracují s jinými operacemi. Zajímavé je, že podobným způsobem můžeme dualitu nalézt i mezi pravou a levou dělitelností. Vyplyvá z kritérií dělitelnosti, na nichž pak stojí i veškeré úvahy při hledání největších společných dělitelů a nejmenších společných násobků. Nalezený popis konstrukce jednoho ze čtyř objektů nám tak dává návod, jak sestrojít i zbylé tři.

### ***Levá dělitelnost***

Abychom mohli z této duality vycházet, potřebujeme pracovat s analogiemi průniku a sjednocení obrazů.

Značením  $f \cap g$  budeme rozumět množinu tříd ekvivalence  $\sim_{f \cap g}$  definovanou následovně:

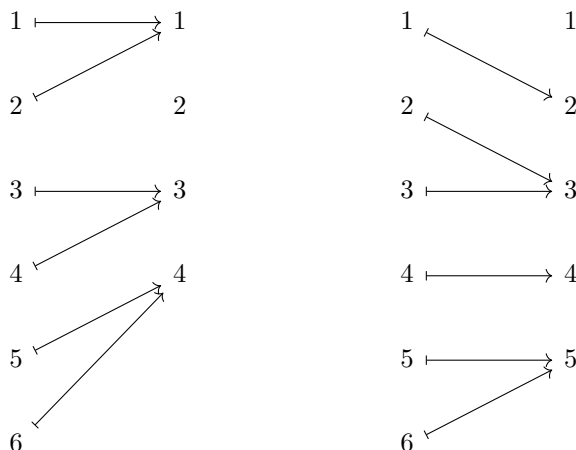
$$a \sim_{f \cap g} b \Leftrightarrow (f(a) = f(b) \wedge g(a) = g(b)).$$

Průnikem koobrazů pro nás tedy bude množina tříd ekvivalence sestavená tak, aby v jedné třídě byly všechny prvky, které mají stejný obraz jak v jednom, tak v druhém zobrazení.

Naopak jejich sjednocením v tomto kontextu rozumíme množinu tříd, které sjednocují prvky spojené alespoň jedním zobrazením a také prvky sjednocené „přes“ další prvky. Sjednocení koobrazů můžeme sestrojít algoritmicky: nejprve budou v relaci prvky  $a$  a  $b$ , pro něž platí  $(f(a) = f(b) \vee g(a) = g(b))$ . Dále budeme tvořit její tranzitivní obal tak, aby platilo  $a \sim_{f \cup g} b \wedge b \sim_{f \cup g} c \Rightarrow a \sim_{f \cup g} c$ .

Jinými slovy pro dvě zobrazení z množiny  $\underline{n}$  platí  $a \sim_{f \cup g} b$ , právě když existují  $x_1, x_2, \dots, x_j \in \underline{n}$  tak, že

$$f(a) = f(x_1) \wedge g(x_1) = g(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3) \wedge \dots \wedge g(x_j) = g(b).$$

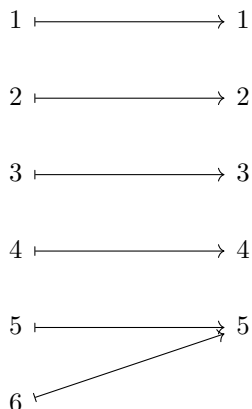


Např. průnikem koobrazů zobrazení na obrázku výše bude množina  $\{[1], [2], [3], [4], [5] = [6]\}$  a jejich sjednocením množina  $\{[1] = [2] = [3] = [4], [5] = [6]\}$ . Na tomto příkladu lze vidět, proč relaci  $\sim_{f \cup g}$  nestačí definovat analogicky k průniku jako  $a \sim_{f \cup g} b \Leftrightarrow (f(a) = f(b) \vee g(a) = g(b))$ . Tato relace by nebyla ekvivalencí, protože není tranzitivní a neplatilo by třeba  $1 \sim_{f \cup g} 3$ .

Definice největšího společného levého dělitele a nejmenšího společného násobku budou zcela analogické definicím uvedeným u pravé dělitelnosti, až na pořadí ordinálů. I dále můžeme postupovat stejně jako u pravé dělitelnosti. Mějme dvě obecná zobrazení  $f$  a  $g$  a pokusme se nejprve popsat jejich největšího společného dělitele. Pro každého společného dělitele  $h$  podle kritérií dělitelnosti platí  $\sim_h \subseteq \sim_f$  a  $\sim_h \subseteq \sim_g$ , tedy  $h(a) = h(b) \Rightarrow (f(a) = f(b) \wedge g(a) = g(b))$  a odtud  $\sim_h \subseteq \sim_{f \cap g}$ . Obdobně jako v případě pravé dělitelnosti není těžké se přesvědčit, že můžeme snadno zkonstruovat takové zobrazení  $\delta$ , že  $\sim_\delta = \sim_{f \cap g}$ , a že toto zobrazení dělí  $f$  i  $g$ . Porovnáním s  $\sim_h$  dostáváme, že  $\delta$  zleva dělí všechny společné dělitele  $f$  a  $g$ , a je tak jejich největším společným levým dělitelem. Zjistili jsme, že největším levým dělitelem je zobrazení, pro něž platí  $\text{coim } \delta = \text{coim } f \cap g$ . Pokud bychom chtěli největšího společného levého dělitele určeného jednoznačně, budeme klást podmínku surjektivitu, neboť pracujeme s levou dělitelností.

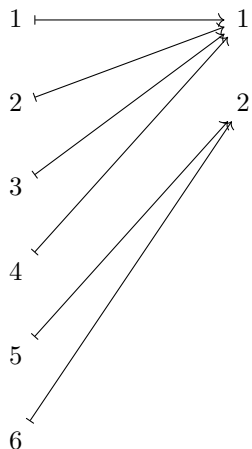
Největšího společného levého dělitele zobrazení výše bychom našli jako zobrazení  $\delta$  s koobrazem  $\text{coim } \delta = \text{coim } f \cap g = \{[1], [2], [3], [4], [5] = [6]\}$ .

Ten surjektivní by tedy vypadal následovně:



A nakonec se podívejme na nejmenší společný levý násobek. Analogickými úvahami dospějeme pro každý společný levý násobek  $h$  zobrazení  $f$  a  $g$  k nutné podmínce  $\sim_{f \cup g} \subseteq \sim_h$ . Když sestrojíme zobrazení  $\nu$  takové, že  $\text{coim } \nu = \text{coim } f \cup g$ , našli jsme násobek, který dělí všechny ostatní společné levé násobky, a tedy nejmenší společný levý násobek.

Surjektivní nejmenší společný násobek  $\nu$  zobrazení z příkladu v této části tedy bude mít koobraz  $\text{coim } \nu = \text{coim } f \cup g = \{[1] = [2] = [3] = [4], [5] = [6]\}$ , jak vidíme na obrázku níže.



## Závěr

Ukázalo se, že dělitelnost je možné smysluplně definovat i na jiných objektech, než jsou čísla.

Dělitelnost pro konečná zobrazení se nám podařilo popsat a díky kritériím dělitelnosti s ní můžeme rozumně pracovat – jak vidíme na příkladu hledání největšího společného dělitele. Na rozdíl od klasické dělitelnosti musíme rozlišovat pravou a levou dělitelnost, které jsou ale v mnohém velmi podobně strukturované. Díky jednoznačnému rozkladu můžeme s oběma dělitelnostmi pracovat zvlášť a zaměřovat se pouze na surjekce či injekce.

Stojí za povšimnutí, že celá práce s dělitelností nevyžaduje definici operace inverzní ke skládání, kterou by se ani pro obecná zobrazení nedalo smysluplně definovat. Také pro zobrazení nezavádíme operaci analogickou ke sčítání, a tak nemůžeme pokračovat ve stopách teorie čísel, například k dělení se zbytkem.

## Poděkování

Tento článek vznikl na základě mé práce SOČ [3] vedené Mgr. Dominikem Trnkou, kterému bych chtěla poděkovat za všechny čas a úsilí, které mi při psaní práce věnoval. Poděkování patří také porotě soutěže SOČ za připomínky a cenné rady.

## Literatura

- [1] Horák, P.: *Základy matematiky*. Masarykova univerzita, Brno, 2006. Dostupné z: [https://is.muni.cz/el/ped/podzim2011/MA2BP\\_PAL1/Algebra-skripta.pdf](https://is.muni.cz/el/ped/podzim2011/MA2BP_PAL1/Algebra-skripta.pdf)
- [2] Růžicka, P.: *Divisibility in commutative monoids*. Karlova univerzita, Praha, 2019. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~ruzicka/algebra191/lecture2-1.pdf>
- [3] Krejčí, T.: *Dělitelnost pro konečná zobrazení*. Práce SOČ, Masarykova univerzita, Brno, 2024.