

Rozhledy matematicko-fyzikální

Michal Klouček

Rubikova kostka, jak ji neznáte

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 2, 26–32

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153040>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

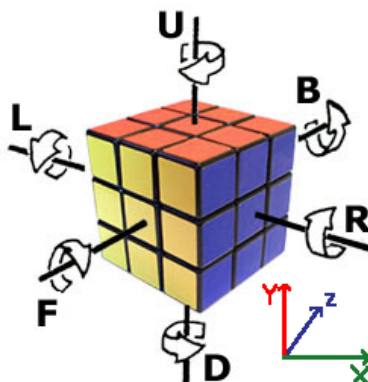
Rubikova kostka, jak ji neznáte

Michal Klouček, Hořické gymnázium, Hořice

Abstrakt. Článek je určený k pohledu na Rubikovu kostku okem matematika a také k přiblížení populárních metod pro její skládání. Při čtení je vhodné mít Rubikovu kostku po ruce nebo využít online simulátor na webu alg.cubing.net [1]. Umět již kostku složit není potřeba.

1. Rubikova kostka z pohledu matematiky

K vysvětlení použiji základní notaci, zde je její stručný popis: pravá strana – R (anglicky right), levá – L (left), horní – U (up), dolní – D (down), přední – F (front), zadní – B (back), viz obr. 1 [3].



Obr. 1: Možné tahy na Rubikově kostce popsané písmeny R , U , L , D , F , B

Tahy se provádí ve směru otáčení hodinových ručiček. Pokud za popisem tahu (za tahem) následuje číslo, určuje, kolikrát má být tah proveden (stále je to však při skládání běžně považováno za jeden tah), a je-li tah zakončen symbolem $'$, je proveden „pozpátku“, tedy proti směru otáčení hodinových ručiček. Uvidíte tedy např. tahy F , $R2$ či D' . Povšimněte si, že $R2' = R2$, to platí pro všechny strany. Nutné je ještě zmínit rotování celé kostky. Nejedná se o tah, jen o přehmátnutí (otočení celou kostkou). Přehmátnutí jsou značena x , y , z podle osy rotace. Jejich směr je shodný s tahy R , U , F v uvedeném pořadí. Méně důležité jsou „slice“

tahy (otočení střední vrstvy): $M = R L' x'$, $E = U D' y'$, $S = F' B z$. Detailnější notaci nebo animaci tahů naleznete na odkazu [1], který velice doporučuji, nebo [2].

Rubikova kostka je uváděna jako učebnicový příklad grupy.

Definice 1. Grupa je algebraická struktura tvořená neprázdnou množinou G a binární operací $\circ$, která splňuje následující podmínky:

- G je uzavřená vzhledem k operaci $\circ$, tj. pro každé $a, b \in G$ je $a \circ b \in G$.
- Operace $\circ$ je asociativní, tj. pro každé $a, b, c \in G$ platí $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- G obsahuje neutrální prvek, tj. existuje $e \in G$ tak, že pro každé $a \in G$ platí $e \circ a = a \circ e = a$.
- Ke každému prvku z množiny G existuje inverzní prvek, tj. pro každé $a \in G$ existuje $b \in G$ tak, že $a \circ b = b \circ a = e$.

Grupu Rubikovy kostky označme $(K, \circ)$.

Množina K je tvořena všemi možnými permutacemi kostiček, které konstrukce kostky umožňuje (jde o tzv. dosažitelné pozice). Lze ukázat, že takových permutací existuje 43 252 003 274 489 856 000.

Operace $\circ$ představuje chronologické provádění tahů. Každý prvek grupy lze tedy chápat jako transformaci kostiček na nové místo nebo jako sekvenci základních tahů, zvanou algoritmus.

Druhý pohled nám říká, že grupa G je generovaná tahy R, U, L, D, F, B , píšeme $G = \langle R, U, L, D, F, B \rangle$, což znamená, že každý její prvek je řetězcem z množiny $\{R, U, L, D, F, B\}$ (symbol $\circ$ se v zápise obvykle vynechává).

Neutrálním prvkem je identická permutace, tu lze získat např. čtyřnásobným opakováním operace, např. R^4 . Inverzního prvku lze dosáhnout pomocí tahů pozpátku, ty se dají generovat pomocí R, U, L, D, F, B , protože platí $R' = R^3$ (analogicky pro ostatní operace). Asociativita tahů je zřejmá.

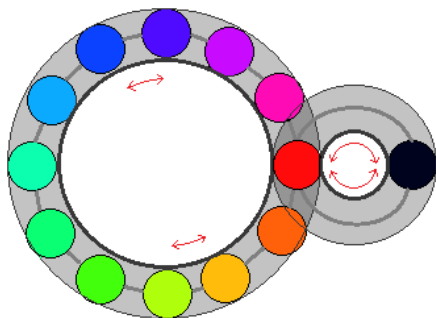
Na pořadí tahů záleží, a proto grupa $(K, \circ)$ není komutativní. Přesvědčte se sami, že například $R U \neq U R$.

Díky vlastnostem grup umožňuje grupa Rubikovy kostky zredukovat tahy potřebné ke složení kostky orientováním nebo permutováním kostiček, složit kostku pomocí inverze atd. Také můžeme grupu Rubikovy kostky rozdělit na jednodušší podgrupy.

2. Metoda Old Pochmann

Jedna z nejdůležitějších technik skládání Rubikovy kostky se nazývá komutátor. Využívá nekomutativní vlastnost grupy a je nástrojem tak mocným, že díky němu je skládající schopen prohodit pouze tři libovolné kostičky na pár tahů (a to nejen na Rubikově kostce). Komutátor je však náročný na pochopení, proto zde ukáži podobný způsob prohazování kostiček, sice náročnější na provedení, zato však snazší na pochopení. Jedná se o metodu skládání, nazývanou *Old Pochmann*.

Než se ale pustíme do skládání Rubikovy kostky, ukážeme si metodu na jednodušším hlavolamu zvaném *maďarské prstence*¹⁾. Mějme jeden prstenec osázen 12 kuličkami, druhý dvěma kuličkami tak, že se protínají v jedné kuličce, viz obr. 2.



Obr. 2: Maďarské prstence v poměru 12 : 2 ve složené pozici, vytvořeno v programu Microsoft Paint

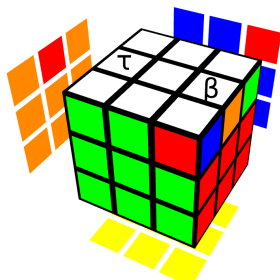
Levý prstenec lze otáčet po 30° , pravý po 180° , přičemž kuličky se pohybují s prstencem. Náhodně rozmístěné kuličky je třeba uspořádat. Zde je postup jednoduchý. Nazvěme „buffer“ pravou pozici pravého prstence a „target“ pozici průniku prstenců. Podle například červené kuličky lze určovat, kam patří kuličky ostatní. Stačí jen opakovat následující: kuličky na bufferu připravit otáčením levého prstence pozici na target a otočit prstenec pravý. Kulička se dostane na své místo a do bufferu se dostane jiná. Kuličky se jedna po druhé dostanou na svou pozici. Objeví-li se na bufferu tmavá kulička, ale prstence nejsou složeny, lze ji stejným způsobem vyměnit za „nesloženou“ kuličku. Tak je možno skládat i Rubikovu kostku.

¹⁾Chcete-li si vyzkoušet maďarské prstence online, naleznete je na odkazu [5].

Nyní přistupme k metodě Old Pochmann. Nechť jsou dány algoritmy

$$T = R U R' U' R' F R^2 U' R' U' R U R' F',$$

viz obr. 3

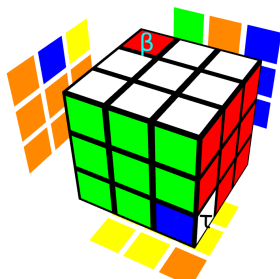


Obr. 3: Provedení algoritmu T na Rubikově kostce s označením bufferu (β) a targetu (τ)

a

$$\psi = R U' R' U' R U R' F' R U R' U' R' F R,$$

viz obr. 4.



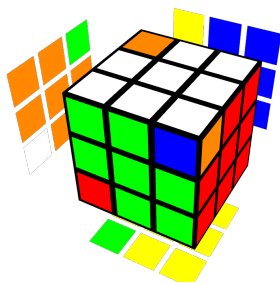
Obr. 4: Provedení algoritmu ψ na Rubikově kostce s označením bufferu (β) a targetu (τ) [1]

Algoritmus T se používá k prohazování hran, ψ k prohazování rohů. Kam kostičky patří, lze určit podle středů. Ty jsou v mechanické Rubikově kostce dokonce spojeny šrouby a nelze je „rozmíchat“. Prozrazují tak, jakou barvu musí mít zbytek stěny ve složené pozici. Pozice bufferu je na obr. 3 a 4 označena písmenem β a pozice targetu písmenem τ . Povšimněte si i dvou prohozených kostiček mimo buffer a target, bez kterých by algoritmus neexistoval. Omezují tahy, kterými lze kostičky

na target přesouvat. U algoritmu T lze používat jen tahy L , D , M , E a jejich násobky a inverze a u algoritmu ψ jen tahy R , F , D a jejich násobky a inverze, aby ostatní kostičky zůstaly zachovány. Tyto tahy se nazývají „set up“ tahy. Od maďarských prstenců se set up tahy liší také tím, že je nutno provádět jejich inverze po provedení T nebo ψ .

Jak prohazování kostiček metodou Old Pochmann funguje, si ukážeme na příkladech.

Příklad 1. Mějme kostku zamíchanou ze složeného stavu algoritmem $U2 R' D R U2' R' D' R$, viz obr. 5.

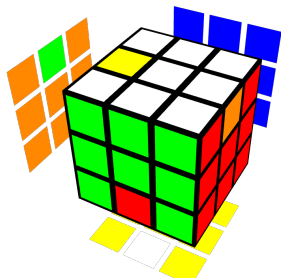


Obr. 5: Zamíchání Rubikovy kostky algoritmem $U2 R' D R U2' R' D' R$ [1]

Kostička na bufferu patří na místo levého dolního předního rohu, na oranžovou stěnu. Tuto kostičku lze se správnou orientací přesunout na target tahy $D2R$, to jsou naše set up tahy. Následuje prohození ψ a set up tahy pozpátku, tedy $\psi R' D2$. Kostička z bufferu by se měla složit, a místo ní by se měla objevit bílo-zeleno-červená kostička patřící na pozici pravého horního předního rohu, na bílou stěnu. Stejným postupem byste měli docílit algoritmem $F \psi F'$ složení celé kostky.

Příklad 2. Mějme kostku zamíchanou algoritmem $U M' U2 M U$, viz obr. 6. Zde hrana na bufferu patří přímo na pozici targetu, proto set up tahy nejsou žádné a stačí provést jen T . Na pozici bufferu se tím dostane žlutozelená kostička, patřící dolů dopředu, přesněji na místo bílé barvy bíločervené hrany. Tu lze na pozici targetu přesunout tahy $D' L2$. Zbývá jen prohození T a navrácení set up tahů $L2D$ a kostka je složená.

Tímto způsobem je možné složit Rubikovu kostku z každé pozice. Zde ukázaná metoda, nazývaná Old Pochmann, byla vynalezena ke skládání Rubikovy kostky poslepu. Existuje také mnoho jiných disciplín, ve kterých se soutěží. Souhrnně se nazývají speedcubing.



Obr. 6: Zamíchání Rubikovy kostky algoritmem $U M' U^2 M U$ [1].

3. Speedcubing

Doposud nejrychleji složil Rubikovu kostku Číňan Xuanyi Geng za 3,05 sekundy. Všechny výsledky je možné nalézt na stránkách [7], známých jako WCA. Na těchto stránkách jsou zapsané veškeré výsledky i osoby, které soutěžily. Uvidíte tam i nejlepší průměry nebo výsledky s jinými hlavolamy a „eventy“, žebříčky osob, zajímavé statistiky, oficiální pravidla, informace o soutěžích a mnoho dalšího. Záznam většiny rekordů můžete nalézt nejen na platformě YouTube.

Po prohlédnutí stránek WCA si asi říkáte, jak je možné skládat tak rychle nebo poslepu? Pro každý typ skládání jsou vytvořeny speciální metody. Pro skládání na rychlost se používá zejména metoda CFOP. Při ní si skládající nejprve rozmyslí prvních pár tahů (cca 10). Během jejich provedení však pátrá po dvojicích hrany a rohu. Jakmile doskládá první krok, pouští se do vysledované dvojice, přitom opět sleduje další nesložené kostičky. Když složí první dvě vrstvy, použije dva ze 78 algoritmů na dokončení poslední vrstvy. Složil-li kostku efektivně, pak mu to zabralo okolo 55 tahů. Pro lepší pochopení naleznete mezi odkazy video vysvětlující, na co se speedcuber soustředí (v angličtině) [8]. Je-li skládající zkušený, pak tahy provádí bezmyšlenkovitě, pouze si spojí to, co vidí, s pohybem ruky. Stává se, že algoritmus není schopen provést pomalu, protože si nepamatuje zápis algoritmu, jen pohyb. Většina speedcuberů zná a aktivně používá 20 až 1 200 algoritmů (odhad, nikoli studie).

Záhadou může být skládání poslepu. Všimněte si, že u představené metody Old Pochmann lze vysledovat pořadí kostiček, které se dostanou na pozici bufferu. Skládající si každou rohovou a hranovou pozici na kostce pojmenoval písmenem anglické abecedy bez *X* a *Y*. Pořadí kostiček si tedy pamatuje jako řadu zhruba dvaceti písmen. Písmena si pamatuje po dvojicích, zakódovaných do slov. Například dvojici písmen

RL si může pamatovat jako RohLík. Slova si pak může uložit do hlavy třeba pomocí příběhu, který si sám vymyslí.

Skládání poslepu funguje tak, že si speedcuber kostky prohlédne, pak si zakryje oči a bez zastávky skládá všechny kostky poslepu. Když speedcuberi skládají desítky kostek poslepu, pravděpodobně si dobře pamatují nějakou velkou budovu. Tu si v hlavě rozdělí na patra a na místnosti. Jednotlivé příběhy, které si pro kostky pamatují, si představují v jednotlivých místnostech – jedná se o „memorování pomocí místností“. Podíváte-li se na nějaké video o skládání více kostek poslepu (opět jedno naleznete mezi odkazy [9]), povšimnete si, že skládající si rovná kostky do bloků, připomínajících nějakou městskou čtvrť.

Jednou z nejobtížnějších disciplín, ač se to na první pohled nemusí tak jevit, je FMC (Fewest Move Count). Jde o skládání Rubikovy kostky s co nejmenším počtem tahů. Soutěžící zde může plně využít vlastností grupy Rubikovy kostky [10]. Právě v této disciplíně se tak může nejvíce uplatnit znalost matematiky.

Literatura

- [1] *[Alg.cubing.net [beta]]*. 2011. Dostupné z: <https://alg.cubing.net/> [cit. 2024-09-02].
- [2] Planeta her: *Jak se skládá Rubikova kostka: návod, který zvládne každý*. Dostupné z: <https://www.planetaher.cz/blog/jak-se-sklada-rubikova-kostka-navod>.
- [3] Fandom: *Rubik's cube notation*. 2004. Dostupné z: <https://rubiks.fandom.com/wiki/Notation> [cit. 2025-01-25].
- [4] Hort, D., Rachůnek, J.: *Algebra I*. Univerzita Palackého, Olomouc, 2005 Dostupné z: <https://kag.upol.cz/data/upload/15/ATA.pdf>.
- [5] *Play Hungarian rings online!* Dostupné z: <https://ruwix.com/online-puzzle-simulators/hungarian-rings/> [cit. 2024-09-02].
- [6] *Ruwix: Rubik's Cube and Twisty Puzzle Wiki*. Dostupné z: <https://ruwix.com>.
- [7] <https://www.worldcubeassociation.org/>.
- [8] *What a Speedcuber sees when solving a Rubik's cube*. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=RIY0CIX0fA> [cit. 2024-09-02].
- [9] Siggins, G.: *62/65 57:47 Multi-Blind World Record – Graham Siggins*. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=GoGVYQqgTgA>.
- [10] Opršal, J.: *Rubikova teorie grup*. Matematický korespondenční seminář, MFF UK, Praha, Dostupné z: <https://prase.cz/library/rubiksgrouptheoryJ0/rubiksgrouptheoryJ0.pdf>.