

Pravděpodobnost zaokrouhlených převrácených hodnot

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 2, 41–43

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153042>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Pravděpodobnost zaokrouhlených převrácených hodnot

Dnešní úloha souvisí s článkem, který se bude věnovat sčítání řad, Eulerovu číslu a Eulerově–Mascheroniho konstantě a který pro vás chystáme do příštího čísla.

Úloha

Zvolme náhodně číslo x z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že dolní celá část čísla $1/x$, tj. $\lfloor 1/x \rfloor$, je liché číslo?

Na tomto místě je třeba vyjasnit si, co se myslí náhodnou volbou čísla x z intervalu $(0, 1)$. Tím myslíme volbu při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti. Pro náš příklad ji postačí definovat tak, že pravděpodobnost, že x vybereme z daného intervalu I je přímo úměrná délce tohoto intervalu (nezávisle na tom, jde-li o otevřený, uzavřený nebo polouzavřený interval). Navíc, protože délka celého intervalu $(0, 1)$ je rovna 1 a pravděpodobnost výběru čísla z $(0, 1)$ je také 1, musí být pravděpodobnost výběru $x \in I$ rovna jeho délce, tj. pro $0 < a < b \leq 1$:

$$P(x \in (a, b)) = P(x \in \langle a, b \rangle) = P(x \in (a, b]) = P(x \in \langle a, b \rangle) = b - a$$

a obdobně, je-li $a = 0$ (pak musí být interval zleva otevřený). Nabádáme čtenáře, aby si pomyslel, že takováto definice odpovídá intuici za náhodným výběrem čísla z omezeného intervalu.

Nyní se vraťme k úloze z minula. Popisovali jsme „kouzlo“:

- Připravte si kartičku s deseti sloupečky.
- Požádejte kamaráda, ať napíše do prvních dvou sloupců dvě čísla mezi 1 a 20.
- Do dalších sloupců ať kamarád vždy napíše součet předchozích dvou.
- Na závěr ať kamarád spočítá součet všech čísel na kartičce.
- Udipte kamaráda tím, že výsledek oznámíte okamžitě, bude totiž roven 11násobku čísla v 7. sloupci (a násobit 11 jde snadno). Taký rovnou oznamte, že podíl 10. a 9. řádku je 1,6 (s přesností na jedno desetinné místo).

Úloha zněla: *Dokažte, že trik funguje. To jest, že vaše odpověď bude vždy správná bez ohledu na to, jaká čísla váš kamarád vybral.*

Řešení souvisí s posloupností Fibonacciho čísel $(F_n)_{n=0}^\infty$. Připomeňme jejich rekurentní definici: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Tab. 1: Několik prvních Fibonacciho čísel

Pro Fibonacciho čísla platí celá řada zajímavých vztahů. Nám se bude hodit vztah pro součet prvních n členů, který se dá ověřit matematickou indukcí:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \quad (1)$$

Nyní pišme čísla, která dostává kamarád, pokud na začátku zvolil čísla a, b mezi 1 a 20. S využitím rekurentní definice Fibonacciho čísel odvodíme pro číslo x_j , které dostane v j -tém sloupci, vztahy:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= b = a \cdot F_0 + b \cdot F_1 \\ x_3 &= a + b = a \cdot F_1 + b \cdot F_2 \\ x_4 &= a \cdot F_2 + b \cdot F_3 \\ &\vdots \\ x_7 &= a \cdot F_5 + b \cdot F_6 \\ &\vdots \\ x_{10} &= a \cdot F_8 + b \cdot F_9 \end{aligned}$$

Nyní už můžeme ukázat, že trik funguje.

- Podle vzorce (1) je součet čísel na kartičce roven

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} &= a + a(F_0 + F_1 + \cdots + F_8) + \\ &\quad + b(F_1 + F_2 + \cdots + F_9) = \\ &= a + a(F_{10} - 1) + b(F_{11} - 1) = \\ &= aF_{10} + b(F_{11} - 1) = \\ &= a \cdot 55 + b \cdot 88 \end{aligned}$$

Zároveň

$$x_7 = a \cdot F_5 + b \cdot F_6 = a \cdot 5 + b \cdot 8.$$

Odtud

$$11 \cdot x_7 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}.$$

- Pro podíl x_{10}/x_9 dostáváme:

$$\frac{x_{10}}{x_9} = \frac{aF_8 + bF_9}{aF_7 + bF_8} = \frac{a \cdot 21 + b \cdot 34}{a \cdot 13 + b \cdot 21} = \frac{34}{21} \cdot \frac{b + a \frac{21}{34}}{b + a \frac{13}{21}}.$$

Dále platí

$$1,619 < \frac{34}{21} < 1,62.$$

Čtenář snadno ověří, že

$$0,99 \leq \frac{b + a \frac{21}{34}}{b + a \frac{13}{21}} \leq 1.$$

Tím je dokázáno, že

$$1,6 < 0,99 \cdot 1,619 < \frac{x_{10}}{x_9} < 1,62,$$

tudíž podíl $x_{10}/x_9 = 1,6$ s platností na jedno desetinné místo.

Uveďme pro zajímavost, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,$$

kde

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$$

je slavná iracionální konstanta zvaná zlatý řez. V tomto čísle vystupuje i v článku L. Spíchala.