

Vladimír Wagner

Co nám říká Ciolkovského rovnice o mezihvězdných letech?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 2, 44–65

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153043>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Co nám říká Ciolkovského rovnice o mezihvězdných letech?

Vladimír Wagner

Pro dosažení i nejbližších hvězd je potřeba zajistit odpovídající pohon. Pokud půjde o raketový motor, je třeba uvolnit nejen dostatek energie, ale také udělit kosmické lodi dostatečnou hybnost a zajistit její zrychlování. Let rakety a potřebné parametry popisuje Ciolkovského rovnice. Podívejme se na výzvy spojené s mezihvězdným letem, které nám ukazuje.

Pro expanzi člověka do vesmírného prostoru je klíčový pohon. Již pro širší a rychlejší cestování v naší Sluneční soustavě bude potřeba využívat jaderné pohony. A bez nich s největší pravděpodobností nebude možné Sluneční soustavu opustit. V současné době letí ven ze Sluneční soustavy sondy Pioneer 10 a 11, které už však nejsou v provozu. Sonda Voyager 1 a 2 už také vyletěly z heliosféry, tedy oblasti, kam dosáhne sluneční vítr, ty však stále vysílají data. Sonda New Horizons prolétá Kuiperovým pásem a také směřuje ven do mezihvězdného prostoru. Všechna tato tělesa k potřebnému urychlení využila metodu gravitačního praku. Jejich rychlost je však taková, že jim cesta k nejbližším hvězdám potrvá desítky až stovky tisíc let.

V principu lze vysoké urychlení získat pomocí sluneční plachetnice, přičemž se nemusí využívat pouze záření Slunce, ale i záření velmi výkonných laserů. Pokud to však má být na rychlosti potřebné pro mezihvězdné lety, má potenciál pouze pro relativně malá zařízení. Krátká doba urychlování také vede k zrychlením, která jsou pro lidskou posádku neakceptovatelná. Hypoteticky by se možná dala využít exotická fyzika za Standardním modelem hmoty a interakcí ve formě černých děr či Alcubierrův pohon, který ze sci-fi známe jako warp, ale to může být úplně mimo fyzikální realitu.

Klíčovými nejen pro potenciální mezihvězdné lety jsou tak odpovídající raketové motory. Podívejme se proto na zásadní problémy v této oblasti. Pokud chceme změnit rychlost kosmické lodi raketovým motorem, potřebujeme k tomu nejen dostatek energie, ale také hybnosti vyvrženého materiálu. Potřebné parametry a let rakety pak popisuje tzv. Ciolkovského rovnice. V následujícím článku se pokusíme rozebrat podmínky pro realizaci mezihvězdných letů z tohoto hlediska. V případě

takových letů by bylo vhodné dosáhnout rychlostí, které překračují procenta rychlosti světla. Proto je potřeba využívat speciální teorii relativity. Zde budeme potřebovat jen některé její vztahy a dopady na úrovni textu pro řešitele Fyzikální olympiády [1]. Při řešení Ciolkovského rovnice se také neobejdeme bez základů diferenciálního a integrálního počtu, opět na úrovni řešitelů Fyzikální olympiády [2,3,4]. Realizace mezihvězdných letů vede k potřebě jaderných zdrojů energie. Odpovídající popis jaderné fyziky, speciální teorie relativity, řešení typů diferenciálních rovnic a dalších témat, která se vyskytují při řešení radioaktivního zákona i Ciolkovského rovnice, je na úrovni řešitelů Fyzikální olympiády podán v brožuře [5]. Pro podrobnější pochopení problematiky některých matematických a fyzikálních oblastí, které budeme využívat, lze nahlédnout do zmíněné literatury. Nyní se podíváme na mezihvězdné lety.

Posuzované příklady mezihvězdných letů

Hvězdy jsou od nás ve srovnání s našimi současnými možnostmi cestování v obrovských vzdálenostech. Let k nim představuje extrémní výzvu. Je tak pochopitelně otevřenou otázkou, zda a kdy lidstvo s tím spojené překážky překoná. Vzdálenosti nejbližších hvězd jsou větší než čtyři světelné roky. Tedy i světlo, které definuje hraniční rychlost v našem vesmíru, potřebuje k překonání těchto vzdáleností roky. Pokud chceme mezihvězdný let realizovat v průběhu lidského života, tedy v řádu desetiletí, musí se naše kosmická loď pohybovat nejméně v řádu desítek procent rychlosti světla. Pokud chceme realizovat let trvající řádově staletí, potřebujeme dosáhnout nejméně procenta rychlosti světla.

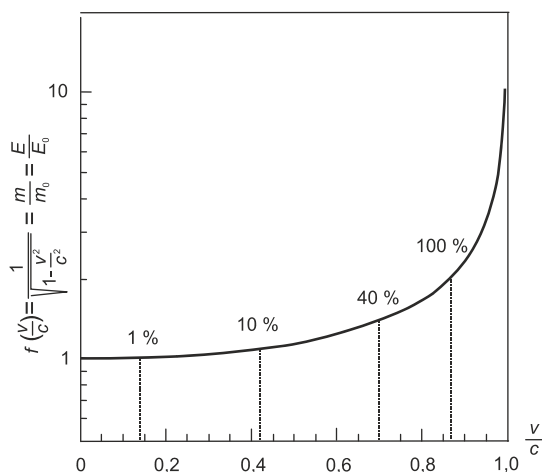
Předpokládejme, že chceme dostat k nejbližším hvězdám automatické sondy. Jejich přežití v řádu staletí je sice velmi náročné, ale ne nepředstavitelné. Zároveň má lidská civilizace zkušenosti s realizací projektů trvajících staletí. Takže i takto dlouhé doby letu nejsou pro nás úplně mimo realitu. Takový mezihvězdný let se uvažuje i v čínském sci-fi románu Problém tří těles. Je pochopitelně otázka, jak zajistit, aby vědecké poznatky získané a odvysílané až po takové době nebyly v době dokončení projektu úplně zastaralé. Do diskuzí tohoto problému se pouštět nebudeme. Nyní se podíváme na problematiku čistě z hlediska energetické náročnosti a řešení Ciolkovského rovnice.

Nároky, které musí pohony mezihvězdných plavidel naplnit, si tak ukážeme na několika příkladech. Nejbližší hvězdou je Proxima Centauri, což je rudý trpaslík gravitačně vázaný k systému dvou hvězd slunečního typu Alfa Centauri. Vzdálenost tohoto systému od Země je zhruba

4,3 světelných let. Proxima Centauri má jednu potvrzenou exoplanetu zhruba hmotnosti i velikosti Země a dva kandidáty na exoplanety. Jeví se tak jako velmi zajímavý cíl první mezihvězdné výpravy.

Podrobněji rozebereme lety, při kterých se dosáhne rychlosti $0,2$ rychlosti světla, tedy $0,2c$, a o řád pomalejší, kdy nám bude stačit rychlost pouhých $0,02c$. V prvním případě se let realizuje v době překračující 22 let. Konkrétní doba letu závisí na tahu motorů a jak rychle se rychlosti $0,2c$ dosáhne. Případně na tom, jestli předpokládáme průlet touto rychlostí systémem Proximy Centauri nebo budeme při přiletu k němu brzdít. V případě, pokud budeme zrychlovat do poloviny cesty konstantním zrychlením a pak zase konstantním zrychlením zpomalovat, bude doba trvání letu necelých 44 let. Tento výsledek dostaneme, když využijeme vztahy pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Je tak třeba počítat s dobou mezi 22 až 44 lety. Což už jsou doby srovnatelné s trváním současných dlouhodobých misí.

Je třeba připomenout, že i pro rychlost $0,2c$ je pořád ještě možné využít nerelativistické přiblížení. Jak je vidět na grafu 1, až do rychlosti $0,14c$ nepřekračuje rozdíl mezi relativistickým výpočtem a nerelativistickým klasickým přiblížením 1 %. Můžeme to ocenit na poměru celkové a klidové energie (hmotnosti), viz vztah (4) a [1,5].



Graf 1: Poměr celkové a klidové energie (relativistické a klidové hmotnosti) v závislosti na rychlosti objektu. Je vidět, že relativistické efekty (nárůst relativistické hmotnosti) přesáhnou hodnotu 1 % až pro rychlost $0,14c$, pro rychlost zhruba $0,87c$ už dosahují 100 %.

V případě rychlosti $0,02c$, která je snáze dosažitelná, se už doba trvání mise protáhne na více než 200 let. To bude druhý námi podrobně studovaný případ. Budeme se hlavně věnovat těmto dvěma rychlostem. Pro srovnání pak ještě na opravdu relativistickou rychlost $0,8c$ a poměrně nízkou rychlost $0,002c$ (600 km/s), která může být již relativně brzy v našich technických možnostech.

Budeme předpokládat, že čistá hmotnost lodi po vypotřebování veškeré hmoty vyvrhnuté při urychlování či zpomalování lodi, bude 100 tun. Jen část z toho je užitečné zatížení, je zde také hmotnost motorů a dalšího vybavení potřebného k realizaci pohybu lodi. Hmotnost je vybrána tak, aby pro automatický let představovala realistickou hodnotu. Zároveň se pak dají získané hodnoty snadno přeskálovat pro řádové zvýšení či snížení hmotnosti lodi.

Možné typy pohonů

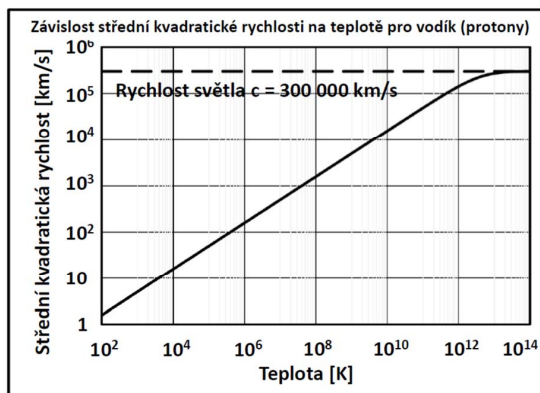
Než se podíváme na možné typy pohonů, připomeňme si fyzikální veličiny definující jejich parametry. Jedná se o tah motoru, specifický impuls a výtokovou rychlost. *Tah motoru* udává sílu, kterou působí na urychlovanou loď, jeho jednotkou je newton. Udává, jaké zrychlení je schopen pohon poskytnout, a jak rychle bude loď s danou hmotností zrychlovat. Na něm závisí, kdy dosáhne cílové rychlosti.

Specifický impuls je poměr tahu a hmotnosti spotřebované pracovní látky za časovou jednotku. Síla je spojena se změnou hybnosti za časovou jednotku a specifický impuls je tak, pokud se udává v jednotkách SI, roven efektivní *výtokové rychlosti*. Jako standard pro srovnávání si uveďme, že výtoková rychlost klasického raketového motoru využívajícího spalování kapalného vodíku je zhruba $4,5 \text{ km/s}$ a jeho specifický impuls je tedy $4,5 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$. To jsou motory, které využívala raketa Saturn nebo americký raketoplán.

Efektivní výtoková rychlost je přesně ta veličina, kterou lze využít ve zmíněné Ciolkovského rovnici. Rozdíl mezi skutečnou a efektivní výtokovou rychlostí je dán její transformací přes hybnost do tahu.

Potřebné výtokové rychlosti lze získat dvěma způsoby. První možností jsou *tepelné motory*. Zde je vysoká teplota spojena se střední kinetickou energií chaotického tepelného pohybu částic plynu nebo plazmatu. Dosažené teplotě odpovídá příslušná hodnota výtokové rychlosti (viz graf 2). V tomto případě je kritická právě hodnota teploty. K jejímu dosažení lze využít například *štěpné jaderné reaktory*. U nich se využívá vysokoteplotní reaktor s vysokým obohacením jaderného paliva. Ten ohřívá vodík,

který je pracovní látkou. Ta pak vytéká tryskou ven. Uvažovaly se také jiné pracovní látky, ale ty měly i vzhledem k vyšším hmotnostem atomů nižší dosažitelné výtokové rychlosti. Je třeba zmínit, že nižší výtokové rychlosti u motoru spalujícího vodík a kyslík jsou také způsobeny vyšší hmotností atomu kyslíku.



Graf 2: Souvislost mezi dosaženou teplotou a střední kvadratickou rychlostí pro vodík v plynu nebo protony v plazmatu. Střední kvadratická rychlost závisí i na složení plynu (plazmatu), výtoková rychlost pak na geometrii a konstrukci motoru, tedy na převodu chaotického tepelného pohybu na uspořádaný pohyb plynu (plazmatu) tryskou z motoru.

Vysokoteplotní reaktory umožňují teploty v řádu $1\,000\text{ }^{\circ}\text{C}$. To je srovnatelné s motory využívající chemické hoření. V tomto ohledu se dosahuje vyšších efektivních výtokových rychlostí, než je tomu u raketových motorů na pevná paliva i těch na kapalná. Například jaderný reaktor projektu NERVA umožňoval teploty okolo $2\,200\text{ }^{\circ}\text{C}$ a efektivní výtokové rychlosti 8 km/s . Dalším vyladěním parametrů, včetně zvýšení teploty až ke $2\,600\text{ }^{\circ}\text{C}$, se lze dostat k efektivní výtokové rychlosti blízké 10 km/s . To je dvojnásobek oproti raketovým motorům spalujícím vodík a kyslík. Jak bylo zmíněno, v tomto případě je rozdíl dán tím, že čistý vodík je lehčí než systém složený z vodíku a kyslíku.

Ještě vyšší teploty lze získat, pokud se kinetická energie neutronů vznikajících při štěpení předává přímo protonům vodíku. V tomto případě je potřeba mít úplně jinou konstrukci reaktoru. Musí se realizovat tekuté nebo plynné jádro obsahující štěpné palivo. V případě reaktorů s plynným jádrem by se v principu mohlo dosáhnout výtokové rych-

losti až 40 km/s. Ovšem žádný prototyp takového reaktoru zatím nebyl realizován a jedná se o velkou technologickou výzvu.

Je ještě jedna možnost, jak pomocí štěpení získat vyšší výtokové rychlosti. Už na počátku kosmické éry se uvažovalo o využití jaderných explozí, kdy by se během letu postupně odpalovaly jaderné bomby. Připomeňme projekt Orion i mezihvězdný let z čínské sci-fi knize Problém tří těles. Zde se dá dosáhnout výtokových rychlostí až 100 km/s. Ještě vyšší lze získat ve výbuších termojaderných bomb.

V případě využití *termojaderné fúze* lze získat daleko vyšší teploty, než je tomu u štěpení. Zde existují různé možnosti udržení plazmatu, a tedy i konstrukce termojaderného fúzního raketového pohonu. Lze kombinovat dlouhé udržení plazmatu a jeho relativně nízké hustoty v případě magnetického udržení nebo krátkou dobu udržení a velmi vysoké hustoty plazmatu u udržení inerciálního. Zatím se nám však fungující fúzní zařízení na Zemi vytvořit nepodařilo. Dosažitelné efektivní výtokové rychlosti závisí na využití reakci, dosažených teplotách a konkrétní využití metody udržení plazmatu i konstrukce reaktoru a motoru. Fúze by však mohla zajistit efektivní výtokové rychlosti v řádu stovek i tisíců km/s.

K ještě vyšším výtokovým rychlostem by mohlo pomoci *využití antihmoty a anihilace*. Nejdříve by v malém objemu mohla přispět k vylepšení fúzních pohonů a zvýšení jejich dosažených teplot i výtokových rychlostí. V případě anihilačního pohonu by se pak výtokové rychlosti mohly blížit k rychlosti světla. O tom, jaká by mohla být reálná konkrétní konstrukce anihilačního pohonu však zatím představu nemáme a jejich konkrétní efektivní výtokové rychlosti jsou pouze spekulace. Připomeňme, že antiprotony (antinukleony obecně) anihilují s protony (nukleony) za vzniku mezonů. Ty nabitě se rozpadají na miony a neutrina a neutrální pak na dva fotony. Miony se rozpadají na elektrony, pozitrony a neutrina. Anihilace elektronu a pozitronu vede k produkci páru fotonů. Pokud jsou pracovní látkou fotony s rychlostí světla, dostaneme kosmickou loď, která se často označuje jako fotonová raketa. Ovšem reálný průběh anihilace a formování směru výletu pracovní látky je velkou otázkou a také extrémní technologickou výzvou. Fotony se dají produkovat i jiným způsobem, než je anihilace. Lze v principu využít i laser či fúzi, ale problémem u nich je malá účinnost konverze energie. Tedy, kromě toho, že fúzní zdroje nemáme a odpovídající lasery také ne.

Druhým typem pohonů jsou *iontové motory*, kde je výtoková rychlost dána uspořádaným pohybem iontů urychlených elektrostatickým, kombinací elektrického a magnetického pole nebo vysokofrekvenčním elek-

tromagnetickým polem. Existuje celá řada různých typů těchto pohonů. Zdroj energie je zde využíván pro produkci elektřiny a ta se následně využívá pro napájení urychlovacího systému iontového motoru. Je třeba zdůraznit, že v tomto případě je efektivita využití energie dána konverzí vzniklé tepelné energie na elektrickou. Připomeňme, že u štěpných jaderných reaktorů, a podobně tomu bude u těch fúzních, je účinnost konverze mezi 30 až 40 %. Další i řádové ztráty energie jsou spojeny s fungováním iontového motoru. Urychlovat elektrickým polem lze pouze nabité ionty, ty je pak třeba po urychlení neutralizovat. Jak proces urychlení, tak i neutralizace iontů a řada podpůrných systémů vede k energetickým ztrátám. Většinou pak s růstem dosahované kinetické energie urychlených iontů tyto ztráty rostou. V další diskuzi musíme mít existenci těchto ztrát energie stále na paměti, i když se nebudou explicitně zmiňovat. V současné době využívají vesmírné iontové motory pro dodávku elektřiny fotovoltaické panely. Jde o elektrostatické typy motorů, které mají nízké tahy, tedy s nízkými intenzitami svazku urychlených iontů. Pro případné lety na velké vzdálenosti budou pravděpodobně využity systémy s vysokými tahy, jako je například VASIMR.

Podívejme se na výtokové rychlosti iontových motorů. U těch současných se urychlují většinou ionty xenonu, ale využívá se i argon nebo jód. Je několik sond, které využily iontové motory. K planetce Psyche letí od 13. října 2023 stejnojmenná sonda, která využívá čtyři Hallovy iontové motory SPT-140. Ty mají výtokovou rychlost okolo 18 km/s a pomohou zrychlit její cestu k cíli i realizovat potřebné manévry a změny dráhy. U využívaných iontových motorů se výtokové rychlosti pohybují mezi hodnotami 10 a 80 km/s. Testovány, i s využitím vakuové komory, už byly i pokročilé systémy s výtokovými rychlostmi 210 km/s.

Předpokládá se, že by se dalo dosáhnout až hodnot v řádu 10 000 km/s. V takových případech je však kritické, pro jaké by to bylo tahy motorů a účinnosti konverze elektrické energie na kinetickou energii urychlených iontů. Jak blízko se lze v budoucnu k této hodnotě inženýrsky dostat u reálně fungujícího motoru, je otázka úplně otevřená. Je možné zmínit, že urychlovače iontů dokáží tyto urychlit na rychlosti i extrémně blízké rychlosti světla. Ovšem intenzity svazku jsou extrémně malé a stejně tak účinnosti konverze energie při urychlování.

Detailní populárnější rozbor jaderných zdrojů energie i s odkazy na literaturu je v cyklu článků v časopisu *Jaderná energie* [6]. Jsou zde popsány principy, historie i perspektivy radionuklidových zdrojů, štěpných jaderných reaktorů, fúzních zařízení i možnosti využití antihmoty.

Potřebná kinetická energie

Než se s využitím diskutovaných výtokových rychlostí podíváme na Ciolkovského rovnici, připomeňme si energetické potřeby mezihvězdných letů. Hmotnost je spojená s energií světoznámou Einsteinovou rovnicí $E = mc^2$, viz podrobně popis speciální teorie relativity [1]. Tzv. klidovou hmotnost m_0 objektu, kterou má v klidu v dané souřadné soustavě, tak můžeme spojit s klidovou energií E_0 :

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1)$$

Díky této rovnici můžeme vyjadřovat hmotnost v energetických jednotkách. V jaderných reakcích získáváme energii z přeměny mikroskopických objektů. Absolutně jde o velmi malé hodnoty energie, pro jejich vyjádření je vhodnou jednotkou elektronvolt (eV) a její násobky (keV, MeV či GeV). Elektronvolt je energie, kterou jako kinetickou získá částice s nábojem jednoho náboje elektronu při urychlení v potenciálovém rozdílu jednoho voltu. Vztah mezi elektronvoltem a jednotkou energie v SI (joulem): $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Podrobněji je definice elektronvoltu a jak vzniká její vztah k jednotce joule v [5].

U relativistických částic je kinetická energie srovnatelná s energií spojenou s klidovou hmotností objektu, a je tak vhodné pracovat s celkovou energií E částice. Ta je dána součtem její klidové energie E_0 a kinetické energie E_K :

$$E = E_0 + E_K. \quad (2)$$

Během exoergických¹⁾ jaderných reakcí se část klidové energie spojená s klidovou hmotností přemění na kinetickou energii. Při štěpení se uvolní zhruba 200 MeV energie a klidová energie uranu 235, který se štěpí, je zhruba 219 000 MeV. Na kinetickou energii se tak přemění zhruba 0,09 % klidové energie (stejný podíl hmotnosti). Hmotnost rozštěpeného uranu tak bude zhruba 1100krát větší, než je hmotnostní ekvivalent kinetické energie získané štěpením. Je třeba zdůraznit, že v každém štěpení vznikají různé produkty, takže se uvolněná energie při konkrétních štěpeních liší a je také rozdíl u různých štěpných jader. Zmíněných 200 MeV je tak přibližná hodnota.

U vesmírných fúzních pohonů se s největší pravděpodobností bude využívat reakce deuteria a helia 3, při které se uvolňuje 18,3 MeV energie.

¹⁾ U exoergických reakcí se energie uvolňuje a u endoergických je třeba energii dodat, aby mohly proběhnout. Samovolné rozpady jader jsou exoergickými reakcemi.

Součet klidových energií deuteria a helia 3 je 4 684 MeV. Na kinetickou energii se tak při této fúzní reakci přemění 0,39 % klidové energie (stejný podíl hmotnosti). V tomto případě tak musí být celková hmotnost deuteronu a helia 3 jen 256krát větší, než je hmotnostní ekvivalent získané kinetické energie.

V případě anihilace proběhne v konečném důsledku přeměna veškeré zúčastněné hmoty a antihmoty na fotony a neutrina, tedy klidová energie se úplně přemění na kinetickou.

Nyní se podívejme, jaké jsou potřeby kinetické energie v našem případě urychlení kosmické lodi o hmotnosti 100 tun na rychlosti 0,2c a 0,02c. Jak bylo ukázáno, s přesností lepší, než jsou nízké jednotky procent, můžeme využít klasický vztah mezi kinetickou energií E_k a rychlostí v . U něj kinetická energie roste s kvadrátem rychlosti. Pokud vyjádříme rychlost v jednotkách rychlosti světla, můžeme vyjádřit kinetickou energii jako polovinu klidové energie lodi vynásobené kvadrátem její rychlosti v jednotkách rychlosti světla:

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2} = \frac{E_0 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2}. \quad (3)$$

Klidová energie, která se tak musí přeměnit pro získání této kinetické energie, odpovídá v případě rychlosti 0,2c hmotnosti 2 tuny a v případě 0,02c je to hmotnost 0,02 tuny, což je 20 kg. Je však třeba připomenout, že se kinetická energie předává i pracovní látce zajišťující urychlení lodě. Reálně je tak potřeba energie vyšší, než je konečná kinetická energie lodi.

Podívejme se na to, jaké různé možnosti uvolňování energie můžeme využít. V případě využití pohonu na bázi antihmoty by stačilo anihilovat v případě rychlosti 0,2c celkově dvě tuny hmoty a antihmoty, pro případ rychlosti 0,02c jen 20 kg. V tomto případě je hmotnost paliva pro dodávku energie menší, a v případě menší rychlosti dokonce významně menší, než je hmotnost urychleného vesmírného plavidla. Připomínám, že zde absolutně neřešíme extrémní problémy s uchováváním antihmoty a konstrukcí motoru na antihmotu. Řešení toho je v nedohlednu. Neřešíme také, že část energie uniká ve formě neutrín a existuje celá řada dalších ztrát.

U fúzního pohonu už je pro rychlost 0,02c potřeba 5,12 tuny sumární hmotnosti deuteria a helia 3, pro rychlost 0,2c pak hmotnost 512 tun. V druhém případě je hmotnost tohoto paliva násobkem hmotnosti kosmické lodi. Výhodou zde je, že produkty fúze můžou tvořit pracovní

látku vytékající tryskou. Je třeba počítat s tím, že ne u všeho deuteria a hélia 3 dojde k fúzní reakci.

Ještě horší je situace v případě štěpného reaktoru. Zde je potřeba u rychlosti $0,02c$ rozštěpit 22 tun čistého štěpného materiálu a pro rychlost $0,2c$ pak až 2 200 tun štěpného materiálu. Zdůrazněme, že žádný známý typ reaktoru neumožňuje rozštěpit všechna jádra paliva. V každém zůstává i značné množství uranu i transuranů vznikajících zachytem neutronu, který nezpůsobí štěpení.

Pokud bychom chtěli dosáhnout dokonce rychlosti $0,8c$, musíme kinetickou energii E_{kin} určit pomocí relativistické rovnice. Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a rychlostí v je, podrobněji viz [1,5]:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (4)$$

Dostaneme tak:

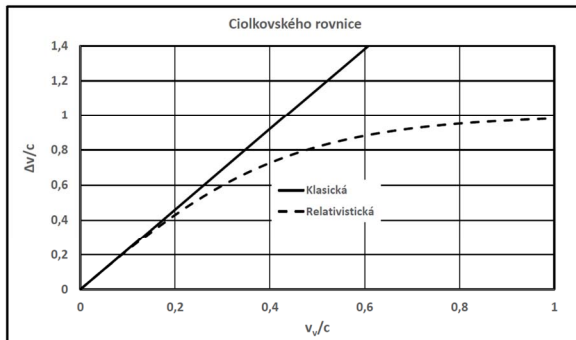
$$E = E_0 + E_{\text{kin}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow E_{\text{kin}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - E_0. \quad (5)$$

V tomto případě by šlo o kinetickou energii stotunové lodi, která je stejná jako klidová energie odpovídající necelým 67 tunám hmoty. Kromě pohonu na antihmotu se tak dostáváme na hmotnosti paliva o několik řádů větší, než je hmotnost lodi.

Na závěr si ještě připomeňme, že v případě popsaného letu, kdy zrychlení probíhá první polovinu letu a pak bude loď symetricky brzdit, potřebujeme dvojnásobek energie a pro rychlost $0,2c$ výkony nejméně v řádu stovek GW.

Ciolkovského rovnice

Nyní se dostáváme k Ciolkovského rovnici, která popisuje let rakety. Při urychlování totiž potřebujeme odpovídajícím způsobem měnit hybnost kosmické lodi. To se děje pomocí využití zákona akce a reakce a vytékání proudu pracovní látky tryskou. Popis děje získáme ze zákona zachování hybnosti. Velikost změny hybnosti lodi o hmotnosti m je stejná jako velikost hybnosti materiálu vyvrženého raketovým motorem. Předpokládejme limitně malé změny hybností. Hmotnost vyvrženého materiálu dm je zanedbatelně malá oproti celkové hmotnosti lodi, stejně tak



Graf 3: Závislost změny rychlosti na efektivní výtokové rychlosti pro poměr mezi počáteční a konečnou hmotností $m_I/m_F = 10$. Plnou čarou je klasický nerelativistický vztah a přerušovanou relativistický vztah.

jsou zanedbatelně malé změny hybnosti dp a rychlosti dv :

$$dp_L = d(m \cdot v) = u \cdot dm = dp_v, \quad (6)$$

kde p_L a p_v jsou hybnosti lodi a vyvrženého materiálu, u je rychlost vyvrženého materiálu v laboratorní soustavě (v té fyzikální děj pozorujeme). Jestliže je výtoková rychlost materiálu v_v , pak platí:

$$u = v - v_v, \quad (7)$$

a tedy

$$m \cdot d(v) + v \cdot d(m) = (v - v_v) \cdot dm. \quad (8)$$

Po úpravě:

$$m \cdot d(v) = -v_v \cdot dm. \quad (9)$$

V nerelativistickém případě, kdy platí Galileiho transformace pro sčítání rychlostí (7) a hybností a platí zákon zachování hmotnosti jsme mohli ke vztahu (9) dospět přímo. V případě řešení relativistické Ciolkovského rovnice²⁾ je výhodné pracovat s rychlostmi vyjádřenými v jednotkách rychlosti světla, takže naši nerelativistickou diferenciální rovnici, kterou jsme získali, přepíšeme do následujícího tvaru:

$$m \cdot d\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{v_v}{c} \cdot dm. \quad (10)$$

²⁾ Konstantin Eduardovič Ciolkovskij se rychlostmi, při kterých je potřeba speciální teorie relativity, nezabýval. Proto se obvykle mluví o relativistické raketové rovnici a s jeho jménem se tato rovnice nespojuje.

Jde o typ diferenciální rovnice, který se vyskytuje při řešení fyzikálních problémů často, například při řešení zákona radioaktivního rozpadu (viz [5,7]), a vede k exponenciální (logaritmické) funkci. Diferenciální rovnici řešíme metodou separace proměnných, využijeme znalosti z [2–4]:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \int_{m_I}^{m_F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{\frac{v_v}{c}} \cdot \int_0^{\frac{\Delta v}{c}} d\left(\frac{v}{c}\right). \quad (11)$$

Zde jsme označili jako m_I počáteční hmotnost rakety a m_F její koncovou hmotnost po spotřebování paliva, tedy v našem případě sledovaných 100 tun. Jako v_v je označena efektivní výtoková rychlost pracovní látky a Δv pak celková změna rychlosti, kterou raketa realizovala. Provedeme integraci:

$$\ln m_F - \ln m_I = -\frac{\frac{\Delta v}{c}}{\frac{v_v}{c}} \Rightarrow \frac{\Delta v}{c} = \frac{v_v}{c} \cdot \ln \frac{m_I}{m_F}, \quad (12)$$

což je známá Ciolkovského raketová rovnice. Poměr změny rychlosti a efektivní výtokové rychlosti je roven přirozenému logaritmu poměru počáteční a konečné hmotnosti rakety:

$$\frac{\Delta v}{v_v} = \ln \frac{m_I}{m_F}. \quad (13)$$

Pro konstantní poměr počáteční a koncové hmotnosti lodě je v nerelativistickém případě závislost změny rychlosti lodě na efektivní výtokové rychlosti lineární. V grafu 3 je zobrazen příklad závislosti změny rychlosti lodě na efektivní výtokové rychlosti pro poměr počáteční a konečné hmotnosti rakety 10, tedy pro hmotnost paliva, které je devítinásobek konečné hmotnosti kosmické lodi. V našem případě hmotnosti kosmické lodi 100 tun by hmotnost paliva byla 900 tun. To je pořád rozumná hodnota.

Pro závislost hmotností z rovnice (13) plyne

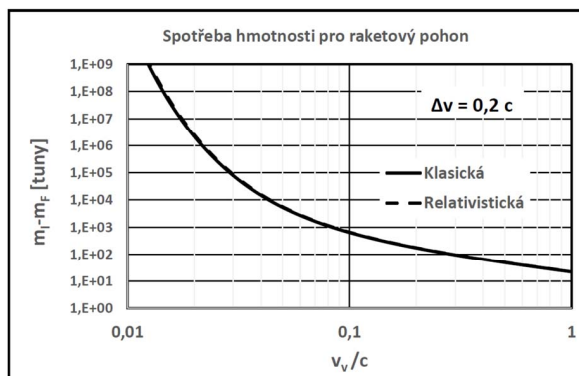
$$m_I = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}}. \quad (14)$$

Hmotnost vyvrženého materiálu získáme dosazením za m_I ze vztahu (14):

$$m_I - m_F = m_F \cdot e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - m_F = m_F \cdot \left(e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1\right) \quad (15)$$

Je vidět, že hmotnost paliva roste exponenciálně s konečnou dosaženou změnou rychlosti. Pokud je požadovaná změna rychlosti menší nebo srovnatelná s efektivní výtokovou rychlostí, je potřebná hmotnost pracovní látky malá nebo srovnatelná s konečnou hmotností lodi. Pokud je však požadovaná změna rychlosti větší než efektivní výtoková rychlost, tak hmotnost pracovní látky velmi rychle exponenciálně roste.

Na grafu 4 je závislost potřebné hmotnosti pracovní látky na výtokové rychlosti, pokud chceme dosáhnout změny rychlosti vesmírné lodi $0,2c$. Je vidět, že teprve pro hodnoty výtokové rychlosti srovnatelné s požadovanou rychlostí lodi a vyšší dostáváme hmotnost pracovní látky, která není o mnoho řádů vyšší, než je konečná hmotnost lodi.



Graf 4: Závislost hmotnosti pracovní látky na výtokové rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a rychlost $0,2c$. Klasická nerelativistická (plná čára) a relativistická (přerušovaná) se v tomto případě překrývají.

V části o potřebné kinetické energii bylo zmíněno, že se kinetická energie předává nejen urychlované lodi, ale také vyvrhované pracovní látce. Ciolkovského rovnice nám umožňuje určit závislost účinnosti využití energie na poměru dosažené změny rychlosti a efektivní výtokové rychlostí. Získáme je porovnáním toho, jaká část z celkově uvolněné energie se předá lodi:

$$E_{k\Delta v} = \frac{m_F(\Delta v)^2}{2}. \quad (16)$$

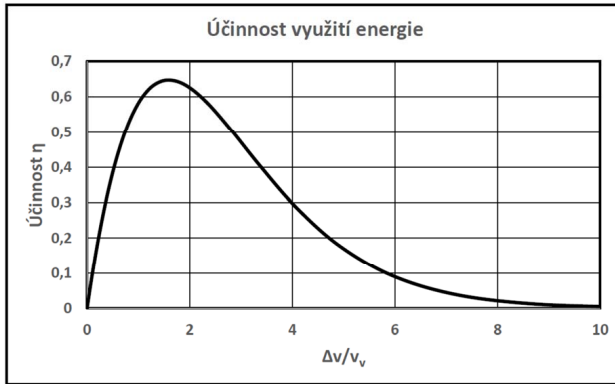
Celková uvolněná energie, která se předala vyvrhovanému materiálu:

$$E_{kT} = \frac{(m_I - m_F)v_v^2}{2}. \quad (17)$$

Účinnost je tak poměr mezi kinetickou energií lodi $E_{k\Delta v}$ a celkovou uvolněnou energií E_{kT} (dosadíme ze vztahu (15) za $m_I - m_F$):

$$\eta = \frac{E_{k\Delta v}}{E_{kT}} = \frac{\frac{m_F(\Delta v)^2}{2}}{\frac{(m_I - m_F)v_v^2}{2}} = \frac{m_F(\Delta v)^2}{(m_I - m_F)v_v^2} = \frac{\left(\frac{\Delta v}{v_v}\right)^2}{e^{\frac{\Delta v}{v_v}} - 1}. \quad (18)$$

V grafu 5 je vidět, že v optimálním případě, který je pro poměr změny rychlosti a výtokové rychlosti 1,59, je hodnota účinnosti 64,8 %. Potřebné energie, které jsme určovali v předchozí části stačí v ideálním případě jen o něco méně než zdvojnásobit. Ovšem, pokud nebudeme v optimu, musíme mít energii mnohonásobně i řádově větší. Ještě zmiňme, že poměr mezi počáteční a konečnou hmotností rakety je ve zmíněném optimálním případě 4,92.



Graf 5: Závislost účinnosti využití energie na poměru dosažené změny rychlosti a efektivní výtokové rychlosti.

V případě potřeby dosažení relativistických rychlostí je nutné pracovat se speciální teorií relativity. Využijme znalosti z [1] a opět zákon zachování hybnosti. Relativistická Lorentzova transformace hybnosti je (označíme $m_0 = m$):

$$p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (19)$$

$$dp_L = d\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = u \cdot \frac{dm}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = dp_v, \quad (20)$$

kde dp_L je změna hybnosti lodi a dp_v je hybnost spojená s vyvrženým materiálem. Musí platit zákon zachování energie. Součet změny celkové energie lodi dE_L v laboratorní soustavě a energie vyvrženého materiálu dE_v musí být nula. Celková energie se nemění, zachovává se:

$$dE_L = d\left(\frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = -\frac{dm \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -dE_v. \quad (21)$$

Pro transformaci (sčítání) rychlostí platí místo nerelativistického vztahu (7) relativistický:

$$u = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}. \quad (22)$$

Do vztahu (20) dosadíme na pravé straně z rovnice (22) pro rychlost a z (21) za element hmotnosti vyvrženého materiálu:

$$d\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot d\left(\frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right). \quad (23)$$

Využijeme pravidla pro derivování [2–4]:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{\frac{v \cdot dv}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (24)$$

Můžeme tak provést derivace ve vztahu (23), využijeme zase naše znalosti o derivování součinu a podílu funkcí [2–4]:

$$\begin{aligned} \frac{dm \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{m \cdot dv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{\frac{m \cdot v^2 \cdot dv}{c^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot \left(\frac{dm}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{m \cdot \frac{v}{c^2} \cdot dv}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Vynásobíme rovnici stejným výrazem $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$, který máme ve jmenovateli u všech členů, a provedeme další úpravy:

$$dm \cdot v + m \cdot dv + \frac{\frac{m \cdot v^2 \cdot dv}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}} \cdot \left(dm + \frac{m \cdot \frac{v}{c^2} \cdot dv}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right), \quad (26)$$

$$\left(v - \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dm = -m \cdot \left[1 + \frac{\frac{v}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left(v - \frac{v - v_v}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right)\right] dv. \quad (27)$$

Upravíme, rovnice se dramaticky zjednoduší:

$$\left(\frac{v_v - \frac{v^2 \cdot v_v}{c^2}}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dm = -m \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v \cdot v_v}{c^2}}\right) dv. \quad (28)$$

Ještě dále upravíme a vyjádříme rychlosti v rychlostech světla:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{\frac{v_v}{c} \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}. \quad (29)$$

Dostáváme diferenciální rovnici velice podobnou nerelativistické a můžeme ji opět řešit pomocí separace proměnných.

$$\int_{m_I}^{m_F} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{\frac{v_v}{c}} \int_0^{\frac{\Delta v}{c}} \frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (30)$$

Příslušný integrál komplikovanější funkce můžeme zjistit na internetu třeba pomocí Numberempire.com:

$$\ln m_F - \ln m_I = -\frac{1}{2 \cdot \frac{v_v}{c}} \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) - \ln \left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) \right] \quad (31)$$

$$\ln \frac{m_I}{m_F} = \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right)^{\frac{c}{2v_v}}}{\left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right)^{\frac{c}{2v_v}}} \right] \quad (32)$$

Dostáváme tak relativistickou Ciolkovského rovnici, kterou můžeme ještě upravit:

$$\frac{m_I}{m_F} = \left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \quad (33)$$

$$m_I - m_F = m_F \cdot \left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} - m_F = m_F \cdot \left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} - 1 \right] \quad (34)$$

Pomocí úpravy vztahu (33) můžeme určit změnu rychlosti v závislosti na poměru hmotností a výtokové rychlosti:

$$\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} = \frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \quad (35)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right) \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} = 1 + \frac{\Delta v}{c} \quad (36)$$

$$\left(\frac{\Delta v}{c}\right) \left[1 + \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}}\right] = \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}} - 1 \quad (37)$$

Na obou stranách vytkneme výraz $\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{2v_v}{c}}$ a exponenciální funkce převedeme na přirozený základ e:

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{v_v}{c}} - \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{-\frac{v_v}{c}}}{\left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{\frac{v_v}{c}} + \left(\frac{m_I}{m_F}\right)^{-\frac{v_v}{c}}} = \frac{e^{\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)} - e^{-\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)}}{e^{\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)} + e^{-\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)}} \quad (38)$$

Protože existuje funkce tangens hyperbolický, definovaná takto:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad (39)$$

můžeme relativistickou Ciolkovského rovnici zapsat způsobem, se kterým se setkáte v literatuře:

$$\frac{\Delta v}{c} = \tanh\left(\frac{v_v}{c} \ln\left(\frac{m_I}{m_F}\right)\right) \quad (40)$$

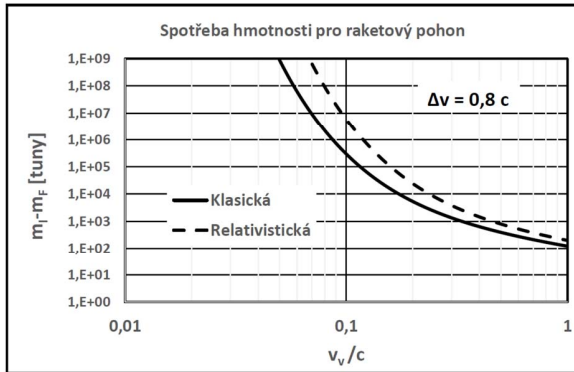
Tangenta hyperbolická se v této rovnici vyskytuje kvůli Lorentzově transformaci. Pro znalější připomeňme, že v relativistickém případě se daleko lépe než s rychlostmi, pracuje s rapiditami. Stejně, jako se v případě použití logaritmu převádí násobení na sčítání, převádí se pomocí rapidity Lorentzova transformace na sčítání. V grafu 3 je vidět, že rozdíl mezi ne-relativistickou a relativistickou rovnicí se začne významněji projevovat pro rychlosti větší než 20 % rychlosti světla.

I pro účinnost využití energie lze pomocí relativistického vztahu pro kinetickou energii (5) odvodit potřebné relativistické vztahy:

$$\begin{aligned}
 \eta = \frac{E_{k\Delta v}}{E_{kT}} &= \frac{m_F \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2}} - 1 \right)}{(m_I - m_F) \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2}} - 1 \right)} = \\
 &= \frac{m_F \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{(m_I - m_F) \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Dosadíme za $m_I - m_F$ ze vztahu (34):

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{m_F \cdot c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{m_F \cdot c^2 \left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)} = \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \right)}{\left[\left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^{\frac{c}{2v_v}} \right] \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_v}{c}\right)^2} \right)} \quad (42)
 \end{aligned}$$



Graf 6: Závislost hmotnosti pracovní látky na efektivní výtokové rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a dosažené změny rychlosti 0,8c. Klasická nerelativistická funkce (plná čára) a relativistická (přerušovaná) se v tomto případě už liší.

Podívejme se, kolik budeme potřebovat v našich případech s lodí o hmotnosti 100 tun pracovní látky. Její závislost na výtokové rychlosti pro námi požadované dosažení rychlosti $0,2c$ je v grafu 4. Při této požadované rychlosti se výsledky relativistického a nerelativistického výpočtu blíží. V logaritmickém měřítku není vidět, že u relativistické funkce je hmotnost potřebné pracovní látky o jednotky až desítky procent vyšší, zvyšuje se s poklesem výtokové rychlosti. Rozdíl viditelný i v logaritmické měřítku se objevuje až v případě, kdy potřebujeme dosáhnout opravdu relativistických rychlostí, například $0,8c$, jak je vidět v grafu 6.

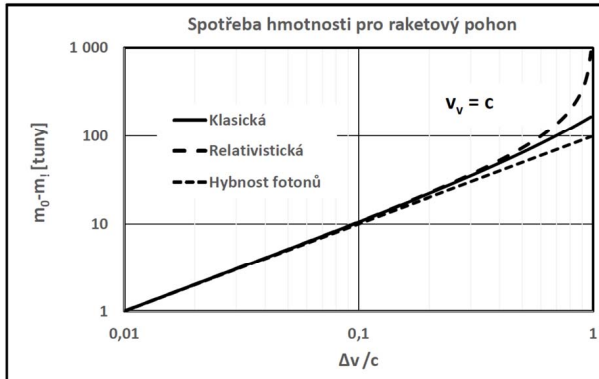
Připomeňme, že štěpné reaktory by mohly realizovat výtokové rychlosti maximálně okolo 40 km/s. V tomto případě by dosažení rychlosti $0,2c$ potřebovalo zhruba řádově nepředstavitelných 10^{660} tun. V případě rychlosti $0,02c$ je to 10^{65} tun a i pro $0,002c$, což je 600 km/s, to je pořád 327 milionů tun.

Pokud bychom využili iontový motor se špičkovou hodnotou výtokové rychlosti 10 000 km/s, jsou odpovídající hodnoty pro $0,2c$ celkově 43 700 tun, pro $0,02c$ je 82 tun a pro $0,002c$ je to už jen něco více než 6 tun. Výtokové rychlosti v řádu tisíců km/s by mohly být dostupné i v případě fúze. Anihilační pohon by mohl přiblížit výtokové rychlosti k rychlosti světla.

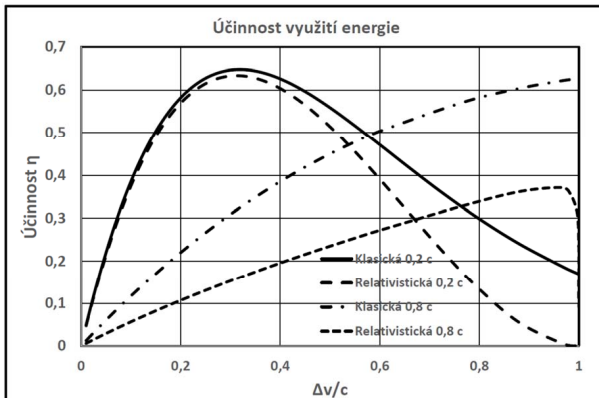
Pokud se hmota přemění na fotony, jedná se o ultrarelativistické částice, u kterých je lineární závislost mezi hybností a energií. Celková energie, která je celá jen kinetická, vzniklých fotonů je dána klidovou energií anihilované hmoty a antihmoty, tedy součinem klidové hmotnosti a kvadrátem rychlosti světla. Celková hybnost fotonů, předpokládáme-li jejich proud v jednom směru, je součinem klidové hmotnosti původní hmoty a antihmoty a rychlosti světla. V ideálním případě je zároveň blízká hybnosti, kterou má loď po zrychlení, a potřebná celková hmotnost anihilované hmoty a antihmoty je jen o něco vyšší než hmotnost vesmírné lodi vynásobená podílem dosažené rychlosti a rychlosti světla. K této hodnotě potřebné hmotnosti pracovní látky se blížíme při přiblížení rychlosti pracovní látky k rychlosti světla. Platí to pro nerelativistické přiblížení. Pro změnu rychlosti blížící se rychlosti světla je potřebná hmotnost větší a větší. Podrobněji to ukazuje graf 7.

Podívejme se na relativistický výpočet účinnosti využití energie. V grafu 8 je vidět, že pro výtokovou rychlost $0,2c$ se relativistická funkce velmi dobře shoduje s nerelativistickou pro změnu rychlosti rakety nepřesahující $0,2c$. Po jejím překročení se obě křivky začínají rozcházet. Maximum je i u relativistického vztahu přes 60 % a nachází se v oblasti poměru

změny rychlosti lodi a výtokové rychlosti okolo 1,5. Pro výtokové rychlosti, které jsou silně relativistické, se už relativistická funkce od klasické liší i dramaticky. V grafu 8 je ukázána situace pro výtokovou rychlost $0,8c$.



Graf 7: Závislost hmotnosti pracovní látky na požadované změně rychlosti pro hmotnost vesmírné lodi 100 tun a výtokové rychlosti c (fotony). Je zobrazena klasická nerelativistická (plná čára) a relativistická funkce (přerušovaná čára). Ty se začínají významněji lišit okolo požadované změny rychlosti $0,2c$ a vyšší.



Graf 8: Účinnosti využití energie v závislosti na dosažené změně rychlosti po urychlení v klasickém i relativistickém výpočtu. Pro výtokovou rychlost $0,2c$ se relativistická funkce začne od klasické významně lišit pro dosažené rychlosti větší než $0,2c$. Pro výtokovou rychlost $0,8c$ je rozdíl v celém rozsahu.

Jak je vidět, pro realizaci možnosti mezihvězdných letů je klíčové dosažení dostatečně velké výtokové rychlosti. Ideální je, pokud je srovnatelná s rychlostí, kterou chceme dosáhnout. V tomto případě je vysoké využití energie dosahující hodnot i přes 60 % a i hmotnost pracovní látky je srovnatelná s hmotností kosmické lodi. Pro dosažení rychlosti kosmického plavidla v řádu procent rychlosti světla to znamená, že je potřeba se dostat k hodnotám 1 000 km/s až 10 000 km/s. Kromě anihilačního motoru by to mohl umožnit i ten fúzní. Ovšem ani ten zatím nemáme a není jasná ani cesta, jak k němu dospět.

Lze sice spojit štěpný reaktor s iontovým motorem, který může mít v principu výtokové rychlosti v řádu 1 000 km/s. Ty však také zatím nemáme ani ve výhledu. Zde je navíc velký problém v nízké účinnosti konverze energie a dosažení odpovídajícího tahu.

Štěpné reaktory sice mezihvězdný let neumožní, mohou však přispět k realizaci podrobného studia vnějších oblastí Sluneční soustavy. Znalosti podmínek vně heliosféry, odkud máme zatím informace pouze ze sond Voyager 1 a 2, jsou klíčové pro reálnou přípravu mezihvězdného letu. Mezihvězdná loď se v mezihvězdném prostoru bude pohybovat řadu desetiletí nebo dokonce staletí. Je třeba vědět, jak chránit elektroniku a zajistit přežití aparátů.

Závěr

Jak je vidět z předchozího rozboru, nejsou mezihvězdné lety s využitím raketového motoru realizovatelné bez osvojení využití termojaderné fúze. Kdy se to podaří, nelze odhadnout. Ještě větší výzvou je případné využití antihmoty, zde je úroveň inženýrských překážek ještě o mnoho řádů výše. V předchozím textu jsme se věnovali pouze energetickým nárokům a požadavkům na hybnost. Doufáme, že to i tak čtenáři přiblížilo extrémní náročnost úkolu.

V tomto článku se vůbec neposuzovaly extrémní technologické nároky, které jsou s vesmírnými štěpnými, fúzními i anihilačními technologiemi spojeny. Společně jsou extrémní nároky na materiály. Zásadní je pokrok v oblasti supravodivých magnetů, laserů i metod urychlování částic. Dalším zásadním problémem je radiační odolnost a ochrana před galaktickým kosmickým zářením. Některé oblasti se rozebírají v přednáškách vystavených na internetu [7–10].

Literatura

- [1] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [2] Jírů, J.: *Diferenciální počet ve fyzice*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [3] Jarešová, M., Volf, I.: *Diferenciální počet ve fyzice*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [4] Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice*. Knihovnička FO č. 73, MAFY, Hradec Králové, 2006.
- [5] Wagner, V., Vícha, V., Janout, Z.: *Hranice Mendělejevovy tabulky aneb jak produkovat stále těžší prvky*. (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku).
- [6] Wagner, V.: Cyklus článků o jaderných zdrojích pro vesmír. *Jaderná energie*, ročník 2022 a 2023, <https://jadernaenergie.online/>.
- [7] Wagner, V.: *Matematika pro jadernou fyziku*. Přednáška pro středoškolské pedagogy v rámci akce Matematika pro život, FJFI ČVUT, Praha, 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=N241fq1JPe8>.
- [8] Wagner, V.: *Jaderné technologie a jejich aplikace ve vesmíru či při kolonizaci Marsu*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2023, https://www.youtube.com/watch?v=rV_lWRoNODI.
- [9] Wagner, V.: *Kosmické záření a ochrana před ním*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2024, <https://www.youtube.com/watch?v=ohLfzpaFLM>.
- [10] Wagner, V.: *Jak se bude cestovat ke hvězdám*. Přednáška pro Czech Mars Society, Opava, 2025, <https://www.youtube.com/watch?v=s0rZPjdm02k>.