

Rozhledy matematicko-fyzikální

Mikuláš Kučera

Eulerova–Mascheroniho konstanta a zaokrouhlování převrácených hodnot

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 3, 1–12

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153094>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Eulerova–Mascheroniho konstanta a zaokrouhlování převrácených hodnot

Mikuláš Kučera, FJFI ČVUT, Praha

Abstrakt. V tomto článku se čtenář dozví hned několik zajímavých věcí. Jako první se seznámí s korektním zavedením Eulerova čísla jakožto limity jisté posloupnosti. Poté ukážeme vztah přirozeného logaritmu a částečných součtů harmonické řady, které jsou propojeny jistou „magickou“ matematickou konstantou, jež se objevuje ve spoustě jiných problémů. Následně tuto znalost využijeme k sečení harmonické řady se střídavými znaménky. To nám nakonec, možná trochu překvapivě, umožní vyřešit problém z oblasti teorie pravděpodobnosti týkající se převrácených hodnot čísel.

Motivační úloha

Zvolme náhodně číslo x z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že dolní celá část čísla $1/x$, tj. $\lfloor 1/x \rfloor$, je liché číslo?

Na tomto místě je třeba vyjasnit, co se myslí náhodnou volbou čísla x z intervalu $(0, 1)$. Tím myslíme volbu při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti. Pro náš příklad jej postačí definovat tak, že pravděpodobnost, že x vybereme z daného intervalu I je přímo úměrná délce tohoto intervalu (nezávisle na tom, jde-li o otevřený, uzavřený nebo polouzavřený interval). Navíc, protože délka celého intervalu $(0, 1)$ je rovna 1 a pravděpodobnost výběru čísla z $(0, 1)$ je také 1, musí být pravděpodobnost výběru $x \in I$ přímo rovna jeho délce, tj. pro $0 < a < b \leq 1$:

$$P(x \in (a, b)) = P(x \in \langle a, b \rangle) = P(x \in (a, b]) = P(x \in [a, b)) = b - a$$

a obdobně, je-li $a = 0$ (pak musí být interval zleva otevřený).

Nabádáme čtenáře, aby si rozmyslel, že takováto definice odpovídá intuici za náhodným výběrem čísla z omezeného intervalu, a aby se nad úlohou před přečtením následujícího odstavce zamyslel a zkusil dospět co nejblíže k řešení.

Nyní se pokusíme úlohu vyřešit. Uvědomíme si, že pro libovolné přirozené číslo n platí: $\lfloor 1/x \rfloor = n$ právě tehdy, když vybereme $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$.

To znamená, že pravděpodobnost, že $\lfloor 1/x \rfloor$ bude liché, je rovna

$$\begin{aligned} P(\lfloor 1/x \rfloor \text{ liché}) &= P(\lfloor 1/x \rfloor = 1) + P(\lfloor 1/x \rfloor = 3) + P(\lfloor 1/x \rfloor = 5) + \dots \\ &= P\left(x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) + P\left(x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Musíme tedy sečíst nekonečně mnoho zlomků se střídavým znaménkem. Jak ukážeme v průběhu tohoto příspěvku, přesný součet lze nalézt. Jistě očekáváme, že bude nezáporný a nanejvýš roven 1, neboť jsme výraz sestrojili jako vyjádření jisté pravděpodobnosti. Nejprve ale neznalého čtenáře seznámíme se základními pojmy, které budeme potřebovat. Pokročilejší čtenář může následující sekci přeskočit.

Limita posloupnosti a číselná řada

Definice 1. *Reálná číselná posloupnost* je funkce z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost a značíme $a_n = a(n)$ a nazýváme jej *n -tým členem posloupnosti a* , kterou pak značíme $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ či pouze $a = (a_n)$. Tato se nazývá

- (i) *rostoucí*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} \geq a_n$,
- (ii) *klesající*, pokud pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} \leq a_n$,
- (iii) *monotónní*, pokud je rostoucí nebo klesající,
- (iv) *omezená*, pokud existuje $M > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| < M$.

Jinak řečeno, posloupnost je omezená, pokud všechny její členy leží v intervalu $(-M, M)$ pro nějaké kladné M .

Nyní definujeme pojem limity posloupnosti. Čtenáře, kterému by snad nebyla po chuti definice pomocí kvantifikátorů, odkazujeme na odstavec za definicí, který ji vysvětluje slovně.

Definice 2. Nechť c je reálné číslo. Řekneme, že posloupnost (a_n) má *limitu c* , značenou $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) (a_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)).$$

Posloupnost, která má reálnou limitu, nazýváme *konvergentní*. V opačném případě je posloupnost *divergentní*. Posloupnost (a_n) má limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, pokud

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > M, \text{ resp. } a_n < -M).$$

Posloupnost s limitou $+\infty$ nebo $-\infty$ nazýváme *podstatně divergentní*.

Řečeno slovy je c limitou posloupnosti (a_n) , pokud do libovolně malého okolí bodu c patří všechny členy posloupnosti a_n až na konečně mnoho výjimek (pro dané $\varepsilon > 0$ z definice to je nanejvýš n_0 členů $a_1, \dots, a_{n_0}$). Limita posloupnosti je $+\infty$, resp. $-\infty$, pokud pro libovolně velkou konstantu M jsou všechny členy posloupnosti až na konečně mnoho výjimek větší než M , resp. menší než $-M$. Je zřejmé, že podstatně divergentní posloupnost není omezená.

Dále dokážeme, že posloupnost, která je omezená a monotónní, je už nutně i konvergentní. K tomu budeme potřebovat ještě dva pojmy, které jsou ukotveny axiomy množiny reálných čísel.

Definice 3. Nechť A je neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. *Supremum* množiny A je číslo $\sup A \in \mathbb{R}$ splňující

- (i) $(\forall x \in A)(x \leq \sup A)$,
- (ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > \sup A - \varepsilon)$.

Je-li A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, pak *infimum* množiny A je číslo $\inf A \in \mathbb{R}$ splňující

- (i) $(\forall x \in A)(x \geq \inf A)$,
- (ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x < \inf A + \varepsilon)$.

Supremum je dle prvního bodu definice horní závora množiny A , dle druhého je však nejmenší horní závora. Kdykoliv ho totiž zmenšíme o libovolně malé ε , najdeme $x \in A$, které už je větší, tedy $\sup A - \varepsilon$ už horní závora není. Obdobně je infimum největší dolní závora A .

Axiom úplnosti reálných čísel říká, že každá neprázdná shora omezená množina má supremum. Zvídavý čtenář si může rozmyslet, že aplikací tohoto axiomu na množinu s opačnými znaménky zjistíme, že i každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.

Poznámka. Pro shora neomezenou množinu A klademe $\sup A = +\infty$, pro zdola neomezenou $\inf A = -\infty$. Pro prázdnou množinu $A = \emptyset$ pak $\sup A = -\infty$ a $\inf A = +\infty$.

Tvrzení 4. *Omezená a monotónní posloupnost je konvergentní.*

Důkaz. Uvažme posloupnost (a_n) , která je omezená, tj. všechny členy leží v $(-M, M)$ pro nějaké $M > 0$, a předpokládejme, že je rostoucí. Označme $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ množinu všech jejích členů. Protože M je zřejmě horní závora A , je A omezená shora, takže $\sup A \in \mathbb{R}$. Vezměme nyní libovolně malé okolí $(\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon)$ bodu $\sup A$. Z prvního a druhého bodu definice suprema existuje $a_{n_0} \in A$ takové, že $a_{n_0} \in (\sup A - \varepsilon, \sup A)$. Protože (a_n) je rostoucí a $\sup A$ je horní závora A , je pro libovolné $n > n_0$:

$$\sup A \geq a_n \geq a_{n_0} > \sup A - \varepsilon,$$

tedy $a_n \in (\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon)$. Tím je dokázáno, že $\sup A$ je limita posloupnosti (a_n) .

Je-li posloupnost naopak klesající, důkaz provedeme zcela analogicky, pouze zaměníme supremum za infimum. $\square$

Definice 5. *Reálná číselná řada* je dvojice $((a_n), (s_n))$, značená jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde (a_n) je posloupnost a (s_n) je *posloupnost částečných součtů* této řady definovaná jako

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, resp. (podstatně) divergentní, pokud (s_n) je konvergentní, resp. (podstatně) divergentní. Je-li (s_n) konvergentní či podstatně divergentní, značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a tuto limitu nazýváme součtem řady.

Příklad. Číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se nazývá *harmonická řada*. Posloupnost jejích částečných součtů budeme značit (H_n) . Dále uvidíme, že se jedná o příklad podstatně divergentní řady se součtem $+\infty$.

Příklad. Číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

se nazývá *harmonická řada se střídavými znaménky*. Z rovnice (1) vidíme, že její součet je řešením naší motivační úlohy. K nalezení tohoto součtu však prvně musíme udělat menší úkrok stranou – podrobněji se podíváme na slavné Eulerovo číslo e a ukážeme si, jak ho vlastně matematikové definují.

O Eulerově čísle

Připomeňme, že je-li posloupnost reálných čísel monotónní a omezená, potom je konvergentní, tj. má konečnou limitu (viz tvrzení 4). V důkazu jsme navíc viděli, že limitou pak je supremum, respektive infimum oboru hodnot dané rostoucí, respektive klesající posloupností. V příští kapitole použijeme tuto postačující podmínku konvergence na posloupnost částečných součtů harmonické řady, od které odečteme přirozený logaritmus.

Nejprve si však připravíme lemmata týkající se Eulerova čísla e a jistých posloupností, jejichž je limitou. Velice užitečným nástrojem bude následující jednoduchá nerovnost.

Věta 6. *Pro libovolné $x \in \langle -1, +\infty \rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ platí Bernoulliho nerovnost:*

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (2)$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí na n . Pro $n=1$ máme rovnost $1+x=1+x$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ potom

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

V první nerovnosti jsme využili indukční předpoklad a fakt, že $1+x \geq 0$. Ve druhé nerovnosti jsme pak zanedbali nezáporný člen nx^2 . $\square$

Nyní vyslovíme dvě lemmata týkající se posloupností, pomocí kterých se typicky zavádí Eulerovo číslo. [1]

Lemma 7. *Posloupnost $f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Vydělením čísla $(1 + \frac{1}{n})^n$ a $1 + \frac{1}{n+1}$ předchozí nerovnost ekvivalentně přepíšeme jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} &\leq \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \iff \frac{n+1}{n+2} \leq \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)^n \iff \\ &\iff 1 - \frac{1}{n+2} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Protože $1/(n+1)^2 \leq 1$, platí dle Bernoulliho nerovnosti (2):

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2},$$

kde jsme volili $x = -1/(n+1)^2$. Stačí tak dokázat nerovnost

$$1 - \frac{1}{n+2} \leq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \iff n(n+2) \leq (n+1)^2 \iff 0 \leq 1.$$

Tím je lemma dokázáno. □

Lemma 8. *Posloupnost $g_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesající.*

Důkaz. Ukážeme, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}.$$

Po vydělení $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ máme ekvivalentně

$$1 + \frac{1}{n+1} \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1}.$$

Opět využijeme Bernoulliho nerovnost (2) s $x = 1/n(n+2)$ k odhadu

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

Stačí tedy ověřit nerovnost

$$1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \iff n(n+2) \leq (n+1)^2 \iff 0 \leq 1.$$

Tak jsme dokázali monotonii druhé z posloupností. □

Eulerovo číslo e se potom definuje následujícím způsobem. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = f_1 \leq f_n < g_n \leq g_1 = 4,$$

jsou obě posloupnosti omezené. Díky monotonii proto mají konečnou limitu. Ta navíc musí být v obou případech stejná, neboť

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) f_n = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Definice 9. Společnou limitu posloupností (f_n) a (g_n) nazýváme *Eulerovo číslo* a značíme ji e .

Poznámka. Posloupnosti z definice Eulerova čísla se k jeho aproximaci nehodí. Povšimněme si na prvních několika členech

$$\begin{array}{lllll} f_1 = 2, & f_2 = 2,25, & f_3 \doteq 2,37, & f_4 \doteq 2,44, & f_5 \doteq 2,49, \\ g_1 = 4, & g_2 \doteq 3,38, & g_3 \doteq 3,16, & g_4 \doteq 3,05, & g_5 \doteq 2,99, \end{array}$$

že posloupnosti se ke skutečné hodnotě

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045 \dots$$

blíží poměrně pomalu. Pokud bychom chtěli e spočítat pomocí odhadu $f_n < e < g_n$, u členů f_{5000} a g_{5000} bychom se dostali na přesnost tří desetinných míst. Daleko rychlejší odhad poskytuje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

jejímž součtem je rovněž e . Všimněme si, jak rychlá je konvergence posloupnosti částečných součtů (s_n) v tomto případě:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 2,5, \quad s_3 \doteq 2,67, \quad s_4 \doteq 2,71, \quad s_5 \doteq 2,716$$

a se členem $s_6 \doteq 2,718$ se již dostáváme na přesnost tří desetinných míst.

Připomeňme, že jelikož $e > 1$, je funkce $f(x) = e^x$ ostře rostoucí, jejím definičním oborem je $\mathbb{R}$ a obor hodnot je $(0, +\infty)$. *Přirozený logaritmus* pak zavádíme jako inverzní funkci k f , čili vztahem

$$e^{\ln x} = x$$

pro všechna $x \in (0, +\infty)$. Zvídavý čtenář nalezne detaily například ve skriptu [1].

Z definice přirozeného logaritmu vidíme, že jde o ostře rostoucí funkci s definičním oborem $(0, +\infty)$ a oborem hodnot $\mathbb{R}$, z čehož speciálně plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$.

Eulerova–Mascheroniho konstanta

Nyní ukážeme, že posloupnost částečných součtů harmonické řady (tj. součet prvních n členů příslušné posloupnosti) se od posloupnosti $\ln n$ liší jen velmi málo. Podívejme se na prvních pár členů posloupnosti $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 \doteq 0,81, \quad a_3 \doteq 0,73, \quad a_4 \doteq 0,7, \quad a_5 \doteq 0,67, \quad a_6 \doteq 0,66.$$

Zdá se, že by posloupnost mohla být klesající i omezená, což už by zaručilo její konvergenci. V následujícím tvrzení tyto vlastnosti dokážeme.

Tvrzení 10. *Posloupnost*

$$a_n := H_n - \ln n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

splňuje:

1. *je klesající,*
2. *je omezená. Přesněji pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $0 \leq a_n \leq 1$.*

Důkaz.

1. Chceme ukázat, že pro každé přirozené n platí: $a_{n+1} \leq a_n$. To je po úpravě ekvivalentní

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Díky tomu, že exponenciální funkce $f(x) = e^x$ je ostře rostoucí, můžeme nerovnost ekvivalentně přepsat jako

$$e^{1/(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

a konečně, umocněním číslem $n+1$ dostáváme nerovnost

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

Díky lemmatu (8) víme, že posloupnost na pravé straně je klesající a e je její limita, tedy nerovnost platí.

2. Jelikož $a_1 = 1$ a posloupnost je klesající, stačí dokázat, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n$. Dokážeme dokonce ještě o něco silnější tvrzení: $1/n \leq a_n$ pro každé přirozené n . Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme již zmíněnou rovnost $a_1 = 1$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ potom chceme dokázat nerovnost

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \iff \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Ekvivalentně odečtením posledního členu sumy dostaneme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

Z indukčního předpokladu však

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln n + \frac{1}{n}.$$

Zbývá tak ukázat nerovnost

$$\begin{aligned} \ln n + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) &\iff \frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \iff \\ &\iff e^{1/n} \geq 1 + \frac{1}{n} \iff e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Z lemmatu 7 však víme, že posloupnost na pravé straně je rostoucí s limitou e, proto je opět nerovnost splněna. $\square$

S odvoláním na konvergenci omezené a monotónní posloupnosti (tvrzení 4) máme dokázanou následující větu.

Věta 11. *Posloupnost (a_n) z předchozího tvrzení je konvergentní s limitou ležící v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.*

Definice 12. Limitu posloupnosti (a_n) z tvrzení 10 nazýváme Eulerova–Mascheroniho konstanta a značíme ji γ .

Skutečná hodnota Eulerovy–Mascheroniho konstanty je

$$\gamma = 0,577\,215\,664\,901\dots$$

Jedná se o velice významnou matematickou konstantu, která se objevuje v mnoha odvětvích, mj. v matematické analýze, ve statistice nebo v teorii čísel. Kromě toho slouží ke snadnému sečtení různých číselných řad (jak se co nevidět přesvědčí i čtenář – zejména ten, který se pustí do úkolu 1). Zajímavostí je, že na rozdíl od konstant π a e není známo, zda je γ racionální či iracionální.

Na závěr této kapitoly zmiňme ještě důsledek tvrzení 10 pro součet harmonické řady.

Důsledek 13. *Harmonická řada je podstatně divergentní. Její součet je roven $+\infty$.*

Důkaz. Dle druhého bodu tvrzení 10 platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $H_n - \ln n \geq 0$, tedy $H_n \geq \ln n$. S využitím faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, tak okamžitě dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$. □

Harmonická řada se střídavými znaménky

Nyní se konečně můžeme vrátit k úvodní úloze a s využitím poznatků z předešlé kapitoly sečteme harmonickou řadu se střídavými znaménky

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Přitom nám stačí pouze vědět, že γ , tedy $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, existuje, na její přesné hodnotě nezáleží.

Označme posloupnost částečných součtů řady jako

$$\tilde{H}_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Potom pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n. \end{aligned}$$

Ovšem limitu této posloupnosti už spočítat umíme:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - H_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - \ln(2n) + \ln(2n) - H_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_{2n} - \ln(2n)) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 + \ln n - H_n) \\ &= \gamma + \ln 2 - \gamma = \ln 2.\end{aligned}$$

A jelikož $\tilde{H}_{2n+1} = \tilde{H}_{2n} + 1/(2n+1)$, je také

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{H}_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\tilde{H}_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln 2 + 0 = \ln 2.$$

Nalezli jsme tak hledaný součet řady a řešení motivační úlohy jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \doteq 0,693 \dots$$

Pravděpodobnost, že číslo $\lfloor 1/x \rfloor$ je liché, je tedy rovna přibližně 69,3 %.

Poznámka. Jako zajímavost ještě uvedme, že Eulerova–Mascheroniho konstanta se objevuje i v souvislosti s možná nejslavnějším nevyřešeným matematickým problémem – Riemannovou hypotézou. Ta tvrdí, že všechny netriviální kořeny Riemannovy funkce zeta leží na tzv. kritické přímce, tj. jsou to komplexní čísla s reálnou částí $1/2$. Důsledky pravdivosti či nepravdivosti Riemannovy hypotézy jsou, zejména v teorii čísel, téměř nedozírné. Od roku 1859, kdy ji Bernhard Riemann vyslovil, se však nepodařilo ji dokázat ani vyvrátit.

Guy Robin roku 1984 však dokázal, že pravdivost Riemannovy hypotézy je ekvivalentní tvrzení

$$\frac{\sigma(n)}{\ln(\ln n)} < e^\gamma, \quad \text{pro všechna přirozená } n > 5040,$$

kde $\sigma(n)$ udává součet všech kladných dělitelů čísla n .

Na závěr máme pro čtenáře úkoly, které procvičí nově nabyté vědomosti.

Úkol 1. Nalezněte součty následujících řad [2]:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

MATEMATIKA

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)},$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)},$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}.$

Nápověda: Výrazy typu $\frac{1}{n(n+1)}$ zapište jako $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ pro nějaká A, B .
Poznamenejme, že pokud se podaří řadu zapsat jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}),$$

je typicky velice jednoduché ji sečíst. Můžeme pak totiž nalézt vztah pro n -tý částečný součet jako

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Řada je potom konvergentní, resp. (podstatně) divergentní, právě když (a_n) je konvergentní, resp. (podstatně) divergentní posloupnost. Pokud existuje, je součet řady roven

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Úkol 2. Zvolme náhodně a nezávisle na sobě dvě čísla x a y z intervalu $(0, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že číslo $\lfloor y/x \rfloor$ je liché?

Literatura

- [1] Pelantová, E., Vondráčková, J.: Matematická analýza 1. ČVUT, Praha, 2018.
- [2] Pelantová, E., Vondráčková, J.: Cvičení z matematické analýzy. Integrální počet a řady. ČVUT, Praha, 2006.