

Rozhledy matematicko-fyzikální

Martina Škorpilová
Paprskové n -úhelníky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 3, 13–29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153096>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Papřskové n -úhelníky

Martina Škorpilová, MFF UK Praha

1. Úvod

Představme si dva svazky přímek v téže rovině,¹⁾ které mají stejný počet přímek, každá dvojice po sobě jdoucích přímek téhož svazku svírá shodný úhel, mezi všemi uvažovanými přímkami neexistuje dvojice rovnoběžek a žádná z přímek jednoho svazku neprochází středem svazku druhého. Zkusme si nyní tipnout, zda všechny existující průsečíky přímek jednoho svazku s přímkami svazku druhého jsou v uvažované rovině „rozesety zcela bez ladu a skladu“, nebo ne? Jaká je Vaše hypotéza? Správná odpověď je, že průsečíky jsou umístěny v přesně popsatelné kompozici. Jedná se o vrcholy n -úhelníků, kterým budeme říkat *papřskové* a které – zvláště v případě většího počtu přímek svazků – tvoří působivé obrazy.

V celém článku budeme pracovat v rovině. Úhlem s danými rameny budeme vždy myslet úhel konvexní a z kružnicových oblouků s danými krajními body budeme ze dvou možností vždy uvažovat ten kratší. Kvůli přehlednosti ilustrací budeme některé přímký zakreslovat tak, že budou působit spíše jako polopřímky nebo úsečky.

Tento text vychází z velké části z rozsáhlého článku [1], v němž lze dohledat řadu dalších poznatků, ověření a souvislostí. Tematika popsaná na následujících stranách již byla autorkou zpracována v příspěvku [2], avšak poněkud jiným přístupem zaměřeným především na odvozování poznatků samotným čtenářem v rámci řešení úloh na středoškolské úrovni.

2. Papřskové n -úhelníky

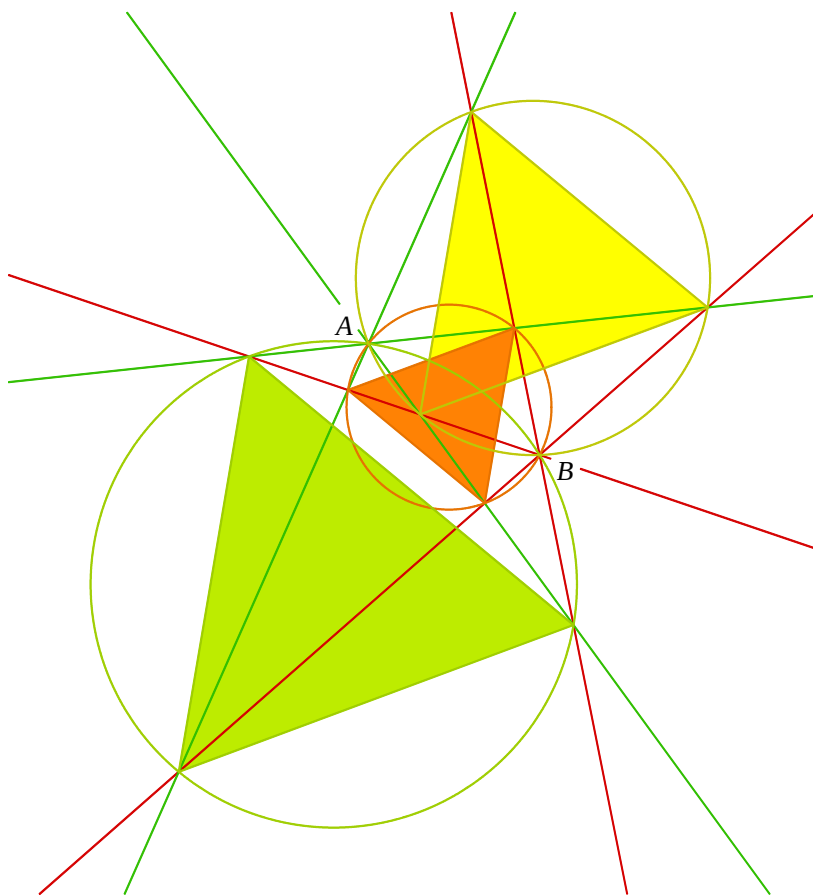
Představme nyní konstrukci papřského n -úhelníku, a to v rámci tvrzení s poetickým názvem *Věta o majácích*.

Věta o majácích: *Nechť A , B jsou dva různé body a nechť každým z nich prochází n , $n \geq 3$, přímek takových, že každé dvě po sobě jdoucí svírají úhel o velikosti $180^\circ/n$. Přitom žádná z přímek jednoho svazku*

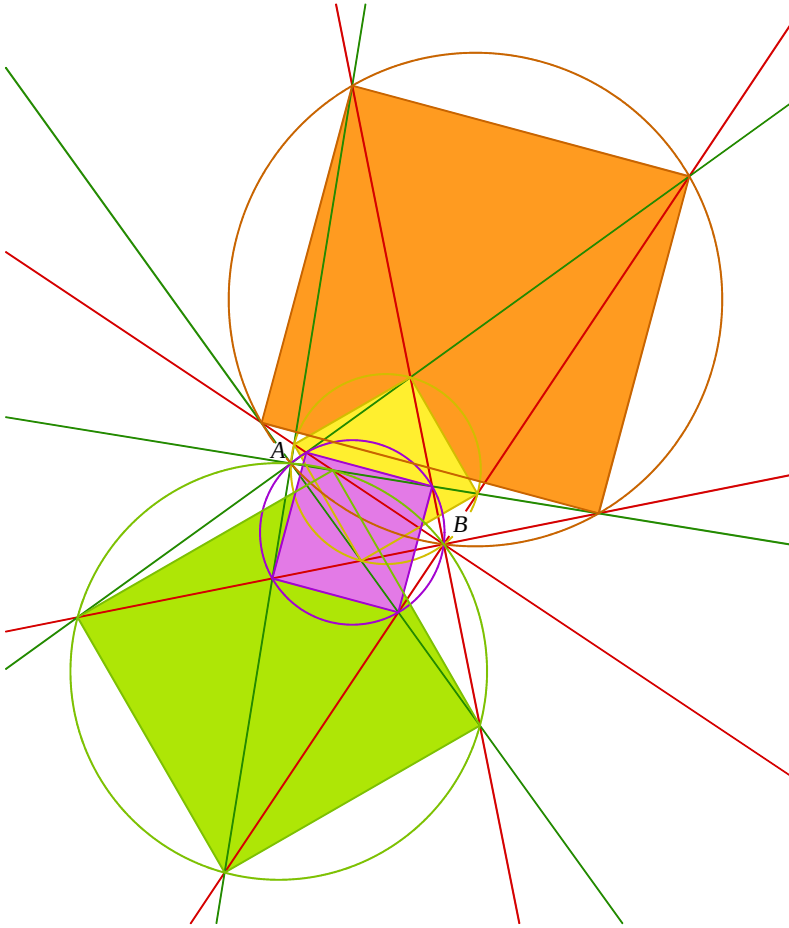
¹⁾ *Svazkem přímek* rozumíme množinu přímek v rovině, které mají společný jeden bod. Tomuto bodu říkáme *střed svazku*.

není rovnoběžná se žádnou přímkou svazku druhého a žádná z přímek jednoho svazku neprochází středem svazku druhého. Potom se $2n$ přímek těchto svazků protíná v n^2 bodech, které jsou vrcholy n pravidelných n -úhelníků. Kružnice opsané těmto n -úhelníkům procházejí body A a B .

Pravidelné n -úhelníky z právě zformulované věty se nazývají *paprskové*. Svazek n přímek uvedených vlastností o středu A , resp. B , budeme značit (A_n) , resp. (B_n) .



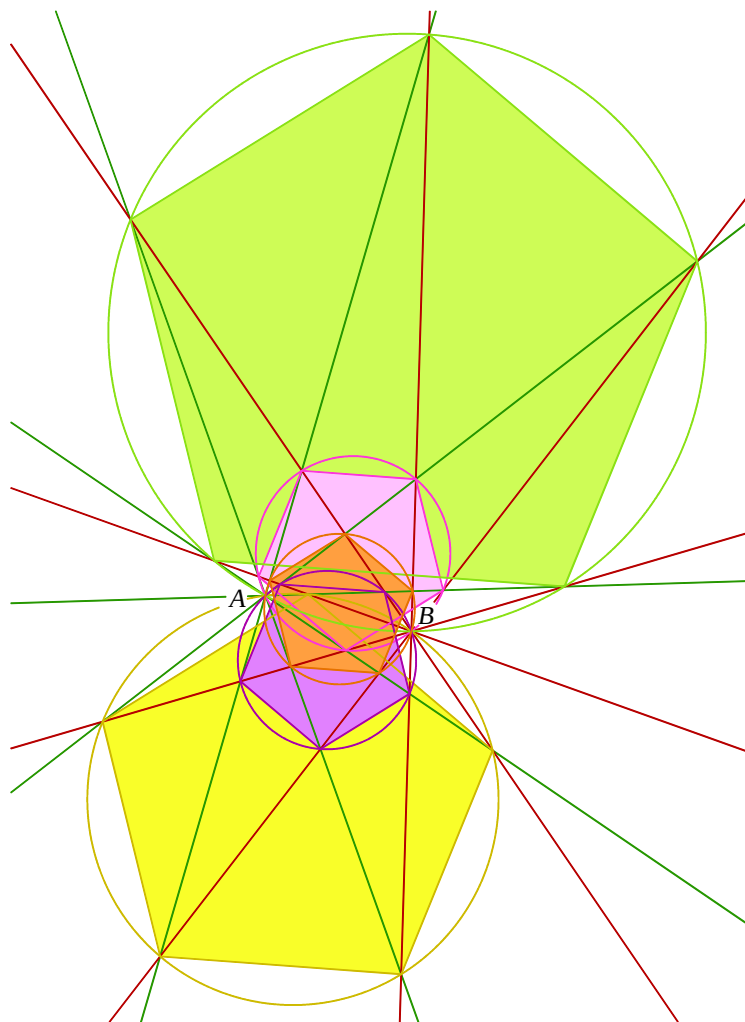
Obr. 1: Tři paprskové trojúhelníky



Obr. 2: Čtyři paprskové čtverce

Umístíme-li do bodů A a B pomyslné majáky jistých vlastností a podíváme-li se na ně z velké výše ve směru jejich os, budeme majáky vnímat jako body A , B a „oboustranné“ světelné paprsky vysílané těmito majáky jako přímky svazků (A_n) a (B_n) . Odtud plyne jednak název tvrzení, které je v anglicky psaných textech nazýváno *The Lighthouse Theorem*, tak i název paprskových n -úhelníků.²⁾

²⁾ Pro zajímavost uvedme, že vědní obor věnující se stavbě, činnosti a funkci majáků se nazývá *farologie*. Termín odkazuje na ostrůvek *Faros*, na němž stál první maják,



Obr. 3: Pět paprskových pětiúhelníků

o němž se dochovaly písemné záznamy a který dnes – byť již neexistuje – patří mezi sedm divů světa. Majáky jsou stavěny na místa v různých výších a paprsky jednotlivých majáků mají různé barvy (například majáky na pobřežích jsou situovány velmi vysoko, jejich paprsky jsou výrazné a mají bílou barvu). Navigaci v mapě napomáhá i existence různých typů majáků odlišených podle četnosti, resp. délky vysílání paprsků (např. majáky svítící stále; svítící po stejnou dobu jako jsou potmě; rychle blikající majáky apod.).

Jelikož neexistuje n -úhelník mající jeden či dva vrcholy, je věta formulována až pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$. Pro $n = 3$ vzniknou tři rovnostranné trojúhelníky (viz obr. 1), pro $n = 4$ čtyři čtverce (viz obr. 2), pro $n = 5$ vznikne pět pravidelných pětiúhelníků (viz obr. 3) atd. Složitost (ale snad i krása) ilustrací se se vzrůstajícím n velmi rychle zvyšuje. Například pro $n = 10$ bychom sestavovali již sto průsečíků přímek, které by byly vrcholy deseti pravidelných desetiúhelníků.

Uvědomme si, které průsečíky přímek jsou vrcholy téhož paprskového n -úhelníku. Vyberme si například libovolný vrchol nějakého paprskového pětiúhelníku zobrazeného na obr. 3. Nalezneme dvojici přímek, jejichž průsečík je tímto vrcholem. Další vrchol téhož paprskového pětiúhelníku je průsečíkem dvojice přímek, z nichž každá je obrazem jedné z přímek původní dvojice přímek v otočení se středem A , resp. B a tímž úhlem $180^\circ/5 = 36^\circ$. Totéž platí i pro zbývající vrcholy studovaného pětiúhelníku a příslušné dvojice protínajících se přímek – vždy otáčíme přímky v obou svazcích o tentýž úhel.

Nyní přesně zformulujme příslušné tvrzení pro nejmenší možné n , tj. $n = 3$ (viz obr. 1) a také ho ihned poté dokažme. Pochopení principu ověření věty pro $n = 3$ usnadní porozumění důkazu *Věty o majících* pro obecné n , který uvedeme následně.

Věta o majících se třemi paprsky: *Nechť A, B jsou dva různé body a nechť každým z nich procházejí tři přímky, z nichž každé dvě po sobě jdoucí svírají úhel o velikosti 60° . Přitom žádná z přímek jednoho svazku není rovnoběžná se žádnou přímkou svazku druhého a žádná z přímek jednoho svazku neprochází středem svazku druhého. Potom se šest přímek svazků protíná v devíti bodech, které jsou vrcholy tří rovnostranných trojúhelníků. Kružnice opsané těmito trojúhelníkům procházejí body A a B .*

Důkaz věty o majících se třemi paprsky. Podstata důkazu spočívá v určení velikostí několika úhlů. Uvažujme trojici navzájem různých bodů A, B, M , kružnici k procházející těmito body a jí vepsaný rovnostranný trojúhelník KLM (viz obr. 4). Průsečík přímek AK a BM označme N a průsečík přímek AM a BL označme O .

Trojúhelník KLM je rovnostranný, tudíž

$$|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle LMK| = 60^\circ.$$

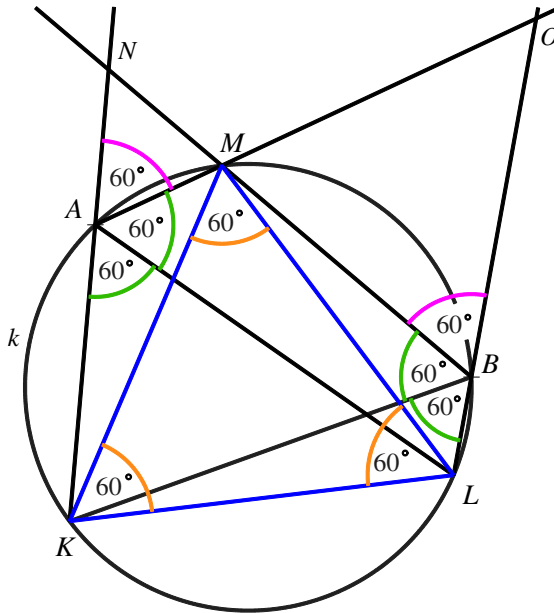
Protože úhly KAL a KBL jsou obvodovými úhly příslušnými stejnému

oblouku KL kružnice k jako obvodový úhel KML , platí

$$|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL| = |\sphericalangle KML| = 60^\circ.$$

Obdobně dvojice úhlů LAM a LKM , resp. KBM a KLM přísluší témuž kružnicovému oblouku LM , resp. KM , z čehož plyne

$$|\sphericalangle LAM| = |\sphericalangle LKM| = 60^\circ, \quad \text{resp.} \quad |\sphericalangle KBM| = |\sphericalangle KLM| = 60^\circ.$$



Obr. 4: Důkaz věty o majících se třemi paprsky

Protože trojice bodů K, A, N , resp. L, B, O leží na jedné přímce, dostáváme

$$|\sphericalangle MAN| = 180^\circ - |\sphericalangle KAL| - |\sphericalangle LAM| = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

resp.

$$|\sphericalangle MBO| = 180^\circ - |\sphericalangle KBL| - |\sphericalangle KBM| = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ.$$

Dvojice polopřímek AK a AL , AL a AM , AM a AN , BL a BK , BK a BM , BM a BO tedy svírají shodné úhly o velikosti 60° . Přímky

$AK = AN$, AL , AM jsou tedy tři přímky svazku (A_3) , přímky $BL = BO$, BK , BM jsou tři přímky svazku (B_3) z věty o majících se třemi paprsky a rovnostranný trojúhelník KLM je paprskový. Kružnice k je přitom jemu opsanou kružnicí.

V důkazu jsme pracovali s body A , B , vrcholem M (a tedy s paprsky AM , BM) a paprskovým trojúhelníkem KLM vepsaným kružnici procházející body A , B , M . Druhý, resp. třetí paprskový trojúhelník získáme, budeme-li uvažovat opět body A , B , avšak místo bodu M budeme pracovat s průsečíkem přímek AK a BL , resp. s průsečíkem přímek AL a BK a kružnici opsanou paprskovému trojúhelníku bude kružnice určená opět body A , B a uvedeným průsečíkem. Jelikož pozici trojice navzájem různých bodů M , A a B jsme mohli volit libovolně, dokázali jsme, že pro jakoukoli volbu svazků (A_3) , (B_3) odpovídají průsečíky jejich přímek právě vrcholům rovnostranných trojúhelníků. $\square$

Upozorníme, že v právě dokončeném důkazu bychom místo vnitřních úhlů KML , LKM , MLK trojúhelníku KLM , které jsou současně obvodovými úhly příslušnými kružnicovým obloukům KL , LM , MK , mohli využívat i středové úhly příslušné těmto obloukům. Protože velikosti těchto navzájem shodných středových úhlů jsou 120° , jsou poloviční velikosti obloukových úhlů KAL , KBL , LAM , MBK skutečně 60° . Využití tohoto vztahu mezi středovými a obvodovými úhly kružnice k nám pomůže velmi elegantně dokázat obecnější větu o majících.

Důkaz věty o majících publikoval britsko-kanadský matematik Richard Kenneth Guy (1916–2020) v článku [1] z roku 2007.

Důkaz věty o majících. Uvažujme tři navzájem různé body A , B , K_1 , kružnici k o středu S jimi procházející a dále jí vepsaný pravidelný n -úhelník $K_1K_2 \dots K_n$ (viz obr. 5). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod A leží na kružnicovém oblouku K_1K_n .

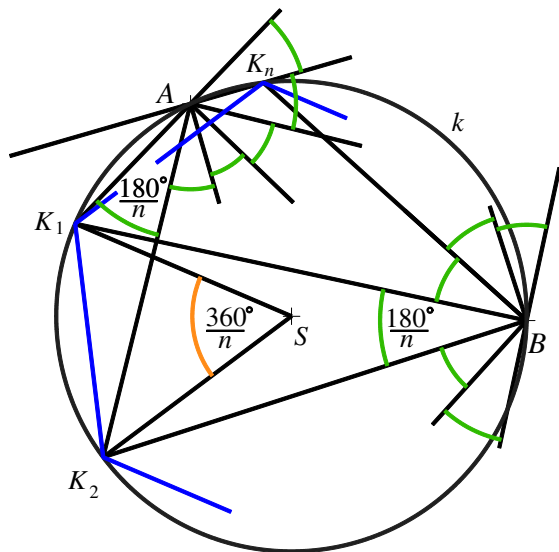
Velikosti středových úhlů K_iSK_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n$, kde $K_{n+1} = K_1$, jsou $360^\circ/n$, a proto jsou velikosti $n - 1$ obvodových úhlů K_iAK_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, rovny $180^\circ/n$.

Velikost úhlu svíraného polopřímku AK_n a polopřímku opačnou k polopřímce AK_1 je

$$180^\circ - (n - 1) \cdot \frac{180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Zcela analogicky určíme, že velikosti úhlů svíraných polopřímkami vycházejících z bodu B jsou také $180^\circ/n$. Ověřili jsme tak, že všechny

přímky, na nichž leží polopřímky AK_i , BK_i , jsou přímky svazku (A_n) , resp. (B_n) , a tudíž pravidelný n -úhelník $K_1K_2 \dots K_n$ je paprskový a kružnice k je jemu opsaná kružnice.



Obr. 5: Důkaz věty o majících

Ostatních $n - 1$ paprskových n -úhelníků dostaneme, pokud budeme pracovat s kružnicemi, z nichž každá je určena body A , B a jedním z průsečíků vhodné dvojice přímek svazků (A_n) , (B_n) , přičemž tento průsečík je různý od bodů K_i , $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

3. Vlastnosti paprskových trojúhelníků

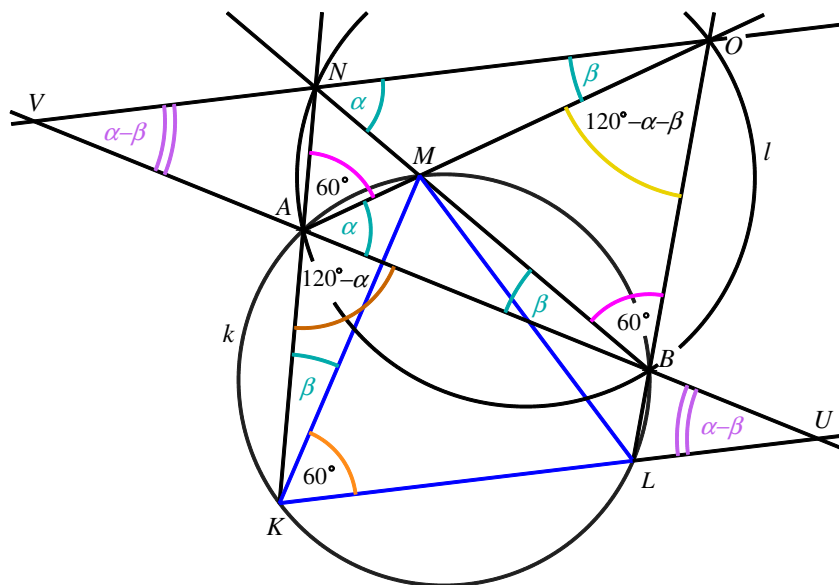
V této části popíšeme a dokážeme dva poznatky o paprskových trojúhelnících. U jednoho z tvrzení následně (již bez důkazu) zmíníme, jak by se modifikovalo pro obecné n .

Na úvod připomeňme, že jedna z vlastností nejen paprskových trojúhelníků, ale i paprskových n -úhelníků je přímo součástí *Věty o majících*, a to skutečnost, že kružnice jim opsané prochází středy svazků přímek.

Další zajímavostí je, že paprskové trojúhelníky leží vůči sobě ve speciální poloze. Pokuste se ji nejprve sami odhalit pohledem na obr. 1.

Věta o rovnoběžnosti stran paprskových trojúhelníků: *Strany tři paprskových trojúhelníků, které přísluší svazkům přímek (A_3) a (B_3) , jsou rovnoběžné.*

Důkaz. Necht' symboly A, B, K, L, M, k, N, O (viz obr. 6) značí totéž jako na obr. 4. Průsečík přímky AB s přímkou KL , resp. NO označme U , resp. V . Velikost úhlu MAB , resp. ABM označme α , resp. β .



Obr. 6: Důkaz věty o rovnoběžnosti stran paprskových trojúhelníků

Úhly AKM a ABM jsou obvodovými úhly příslušejícími kružnicovému oblouku AM kružnice k , z čehož plyne $|\sphericalangle AKM| = |\sphericalangle ABM| = \beta$. Zřejmě

$$|\sphericalangle KAU| = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha,$$

a tudíž z vlastností vnitřních úhlů trojúhelníku KUA plyne

$$|\sphericalangle KUA| = 180^\circ - (120^\circ - \alpha) - (\beta + 60^\circ) = \alpha - \beta.$$

Již víme (viz obr. 4), že úhly NAO a NBO jsou shodné, proto jsou obvodovými úhly kružnice l procházející body A, B, O, N , tj. čtyřúhelník $ABON$ je tětíkový. Úhly BNO a BAO jsou tedy obvodovými úhly

příslušející témuž oblouku BO kružnice l opsané čtyřúhelníku $ABON$ a obdobně úhly AON a ABN jsou obvodovými úhly příslušející témuž oblouku AN kružnice l . Proto

$$|\sphericalangle BNO| = |\sphericalangle BAO| = \alpha \quad \text{a} \quad |\sphericalangle AON| = |\sphericalangle ABN| = \beta.$$

Z trojúhelníku ABO je evidentní, že

$$|\sphericalangle BOA| = 180^\circ - \alpha - (\beta + 60^\circ) = 120^\circ - \alpha - \beta,$$

a proto následně využitím trojúhelníku OVB dostáváme vztah

$$|\sphericalangle OVB| = 180^\circ - (\beta + 60^\circ) - (120^\circ - \alpha - \beta + \beta) = \alpha - \beta.$$

Tudíž $|\sphericalangle KUA| = \alpha - \beta = |\sphericalangle OVB|$, z čehož plyne, že přímky KU , VO svírají s přímkou AB shodné úhly. Proto jsou přímky KU , VO rovnoběžné, což implikuje, že jsou rovnoběžné i úsečky KL , NO . Nyní si stačí uvědomit, že nejen úsečka KL , ale i úsečka NO je stranou některého z paprskových trojúhelníků. Tím je důkaz hotov. $\square$

Podíváme-li se například na obr. 2, vidíme, že pro $n = 4$ analogická věta neplatí, neboť strany všech čtyř paprskových čtverců rovnoběžné nejsou. Pokud bychom však dorýsovali úhlopříčky jednotlivých čtverců, zjistíme, že jsou rovnoběžné strany dvou paprskových čtverců a úhlopříčky zbývajících dvou paprskových čtverců. Opět lze vyslovit obecnější verzi právě dokázané věty pro libovolné n , v níž platí rovnoběžnost stran, resp. stran a úhlopříček n -úhelníků (pro liché n se jedná o rovnoběžnost stran n -úhelníků; pro sudé n o rovnoběžnost stran $\frac{n}{2}$ n -úhelníků či o rovnoběžnost stran $\frac{n}{2}$ n -úhelníků a úhlopříček $\frac{n}{2}$ n -úhelníků).

Poslední tvrzení tohoto článku říká, že úhly jistých velikostí můžeme na obrázku s paprskovými trojúhelníky nalézt dvakrát.

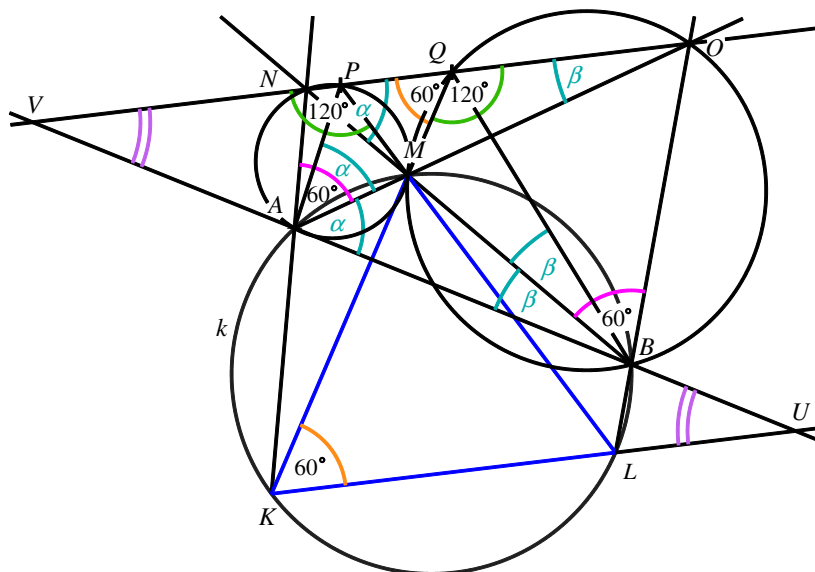
Věta o duplikaci úhlů: *Nechť (A_3) a (B_3) jsou svazky přímek a KLM je jeden z příslušných paprskových trojúhelníků. Dále nechť N je průsečík přímek AK a BM , O je průsečík přímek BL a AM , P je průsečík přímek NO a LM a konečně Q je průsečík přímek NO a KM . Potom*

$$|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle MAB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle QBM| = |\sphericalangle MBA|.$$

Důkaz. Znovu připomeňme, že jsme již odvodili vztah

$$|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle OBM| = 60^\circ$$

(viz obr. 4).



Obr. 7: Důkaz věty o duplikaci úhlů

Protože podle předchozí věty jsou přímky KL a NO rovnoběžné, je trojúhelník MQP rovnostranný, a proto $|\sphericalangle MPQ| = |\sphericalangle PQM| = 60^\circ$. Tudíž platí i rovnosti $|\sphericalangle MPN| = |\sphericalangle MQO| = 120^\circ$, z nichž vyplývá

$$|\sphericalangle MPN| + |\sphericalangle NAM| = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

a

$$|\sphericalangle MQO| + |\sphericalangle OBM| = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Součet velikostí protějších úhlů čtyřúhelníku je 180° právě tehdy, když je čtyřúhelník tětíkový. Každému ze čtyřúhelníků $AMPN$ a $MBOQ$ lze proto opsat kružnici a ze shodnosti obvodových úhlů příslušných témuž oblouku PM , resp. QM jedné z kružnic dostáváme

$$|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle PNM| = \alpha = |\sphericalangle MAB|,$$

resp.

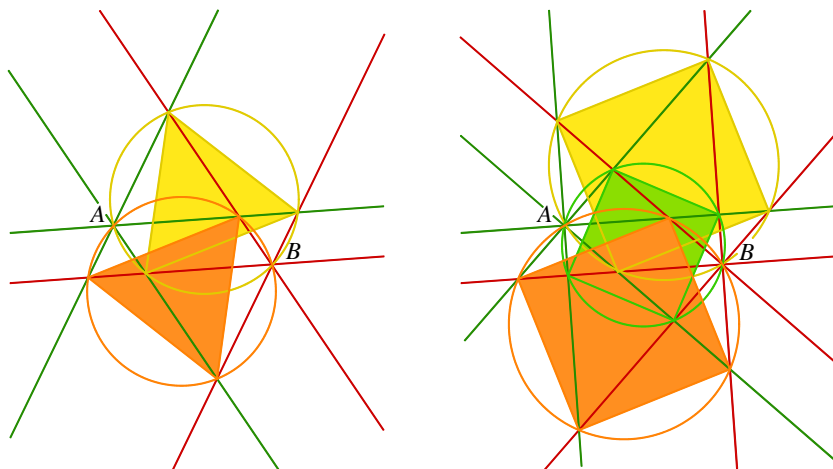
$$|\sphericalangle QBM| = |\sphericalangle QOM| = \beta = |\sphericalangle MBA|,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

4. Speciální polohy paprsků

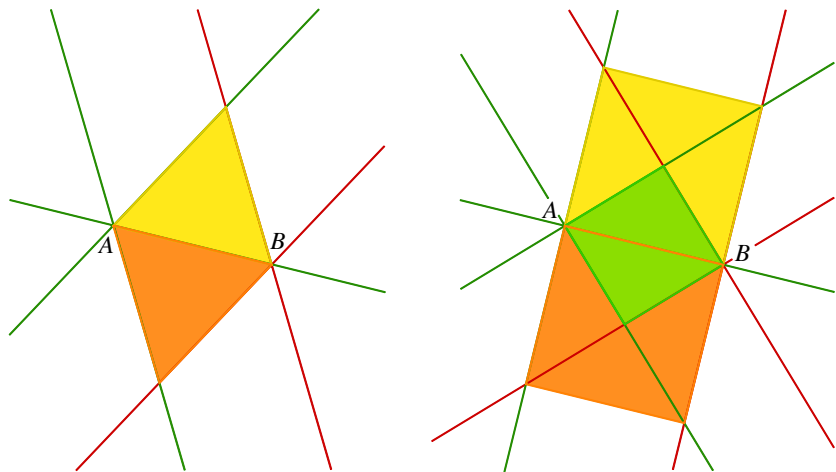
Ve větě o majících jsme vyloučili dva případy poloh, v nichž buď k přímlce jednoho svazku existuje přímka druhého svazku s ní rovnoběžná či alespoň jedna přímka jednoho svazku prochází středem svazku druhého.

V prvním případě je zřejmé, že průsečíky navzájem rovnoběžných přímek by ležely v nekonečnu. Jedná se přitom o právě n průsečíků, které by patřily témuž pravidelnému n -úhelníku. Zbývajících $n^2 - n$ průsečíků tvoří vrcholy $n - 1$ n -úhelníků, které jsou opět pravidelné. Omezíme-li se tedy na vlastní body, pro $n = 3$ nevznikají tři, ale pouze dva rovnostranné trojúhelníky, pro $n = 4$ nevznikají čtyři, ale pouze tři čtverce (viz obr. 8) atd.



Obr. 8: Rovnoběžné přímky svazků

Připusťme, aby jedna dvojice přímek z různých svazků byla nejen rovnoběžná, ale dokonce aby tyto přímky splynuly (což současně odpovídá situaci, kdy by každým ze středů svazků procházela přímka svazku druhého). Opět bychom dostali $n - 1$ pravidelných n -úhelníků s vlastními vrcholy, přičemž dva z vrcholů každého z n -úhelníků splývají se středy svazků (viz obr. 9). S posledním n -úhelníkem by ale nastaly trouble. Při konstrukci bychom získali pouze $n - 1$ navzájem rovnoběžných nesplyvajících dvojic přímek, které by určovaly $n - 1$ průsečíků ležících v nekonečnu, avšak poslední z očekávaných průsečíků nelze jednoznačně nalézt – měl by totiž být průsečíkem splývajících přímek.



Obr. 9: Dvojice splývajících paprsků

Situace, kdy právě jedna přímka jednoho svazku prochází středem druhého svazku, je ze speciálních případů nejzajímavější. Průsečíky přímek svazků by byly – tak jako ve větě o majících – opět vrcholy n pravidelných n -úhelníků. Všechny tyto n -úhelníky by měly jeden společný vrchol, a to ve středu svazku, kterým prochází přímka druhého svazku. Různých průsečíků přímek svazků by již nebylo n^2 , ale $n^2 - n + 1$.

K uvedenému počtu lze dospět různými úvahami. Buď si uvědomíme, že n vrcholů by splynulo do jediného, a proto jich je o $n - 1$ méně, tj.

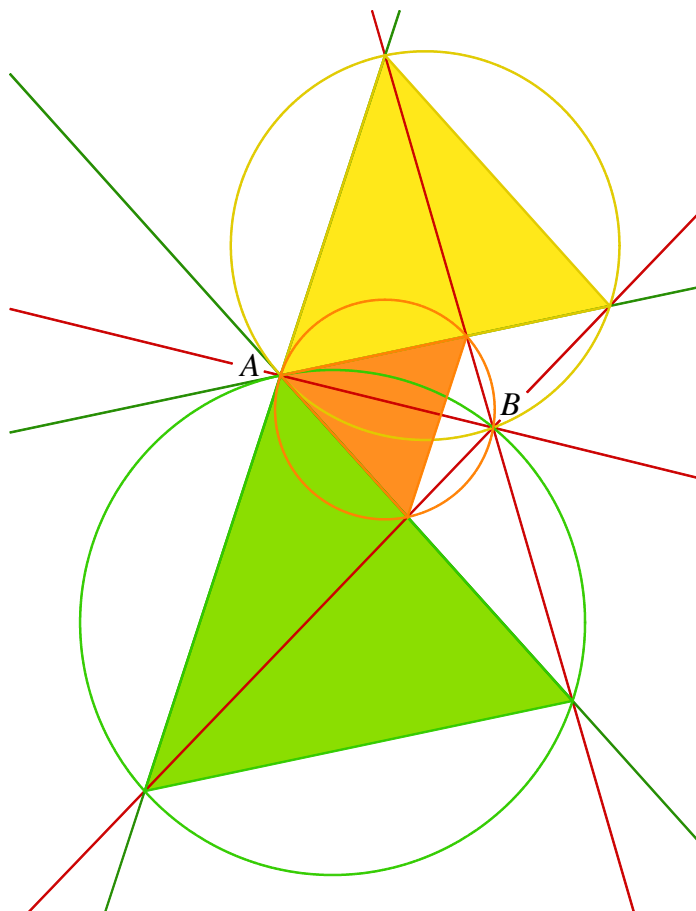
$$n^2 - (n - 1) = n^2 - n + 1.$$

Nebo uvážíme, že ona „problematická“ přímka jednoho svazku procházející středem druhého svazku má s přímkami druhého svazku jediný průsečík (střed svazku) a každá ze zbývajících, „vhodně se chovajících“ přímek prvního svazku má s přímkami druhého svazku n průsečíků, tj. celkem je vrcholů $1 + (n - 1) \cdot n = n^2 - n + 1$.

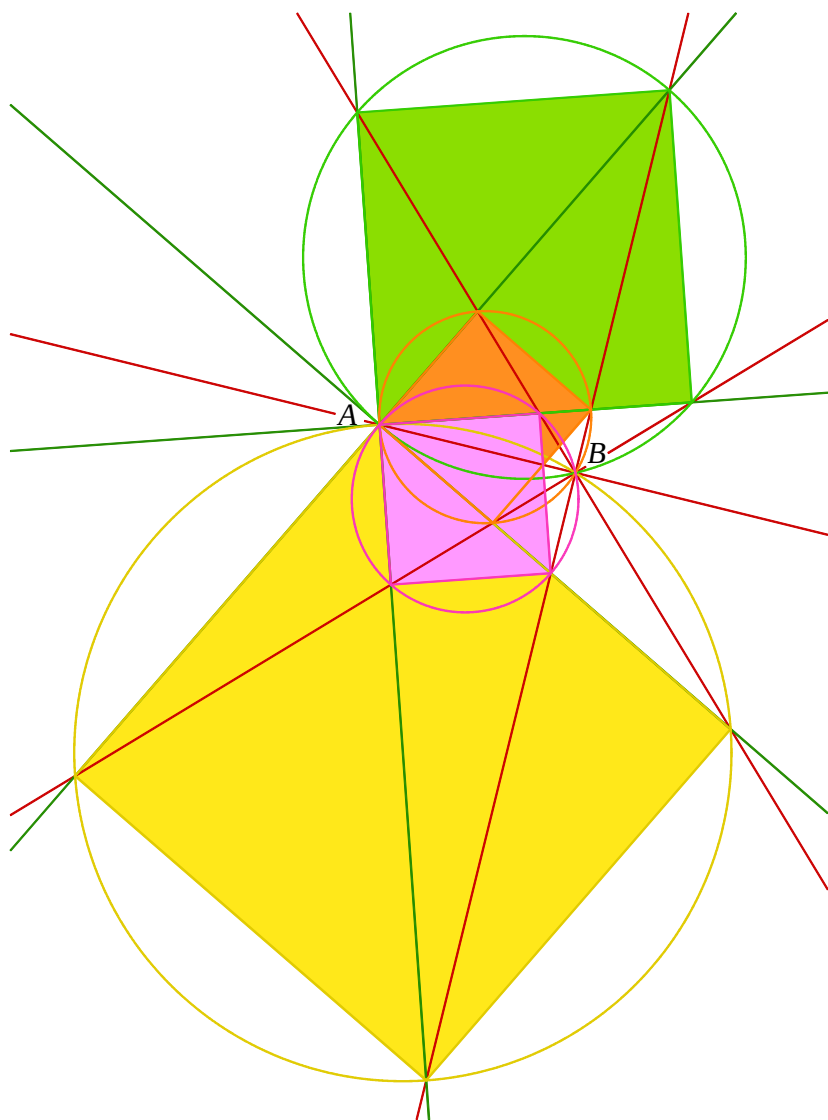
Tato poloha svazků je pro $n = 3$, $n = 4$ a $n = 8$ znázorněna na obrázcích 10, 11 a 12 (kvůli přehlednosti je na obr. 13 ještě uveden výřez z obr. 12). Všimněme si, že všechny pravidelné n -úhelníky mají na každé z ilustrací skutečně společný jeden vrchol ve středu svazku, kterým prochází přímka svazku druhého, a že tímto bodem prochází rovněž všechny kružnice opsané jednotlivým pravidelným n -úhelníkům.

5. Závěr

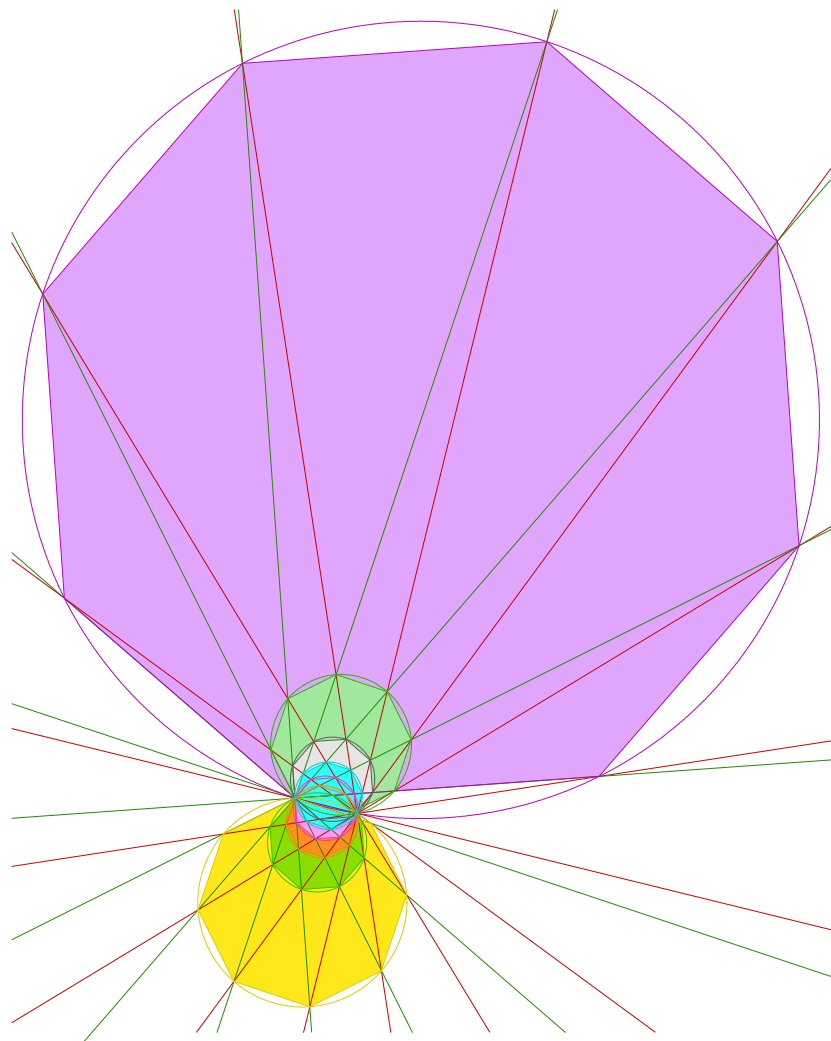
Pokud budete mít to štěstí, že se ocitnete v noci na lodi v oblasti, kam dosvítí současně dva majáky, vzhlédněte – až budete podplouvat jejich paprsky – vzhůru k noční obloze a pokuste se nejen dívat na souhvězdí, ale i nalézt některý z paprskových n -úhelníků či alespoň několik jejich vrcholů.



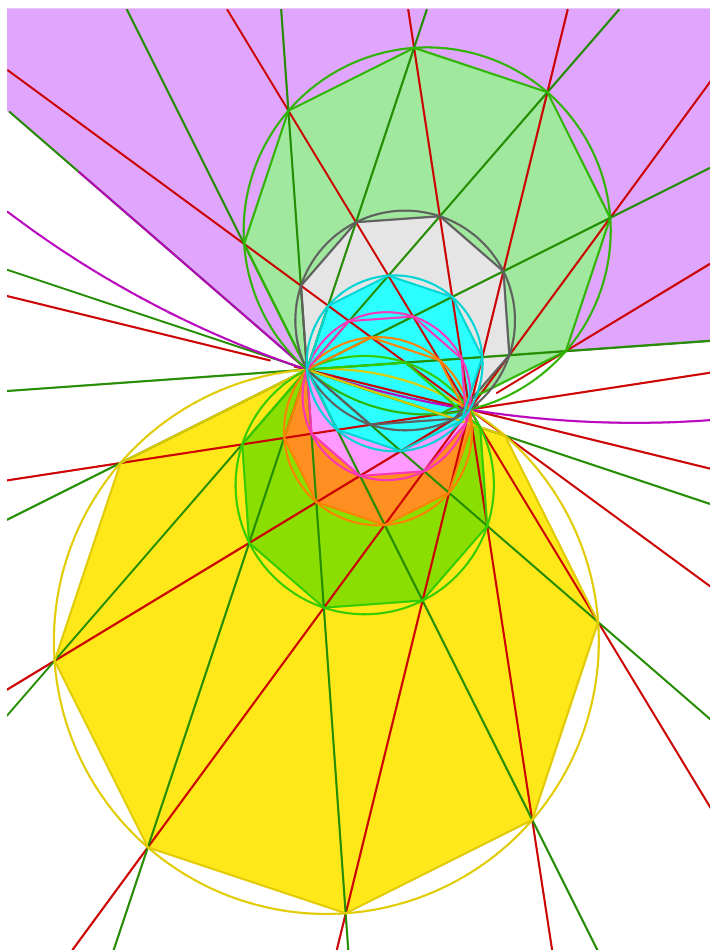
Obr. 10: Tři trojúhelníky se společným vrcholem



Obr. 11: Čtyři čtverce se společným vrcholem



Obr. 12: Osm pravidelných osmiúhelníků se společným vrcholem



Obr. 13: Osm pravidelných osmiúhelníků – výřez z obr. 12

Literatura

- [1] Guy, R. K.: The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti: A Budget of Paradoxes. *The American Mathematical Monthly*, roč. 114 (2007), s. 97–141.
- [2] Štěpánová, M.: Věta o majácích. In: Hromadová, J., Slavík, A. (eds.): *Cesty k matematice II*. Matfyzpress, Praha, 2016, s. 95–110.