

Rozhledy matematicko-fyzikální

Martin Agh

V srdci polynomů – Hornerovo schéma

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 3, 30–41

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153097>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

V srdci polynomů – Hornerovo schéma

*Martin Agh, SSPŠaG, student PedF UK, student MFF UK, Praha***Proč počítat chytře?**

Se situací, kdy je třeba určit hodnotu polynomu v daném bodě, se bezpochyby setkal každý, kdo prošel středoškolským studiem matematiky. Například při výpočtu hodnoty reálného polynomu

$$p(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 7$$

v bodě $x = 2$ bývá častým postupem buď použití kalkulátoru, nebo přímé dosazení hodnoty do jednotlivých členů polynomu a následné vyčíslení. Přímým výpočtem bychom dostali

$$p(2) = 2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 + 7 = 32 - 40 + 4 + 6 + 7 = 9,$$

což v tomto případě nevyžaduje výrazné úsilí. Výpočetní náročnost se však značně zvyšuje, uvažujeme-li polynom vyššího stupně. Například stanovení hodnoty $q(2)$, kde

$$q(x) = 4x^{10} - 3x^9 + 8x^7 - x^6 - x^5 + 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 2,$$

již představuje výrazně časově náročnější a méně přehlednou úlohu.

Při klasickém způsobu dosazování hodnoty do polynomu je nezbytné postupně vypočítat jednotlivé mocniny proměnné, provést odpovídající násobení s koeficienty a nakonec všechny členy sečíst. Ačkoliv je tento postup zcela přímočarý, nese s sebou i jistá úskalí.

Jak už jsme zmínili výše, s rostoucím stupněm polynomu narůstá počet potřebných početních operací. Nejenže je snadné se dopustit chyby při výpočtech samotných, ale také při jejich přepisování či zadávání do kalkulátoru. Zejména u polynomů vyššího stupně se tento způsob výpočtu může stát zbytečně zdlouhavý a nepřehledný.

Existuje však metoda, která umožňuje určit hodnotu polynomu podstatně efektivněji a přehledněji. Její princip je přitom překvapivě jednoduchý. Tato metoda, známá jako *Hornerovo schéma*, nabízí nejen zjednodušení výpočtu samotného, ale také hlubší vhled do struktury polynomu a jeho souvislostí s dělením polynomu či rekurzivní evaluací.

Teorie polynomů na úvod

Než přistoupíme k zavedení Hornerova schématu, je vhodné nejprve připomenout některé základní pojmy a související tvrzení. Následující definice jsou převzaty z [1, str. 135] a [2].

Definice 1. *Polynomem (též mnohočlenem) s jednou proměnnou x rozumíme výraz ve tvaru*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Reálná čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazýváme *koefficienty polynomu* a výrazy $a_k x^k$, $0 \leq k \leq n$, se nazývají *členy polynomu*. Je-li $a_n \neq 0$, mluvíme o *polynomu n -tého stupně*.

Poznámka 1. Je-li $a_n = 1$, polynom se nazývá *normovaný polynom*¹⁾ nebo *polynom v normovaném tvaru*.

Značení. Stupeň polynomu $p(x)$ budeme označovat symbolem $\text{st}(p(x))$; zápis $\text{st}(p(x)) = n$ pak znamená, že $p(x)$ je polynom stupně n .²⁾

Poznámka 2. Pro *nulový polynom*, tj. polynom, jehož všechny koeficienty jsou nulové, budeme v souladu se standardní konvencí pokládat $\text{st}(0) = -1$.

Definice 2. *Kořenem polynomu $p(x)$ nazveme každé číslo $c \in \mathbb{R}$, pro které platí*

$$p(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = 0.$$

Tvrzení 1 (Dělení polynomů se zbytkem [3, str. 20]). ³⁾ *Nechť $p(x)$, $q(x)$ jsou polynomy a $q(x)$ je nenulový. Potom existuje právě jedna dvojice polynomů $r(x)$, $s(x)$ splňující*

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{a} \quad \text{st}(r(x)) < \text{st}(q(x)).$$

Zaměříme se nyní na konkrétní případ tvrzení 1, kdy dělicím polynomem je lineární normovaný polynom, tj. polynom $q(x) = x - c$, $c \in \mathbb{R}$. Potom dosazením lineárního polynomu $q(x)$ do tvrzení 1 dostáváme

$$p(x) = s(x) \cdot (x - c) + r(x).$$

¹⁾V odborné literatuře se používá také označení *monicý polynom*.

²⁾V odborné literatuře se lze setkat také se značením $\deg(p(x)) = n$.

³⁾Důkaz tvrzení 1 lze nalézt v [3, str. 20, tvrzení 3.2].

Z tvrzení 1 dále plyne, že stupeň zbytkového polynomu $r(x)$ je menší než stupeň dělitele $q(x)$, tedy $\text{st}(r(x)) < \text{st}(q(x))$. Vzhledem k tomu, že $q(x)$ je lineární, musí nutně platit $\text{st}(r(x)) < 1$, tedy $r(x)$ je konstantní polynom. Zaveďme proto označení $r(x) = R$, kde $R \in \mathbb{R}$ je konstanta představující zbytek po dělení. Tím dostáváme

$$p(x) = s(x) \cdot (x - c) + R. \quad (1)$$

Je-li $R = 0$, pak je číslo c zřejmě kořenem polynomu $p(x)$. Zjištěný vztah můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

Tvrzení 2. *Reálné číslo $c \in \mathbb{R}$ je kořenem polynomu $p(x)$ právě tehdy, když je polynom $x - c$ dělitelem polynomu $p(x)$.*

Hornerovo schéma krok za krokem

Mějme nenulový polynom alespoň prvního stupně

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

a lineární polynom $q(x) = x - c$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom z rovnosti (1) plyne, že pro polynom $s(x)$ platí $\text{st}(s(x)) < n$, označme tedy

$$s(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

kde $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ (alespoň jedno nenulové).

Pro větší přehlednost budeme v dalším textu používat následující souhrnné značení:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Dosazením polynomů $p(x)$, $s(x)$ do rovnice (1) a následnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i x^i &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) \cdot (x - c) + R, \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x^i \cdot (x - c)) + R, \\ \sum_{i=0}^n a_i x^i &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x^{i+1} - b_i c x^i) + R. \end{aligned} \quad (2)$$

Poznámka 3. Dva polynomy

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n d_i x^i$$

jsou si rovny, právě když $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}: c_i = d_i$, tj. rovnají-li se koeficienty u stejných mocnin proměnné x .

Rozepsáním polynomů na obou stranách rovnosti (2) dostaneme

$$\begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ & = b_{n-1} x^n - b_{n-1} c x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-1} - b_{n-2} c x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-2} - \\ & \quad - b_{n-3} c x^{n-3} + \dots + b_1 x^2 - b_1 c x + b_0 x - b_0 c + R = \\ & = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1} c) x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2} c) x^{n-2} + \dots + \\ & \quad + (b_1 - b_2 c) x^2 + (b_0 - b_1 c) x + (R - b_0 c). \end{aligned}$$

Dle poznámky 3 jsou si polynomy rovny, rovnají-li se koeficienty u stejných mocnin x , tj. pokud zároveň platí

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ a_i = b_{i-1} - b_i c, \quad i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ a_0 = R - b_0 c. \end{cases} \quad (3)$$

Jelikož je polynom $p(x)$ zadán, jsou jeho koeficienty a_i pro $i = 0, 1, \dots, n$ známy. V soustavě rovnic (3), kde vystupují jako neznámé koeficienty polynomu $s(x)$, tedy b_i pro $i = 0, 1, \dots, n-1$, a konstanta R , lze tyto neznámé jednoznačně vyjádřit právě pomocí známých koeficientů polynomu $p(x)$. Celkem tedy pracujeme s $n+1$ rovnicemi o $n+1$ neznámých.

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1} c, \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2} c, \\ &\dots \\ b_1 &= a_2 + b_2 c, \\ b_0 &= a_1 + b_1 c, \\ R &= a_0 + b_0 c. \end{aligned}$$

Získané rovnice nyní přehledně uspořádáme do tabulky, kterou budeme v průběhu algoritmu postupně doplňovat. Výslednou strukturu označujeme jako *Hornerovo schéma*.

Začneme tím, že do prvního řádku Hornerova schématu zapíšeme koeficienty polynomu $p(x)$ a do druhého řádku prvního sloupce hodnotu c (viz tabulka 1).

Tabulka 1: Hornerovo schéma – část 1

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
c							

Na základě rovnosti $b_{n-1} = a_n$ doplníme první hodnotu do tabulky. Následně využijeme také vztah $b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot c$, který odpovídá druhému kroku algoritmu (viz tabulka 2).

Tabulka 2: Hornerovo schéma – část 2

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	$\underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} \cdot c}_{b_{n-2}}$					

Stejným postupem lze následně doplnit i zbývající část tabulky (viz tabulka 3 a 4).

Tabulka 3: Hornerovo schéma – část 3

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	$\underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} \cdot c}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{a_{n-2} + b_{n-2} \cdot c}_{b_{n-3}}$	$\dots$			

Tabulka 4: Hornerovo schéma – úplné

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	$\underbrace{a_0 + b_0 c}_R$

Jak nyní interpretovat získané Hornerovo schéma? Hodnotu R můžeme interpretovat dvěma způsoby.

- (i) Je-li $R = 0$, znamená to, že číslo c je kořenem polynomu $p(x)$, a tedy že polynom $p(x)$ je dělitelný polynomem $x - c$ beze zbytku (viz tvrzení 2), tj.

$$p(x) : (x - c) = s(x).$$

- (ii) V případě, že $R \neq 0$, číslo c není kořenem polynomu $p(x)$ a polynom $x - c$ tedy není jeho dělitelem. Výsledkem dělení je v tomto případě neúplný podíl se zbytkem R .

Jaký má tedy situace (ii) pro nás význam a co nám říká nenulová hodnota R ?

Hornerovo schéma z jiného úhlu pohledu

Opět uvažujme nenulový polynom n -tého stupně

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Polynom $p(x)$ můžeme vytýkáním proměnné x z vnořených polynomů (obsahujících proměnnou x) upravit na následující tvar.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \\ &= (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1) x + a_0 = \\ &= \left((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2) x + a_1 \right) x + a_0 = \\ &= \left(\left((a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \dots + a_3) x + a_2 \right) x + a_1 \right) x + a_0 = \\ &\dots \\ &= \left(\left(\dots \left((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2} \right) x + \dots + a_2 \right) x + a_1 \right) x + a_0. \end{aligned}$$

Pokud bychom nyní chtěli určit hodnotu polynomu $p(x)$ v bodě $c \in \mathbb{R}$, postupovali bychom následovně.

Nejprve určíme hodnotu nejvíce vnořené části výrazu v bodě c , tedy $a_n c + a_{n-1}$. Tento výraz přesně odpovídá hodnotě b_{n-2} z předešlé kapitoly, neboť $a_n = b_{n-1}$.

Následně pomocí rovnosti $b_{n-2} = a_{n-1} + a_n c$ spočteme další část výrazu:

$$(a_{n-1} + a_n c) c + a_{n-2} = b_{n-2} c + a_{n-2} = b_{n-3}.$$

Takto pokračujeme dále, dokud nedojdeme k poslednímu kroku, v němž získáme $b_0 c + a_0 = R$. Celkem tedy hodnota polynomu $p(x)$ v bodě $x = c$ je

$$p(c) = \left(\left(\overbrace{\left(\dots \left(\underbrace{(a_n c + a_{n-1})}_{b_{n-2}} c + a_{n-2} \right) \dots a_2 \right)}^{b_1} c + a_1 \right) \right)^{b_0} c + a_0 = R.$$

Nenulová hodnota R v Hornerově schématu (viz tabulka 4) proto představuje hodnotu polynomu $p(x)$ v bodě $x = c$.

Historické okénko ([4, 5]). Hornerovo schéma, pojmenované po britském matematikovi Williamu Georgeovi Hornerovi (1786–1837), bylo předloženo 1. července 1819 Královské společnosti (angl. *Royal Society*) a téhož roku publikováno v časopise *Philosophical Transactions of the Royal Society* (viz [4]).

Přestože je dnes tato metoda spojována především s Hornerovým jménem, její princip byl znám již mnohem dříve. Přibližně pět set let před Hornerem ji již popsal čínský matematik Chu Shih Chieh. Horner tak tuto techniku nezávisle znovuobjevil a rozvinul v evropském matematickém prostředí. Ve druhé polovině 19. století se Hornerovo schéma stalo běžnou součástí algebraické literatury. Nemalý podíl na jeho rozšíření měl britský matematik Augustus De Morgan, jenž se Hornerovým schématem zabýval ve svých článcích a významně přispěl k jeho popularizaci.

Hornerovo schéma v praxi

Za účelem názorné demonstrace praktického využití Hornerova schématu se nyní zaměříme na příklady, v nichž tento algoritmus slouží k řešení úloh rozmanitého charakteru.

Příklad 1. Vydělte polynom $p(x) = 2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8$ polynomem $q(x) = x - 2$.

Řešení. Sestavíme Hornerovo schéma, které nám umožní efektivně provést dělení polynomu lineárním polynomem. Protože dělíme výrazem $x - 2$, budeme v Hornerově schématu pracovat s číslem $c = 2$. První řádek tabulky vyplníme koeficienty polynomu $p(x)$ podle mocnin proměnné x a poté aplikujeme jednotlivé kroky algoritmu.

c	2	-7	13	-9	-14	8
2	2	$2 \cdot 2 - 7 = -3$	$2 \cdot (-3) + 13 = 7$	5	-4	0

Jelikož $R = 0$, jedná se o dělení beze zbytku a získaný podíl je úplný. Hodnoty vypočtené v jednotlivých sloupcích určují koeficienty výsledného polynomu a výsledný polynom vzniklý dělením polynomu lineárním polynomem má navíc stupeň o jedna nižší. Platí proto

$$(2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x - 2) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 4.$$

Příklad 2. Určete $(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) : (x - 2)$.

Řešení. Sestavíme Hornerovo schéma jako v předchozím příkladu.

c	1	-4	2	4	1
2	1	-2	-2	0	1

V této situaci je $R = 1$, jedná se o neúplný podíl se zbytkem. Celkem

$$(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1) : (x - 2) = x^3 - 2x^2 - 2x + \frac{1}{x - 2}.$$

Uveďme ještě jeden příklad, jenž ukáže, na co si při dělení polynomu lineárním polynomem pomocí Hornerova schématu dát pozor.

Příklad 3. Vydělte polynom $x^3 - 2x + 1$ polynomem $x - 1$.

Řešení. Při sestavování Hornerova schématu je třeba doplnit *chybějící* kvadratický člen kvadratickým členem s nulovým koeficientem, tedy chceme určit

$$(x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (x - 1).$$

Hornerovo schéma vypadá následovně:

c	1	0	-2	1
1	1	1	-1	0

Číslo $c = 1$ je dokonce kořenem polynomu $x^3 - 2x + 1$. Celkem platí

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = x^2 + x - 1.$$

Příklad 4. Rozložte polynom

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$$

na součin polynomů nerozložitelných nad $\mathbb{R}$.

Než přistoupíme k samotnému řešení, je vhodné nejprve zvážit, která čísla by mohla být kořeny daného polynomu. Ačkoli lze hodnoty zkoušet metodou *pokus-omyl*, existuje šikovné kritérium existence racionálních kořenů, které poskytuje systematictější výchozí bod a usnadňuje hledání kandidátů na kořeny.

Tvrzení 3 (Kritérium existence racionálního kořene [3, str. 45]). ⁴⁾
Jestliže má polynom s celočíselnými koeficienty

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kořen $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (předpokládejme r, s nesoudělná) a $a_n \neq 0$, pak $r \mid a_0$ a $s \mid a_n$, kde symbol $\mid$ značí relaci „být dělitelem“.

Řešení příkladu 4. Za předpokladu, že polynom $f(x)$ má kořen ve tvaru $\frac{r}{s}$, kde $\text{NSD}(r, s) = 1^{5)}$, pak podle tvrzení 3 platí $r \mid 6$ a $s \mid 1$. Kandidáti na kořeny tedy jsou

$$\frac{r}{s} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Pomocí Hornerova schématu ověříme, zda-li jsou podezřelá čísla kořenem polynomu. Jestliže bude nějaké číslo kořenem, pracujeme již s nově vzniklým polynomem, který dostaneme po vydělení daného polynomu polynomem $x - c$, kde c je kořen polynomu $f(x)$.

c	1	-4	2	2	1	6	✓ / ✗
1	1	-3	-1	1	2	8	✗
-1	1	-5	7	-5	6	0	✓
2	1	-3	1	-3	0	0	✓
3	1	0	1	0	0	0	✓

⁴⁾Důkaz tvrzení 3 lze nalézt v [3, str. 45, tvrzení 8.5].

⁵⁾ $\text{NSD}(a, b)$ značí největší společný dělitel dvou čísel a, b .

Jelikož jsme ve třetím řádku Hornerova schématu obdrželi nulový zbytek pro $c = -1$, vyplývá z toho, že $f(x)$ je dělitelný výrazem $x + 1$ a lze jej zapsat jako $f(x) = s(x)(x + 1)$.

Pro ověření dalších kandidátů jsme dále pracovali pouze s polynomm $s(x)$ (jehož koeficienty odpovídají právě hodnotám ve třetím řádku). Tuto myšlenku jsme použili i v následujících krocích pro určení dalších kořenů.

Polynom $x^2 + 1$ z pátého řádku Hornerova schématu je již nerozložitelný nad $\mathbb{R}$. Celkem tak dostáváme

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1).$$

Příklad 5. Určete hodnoty polynomu $p(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3$ pro $x \in \{-3; \frac{3}{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.

Řešení. Všechny požadované hodnoty polynomu určíme pomocí Hornerova schématu, přičemž v každém případě využijeme stejnou tabulku.

x	1	0	-2	1	0	-3
-3	1	-3	7	-20	60	-183
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{33}{16}$	$\frac{3}{32}$
$1 + \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$1 + 2\sqrt{2}$	$6 + 3\sqrt{2}$	$12 + 9\sqrt{2}$	$27 + 21\sqrt{2}$

Dostáváme tak $p(-3) = -183$, $p(\frac{3}{2}) = \frac{3}{32}$ a $p(1 + \sqrt{2}) = 27 + 21\sqrt{2}$.

Příklad 6. Určete číslo $a \in \mathbb{R}$ tak, aby číslo 2 bylo kořenem polynomu

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 6.$$

Řešení. Opět pomocí Hornerova schématu.

c	1	2	$-a$	6
2	1	4	$8 - a$	$22 - 2a$

Požadujeme, aby číslo $c = 2$ bylo kořenem, tj. chceme $R = 0$, kde z posledního řádku $R = 22 - 2a$. Tedy

$$22 - 2a \stackrel{!}{=} 0 \iff a = 11.$$

Číslo 2 je kořenem polynomu $p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 6$.

Závěr

Na závěr několik úloh čtenáři k samostatnému řešení (zadání jsou převzata z [6, str. 24] a [7, kap. 1.2]).

Úloha 1. Určete hodnoty polynomu

$$g(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$$

pro $x \in \{-\sqrt{3}; -\frac{3}{2}; 2\}$.

$$[g(-\sqrt{3}) = 6 - \frac{5}{6}\sqrt{3}; g(-\frac{3}{2}) = \frac{21}{16}; g(2) = 14]$$

Úloha 2. Určete hodnoty následujících polynomů v bodech 0, 1, -1, -2, 3:

$$(a) \quad p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3; \quad [3, 5, 5, 5, 45]$$

$$(b) \quad q(x) = x^4 - 2x^2 + x - 4; \quad [-4, -4, -6, 2, 62]$$

$$(c) \quad r(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 2. \quad [-2, -2, -2, -14, 166]$$

Úloha 3. Nalezněte kořeny polynomů a proveďte jejich rozklad na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad x^3 - 2x^2 - x + 2; \quad [(x-1)(x+1)(x-2)]$$

$$(b) \quad x^3 + 2x^2 - x - 2; \quad [(x-1)(x+1)(x+2)]$$

$$(c) \quad x^3 + 3x^2 - 4x - 12; \quad [(x-2)(x+2)(x+3)]$$

$$(d) \quad x^3 - 3x + 2. \quad [(x-1)^2(x+2)]$$

Úloha 4. Vydělte polynomy:

$$(a) \quad (2x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 14x + 8) : (x-2); \quad [2x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 5x - 4]$$

$$(b) \quad (3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 7) : (x+1); \quad [3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7]$$

$$(c) \quad (x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 22x + 21) : (x-3). \quad [x^5 - 3x^4 - 6x^3 + x^2 + 5x - 7]$$

Literatura

- [1] Bušek, I., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky*. 3. upravené vydání, Praha, Prometheus, 2006.
- [2] Podhajská, K.: *Webová aplikace pro výuku algebraických rovnic vyšších stupňů na střední škole*. Katedra didaktiky matematiky MFF UK, Praha, 2012. [on-line]. [cit. 2025-05-31]. Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/kristyna_podhajska_bp/rovnice/?page=title.
- [3] Stanovský, D.: *Učební text – Algebra 2021/2022*. Katedra algebry MFF UK, Praha, 2021. [on-line]. [cit. 2025-05-31]. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/vyuka/2122/algebra22.pdf>.
- [4] Horner, W. G.: XXI. A new method of solving numerical equations of all orders, by continuous approximation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, roč. 109 (1819), s. 308–335. Dostupné z: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1819.0023>.
- [5] Wikipedie: *Otevřená encyklopedie: William George Horner*. [on-line]. [cit. 2025-05-31]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Horner.
- [6] Novotná, J., Trch, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 2. část – Polynomická algebra*. 2. vydání, PedF UK, Praha, 2000.
- [7] VŠB–TU Ostrava: *Matematika I*. [on-line]. [cit. 2025-05-31]. Dostupné z: https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/22_MI_KAPI_1_2.pdf