

Rozhledy matematicko-fyzikální

Ľubomíra Dvořáková; Milena Svobodová
Wythoffova hra aneb zraněná dáma

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 1, 2–14

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153135>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Wythoffova hra aneb zraněná dáma

Lubomíra Dvořáková, Milena Svobodová, FJFI ČVUT v Praze

a tvůrčí tým¹⁾ *Wojciech Bureš, Monika Drexlerová, Vojtěch Lorenc,
Maximilián L. Skuda, Vladimír Tureček*

Abstrakt. Wythoffova hra je klasická kombinatorická hra a lze ji interpretovat také jako tzv. zraněnou dámu na nekonečné šachovnici. V článku popíšeme prohrávající a vyhrávající pozice třemi způsoby: pomocí rekurentní posloupnosti, pomocí zápisu čísel ve Fibonacciho soustavě a pomocí slavného iracionálního čísla – zlatého řezu. Naučíme se samozřejmě také vyhrávající strategii, která právě s prohrávajícími a vyhrávajícími pozicemi souvisí.

Pravidla Wythoffovy hry

Wythoffova hra pochází pravděpodobně z Číny, ale jméno nese po holandském matematikovi Willemu Abrahamu Wythoffovi, který v roce 1907 zveřejnil kompletní analýzu hry [4].

Wythoffova hra je kombinatorická hra pro dva hráče, která spočívá v odebrání prvků ze dvou disjunktních množin (reprezentovaných např. hromádkami herních kamenů či žetonů, krabičkami sirek nebo v našem případě pro jednoduchost pouze dvěma čísly).

Odebírání se řídí přesně danými pravidly. Hráči se střídají a vždy provedou právě jeden z povolených tahů. Vítězem hry je ten hráč, který udělá poslední tah (tedy odebere poslední žeton), resp. poraženým je ten hráč, jenž nemůže táhnout (obě množiny jsou prázdné, tj. hráč je na tahu z pozice $(0, 0)$).

Povolené tahy:

- Hráč může vzít libovolný nenulový počet prvků z jedné množiny.
- Hráč může vzít libovolný nenulový počet prvků z druhé množiny.
- Hráč může odebrat prvky z obou množin najednou, ale v takovém případě musí z obou odebrat stejný nenulový počet.

¹⁾ Středoškolští studenti, kteří pracovali na stejnojmenném projektu v rámci Týdne vědy na Jaderce v červnu 2024 a svými reakcemi a dobrými nápady ovlivnili výslednou podobu článku.

Příklad 1. Ilustrujme si možný průběh hry. Začíná Šárka, přičemž počáteční počty žetonů na hromádkách jsou 27 a 32.

- $(27, 32) \rightarrow (8, 13)$ Šárka odebere z obou hromádek 19 žetonů.
- $(8, 13) \rightarrow (8, 10)$ Ctirad odebere 3 žetony z druhé hromádky.
- $(8, 10) \rightarrow (3, 5)$ Šárka vezme 5 žetonů z obou hromádek.
- $(3, 5) \rightarrow (2, 4)$ Ctirad bere jeden žeton z každé hromádky.
- $(2, 4) \rightarrow (2, 1)$ Šárka vezme 3 žetony z druhé hromádky.
- $(2, 1) \rightarrow (1, 1)$ Ctirad bere jeden žeton z první hromádky.
- $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ Šárka vítězí odebráním posledních žetonů.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvaných prohrávajících pozicích, zatímco my chceme vždy táhnout z pozic vyhrávajících. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet žetonů na hromádkách) jsou definovány rekursivně následujícím způsobem.

- (i) $(0, 0)$ je prohrávající.
- (ii) $(x, y) \neq (0, 0)$ je *vyhrávající*, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
- (iii) $(x, y) \neq (0, 0)$ je *prohrávající*, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Je snadné si rozmyslet, že každá pozice je buď vyhrávající, nebo prohrávající. Také je ze symetrie povolených tahů zřejmé, že (x, y) je prohrávající, právě když (y, x) je prohrávající. Množinu prohrávajících pozic označíme P , vyhrávajících pozic V ²⁾. Předchozí tvrzení tedy můžeme matematicky zapsat jako³⁾:

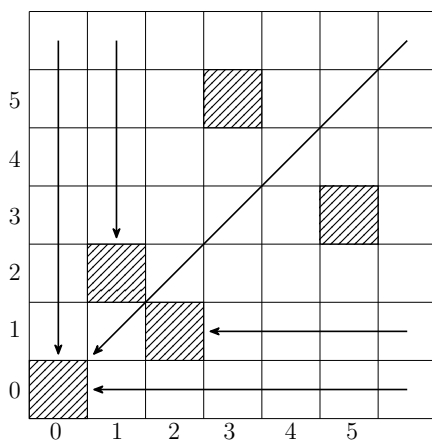
$$P \cup V = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \quad \wedge \quad P \cap V = \emptyset \quad \wedge \quad (x, y) \in P \Leftrightarrow (y, x) \in P.$$

Příklad 2. Pozice $(0, 0)$ je prohrávající. Z každé pozice tvaru $(x, 0)$, $(0, y)$ a (x, x) , kde x, y jsou přirozená čísla, existuje tah do $(0, 0)$ odebráním žetonů z první, resp. druhé hromádky, resp. obou hromádek. Na

²⁾Většina zdrojů používá značení $\mathcal{P}$ (previous) a $\mathcal{N}$ (next), přičemž $P = \mathcal{P}$ a $V = \mathcal{N}$ [3].

³⁾ $\mathbb{N}$ značí množinu přirozených čísel a $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

obrázku 1 to znamená, že spodní řádek, levý sloupec a úhlopříčka bez pozice $(0, 0)$ obsahují samé vyhrávající pozice. Odhalili jsme prohrávající pozice $(1, 2)$ a $(2, 1)$, protože každý tah z nich vede do pozice, o které již víme, že je vyhrávající. Nyní opět můžeme říci, že pozice ve stejném řádku vpravo od $(1, 2)$, resp. $(2, 1)$, ve stejném sloupci nahoru od $(1, 2)$, resp. $(2, 1)$ a na stejné úhlopříčce vpravo nahoru od $(1, 2)$, resp. $(2, 1)$ jsou vyhrávající pozice. Odkryli jsme tak další prohrávající pozice $(3, 5)$ a $(5, 3)$. Podobným způsobem si můžeme pro libovolné přirozené číslo N konstruovat všechny prohrávající a vyhrávající pozice (x, y) splňující $x \leq N, y \leq N$. Pár prvních prohrávajících pozic je v tabulce 1.



Obr. 1: Prohrávající (šrafované) a vyhrávající (bílé) pozice

x	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
y	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Tabulka 1: Prohrávající pozice (x, y) , kde $x \leq y$ a $x \leq 27$

Zraněná dáma

Alternativní reprezentací Wythoffovy hry je dáma na nekonečné šachovnici $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ⁴⁾, také známá jako zraněná dáma. Dáma se umístí kamkoliv na šachovnici a poté se hráči střídají v tazích: posun doleva

⁴⁾ Políčka šachovnice jsou popsána nezápornými celými čísly, lze si ji představovat jako první kvadrant v rovině, viz obrázek 1.

(odpovídá odebrání žetonů z první hromádky), posun dolů (odebrání žetonů z druhé hromádky), posun po úhlopříčce doleva dolů (odebrání stejného počtu žetonů z obou hromádek). Vítězí hráč, který dostane dámu do rohu šachovnice, tedy na pozici $(0, 0)$. Dáma je zraněná, protože se pohybuje pouze třemi z obvyklých osmi směrů.

Rekurentní posloupnost

Již v kapitole o prohrávajících a vyhrávajících pozicích jsme si ukázali, že umíme takové pozice rekurzivně konstruovat. Abychom byli schopni vyhrávat ve Wythoffově hře, musíme se naučit tahy z vyhrávajících do prohrávajících pozic. Právě to a také jednodušší popis prohrávajících pozic si nyní ukážeme.

Věta 1. ([4]) *Množina prohrávajících pozic ve Wythoffově hře má tvar $P = \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, kde*

- $a_0 = b_0 = 0$,
- a_n pro $n \geq 1$ je nejmenší ještě nepoužité přirozené číslo (tj. nevyskytuje se mezi čísly a_k, b_k pro $k < n$),
- $b_n = a_n + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44

Tabulka 2: Hodnoty a_n a b_n pro $n \leq 17$

Než se pustíme do důkazu věty 1, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 1. Dokažte, že stejné posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ jako ve větě 1 vzniknou, když požadujeme splnění podmínek:

1. $a_0 = b_0 = 0$.
2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, tj. $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
3. $b_n = a_n + n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

4. Pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = a_n$, nebo $x = b_n$. Zapsáno formálně:

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Důkaz věty 1. Označíme $A = \{(a_n, b_n), (b_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Pro důkaz, že $A = P$, stačí ověřit, že A splňuje rekurzivní definici prohrávajících pozic:

- (i) $(0, 0) \in A$.
- (ii) Pokud $(x, y) \notin A$, pak existuje tah z (x, y) do A .
- (iii) Pokud $(x, y) \in A$, $(x, y) \neq (0, 0)$, pak všechny tahy z (x, y) vedou mimo A .

Ověřme to tedy:

- (i) $(0, 0) \in A$, protože $a_0 = b_0 = 0$.
- (ii) Pokud $(x, y) \notin A$, pak buď $x = y$ a zmenšením obou složek o x dostaneme $(0, 0) \in A$, nebo můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat, že $x < y$. Máme následující možnosti:
 - $x = b_n, y > x > a_n$: Zmenšíme y o $y - a_n$ a dostaneme dvojici $(x, y') = (b_n, a_n) \in A$.
 - $x = a_n, y > b_n$: Zmenšíme y o $y - b_n$ a dostaneme dvojici $(x, y') = (a_n, b_n) \in A$.
 - $x = a_n, y < b_n$: Zmenšíme x i y o $a_n - a_k$, kde $k = y - x < n = b_n - a_n$, a dostaneme dvojici $(x', y') = (a_k, b_k) \in A$. Platí totiž $x - (a_n - a_k) = a_n - (a_n - a_k) = a_k$ a $y - (a_n - a_k) = (y - x) + a_k = k + a_k = b_k$.
- (iii) Nechť $(x, y) \in A$, $(x, y) \neq (0, 0)$, a bez újmy na obecnosti $x = a_n$, $y = b_n$. Když zmenšíme x , jsme v pozici (x', b_n) , kde $x' < a_n$. Podle bodu 4 z úkolu 1 je b_n členem prohrávající pozice jedině ve dvojici s a_n , tudíž $(x', b_n) \notin A$. Podobně když zmenšíme y , dostaneme ze stejného důvodu pozici (a_n, y') mimo A . Pokud zmenšíme x i y o stejnou hodnotu, pořád platí $x' < y'$. Jediná možnost, aby (x', y') bylo v A , je $x' = a_k, y' = b_k$ pro nějaké $k < n$. Jelikož $y' - x' = n$ a $b_k - a_k = k$, taková situace nenastává a i v tomto případě nepatří (x', y') do A .

Výherní strategie

Shrňme výherní strategii, kterou jsme se naučili v důkazu věty 1:

- Máme-li si vybrat, jestli chceme začít, zkontrolujeme, zda počáteční pozice (x, y) je vyhrávající. To uděláme tak, že si napočítáme dostatek členů posloupností $(a_n), (b_n)$ a ověříme, že $(x, y) \neq (a_n, b_n)$ a $(x, y) \neq (b_n, a_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
- Pokud je pozice prohrávající, necháme začít soupeře. Ten ať táhne jakkoliv, vyrobí pozici vyhrávající.
- Pokud (x, y) je vyhrávající, použijeme následující tah. Bez újmy na obecnosti uvažujeme $x \leq y$. Pokud je $x \geq y$, tak si hromádky přejmenujeme :)

- Pro $x = y$ odebereme z obou hromádek x žetonů a dostaneme pozici $(0, 0)$, čímž jsme vyhráli.
- Pro $x < y$ a $x = b_n$ zmenšíme y o $y - a_n$ a dostaneme pozici (b_n, a_n) .
- Pro $x < y$ a $x = a_n < b_n < y$ zmenšíme y o $y - b_n$ a dostaneme pozici (a_n, b_n) .
- Pro $x < y$ a $x = a_n < y < b_n$ spočítáme $k = y - x$ a zmenšíme x i y o $a_n - a_k$ a dostaneme pozici (a_k, b_k) .

Poznámka 1. Ve Wythoffově hře s dost velkým počtem kamenů není laikovi až na speciální případy jasné, jak táhnout. Jelikož je prohrávajících pozic mnohem méně než vyhrávajících, je pravděpodobné, že soupeř neznalý strategie bude hrát i z vyhrávající pozice opět do vyhrávající. Z té my už pak umíme vyhrát podle výše popsané strategie. Takže hrajeme-li s laikem, není velký problém, když si nemůžeme určit, kdo začíná.

Příklad 3. Vraťme se k příkladu 1 a ukažme, že Šárka správně používala výherní strategii. Podle tabulky 2 je pozice $(x, y) = (27, 32)$ vyhrávající, proto si Šárka vybrala, že začne.

$$(27, 32) \rightarrow (8, 13) \quad x = 27 = a_{17} < y = 32 < b_{17} = 44:$$

Šárka spočítá $y - x = 5$ a odebere

$$a_{17} - a_5 = 27 - 8 = 19 \text{ žetonů z obou hromádek.}$$

$$(8, 13) \rightarrow (8, 10) \quad \text{ Ctirad odebere 3 žetony z druhé hromádky.}$$

- (8, 10) $\rightarrow$ (3, 5) $x = 8 = a_5 < y = 10 < b_5 = 13$:
Šárka spočítá $y - x = 2$ a vezme
 $a_5 - a_2 = 8 - 3 = 5$ žetonů z obou hromádek.
- (3, 5) $\rightarrow$ (2, 4) Ctírad bere po jednom žetonu z každé hromádky.
- (2, 4) $\rightarrow$ (2, 1) $x = 2 = b_1$:
Šárka si vezme $y - a_1 = 4 - 1 = 3$ žetony
z druhé hromádky.
- (2, 1) $\rightarrow$ (1, 1) Ctírad odebere jeden žeton z první hromádky.
- (1, 1) $\rightarrow$ (0, 0) Šárka vítězí odebráním posledních žetonů.

Zápis čísel ve Fibonacciho soustavě

Definice 1. Fibonacciho čísla jsou členy posloupnosti splňující rekurentní vztah $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Za počáteční členy zvolíme čísla $f_1 = 2$ a $f_0 = 1$.⁵⁾

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tabulka 4: Fibonacciho čísla f_n pro $n \leq 10$

Posloupnost Fibonacciho čísel spolu s ciframi 0 a 1 tvoří tzv. Fibonacciho (číselnou) soustavu, která slouží k reprezentaci přirozených čísel – podobně jako dobře známá desítková soustava. Zatímco v desítkové soustavě jsou cifry 0, 1, ..., 9 a posloupnost $(10^n)_{n=0}^\infty$, ve Fibonacciho soustavě jsou cifry 0, 1 a posloupnost $(f_n)_{n=0}^\infty$.

Věta 2. Každé $N \in \mathbb{N}$ lze zapsat ve Fibonacciho soustavě pomocí cifr 0 a 1, tj. ve tvaru

$$N = a_n f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \cdots + a_1 f_1 + a_0 f_0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1\}$, $a_n = 1$.

Platnost věty zaručuje tzv. hladový rozvoj. Pro číslo N se získá tak, že vždy najdeme největší Fibonacciho číslo f_n , které je menší nebo rovno

⁵⁾Počáteční podmínky jsou většinou definovány jako $f_1 = 1$ a $f_0 = 0$. Pro práci se zápisem přirozených čísel ve Fibonacciho soustavě musíme však definovat podmínky tak, jak jsme to učinili, aby posloupnost $(f_n)_{n=0}^\infty$ byla ostře rostoucí.

danému N . Spočítáme zbytek $N - f_n$ a se zbytkem postupujeme stejně. Například

$$66 = 55 + 11 = 55 + 8 + 3 = f_8 + f_4 + f_2.$$

Posloupnost cifer v hladovém rozvoji značíme $66_F = (100010100)$.

Hladový rozvoj neobsahuje cifru 2 nebo vyšší, což plyne z faktu, že $2f_n > f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, a neobsahuje po sobě jdoucí jedničky, protože $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$.

Aby se čtenáři seznámili blíže s hladovým rozvojem, máme pro ně dva úkoly.

Úkol 2. Dokažte, že zápis přirozeného čísla ve Fibonacciho soustavě je hladový, právě když cifry v zápisu jsou pouze 0 a 1 a neobsahuje po sobě jdoucí jedničky.

Příklad 4. $66 = f_8 + f_4 + f_2 = 3f_6 + f_2 = f_7 + f_6 + f_4 + f_2$, první zápis je hladový rozvoj, další dva zápisy nikoliv.

Úkol 3. Dokažte platnost následujícího tvrzení. Necht' M, N jsou přirozená čísla. Pak $M < N$, právě když M_F má buď méně cifer než N_F , nebo mají stejně cifer a M_F je lexikograficky menší než N_F , tj. na prvním místě zleva, kde se rozvoje liší, je 0 v M_F a 1 v N_F .

Příklad 5. Uvažujme čísla 71, 66, 33 a jejich hladové rozvoje ve Fibonacciho soustavě:

$$71_F = (100100100), \quad 66_F = (100010100), \quad 33_F = (1010101).$$

Čísla 71 a 66 mají po devíti cifrách a skutečně 71_F je lexikograficky větší než 66_F , což odpovídá faktu, že $71 > 66$. Dále počet cifer 33_F je $7 < 9$, což je v souladu s tím, že $33 < 66$ a $33 < 71$.

Nyní si ukážeme zajímavou souvislost mezi prohrávajícími pozicemi ve Wythoffově hře a hladovými rozvoji čísel ve Fibonacciho soustavě.

Věta 3. ([1]) Označme jako s_n n -té přirozené číslo (řazeno podle velikosti), jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí sudým počtem nul, a jako ℓ_n n -té přirozené číslo, jehož hladový rozvoj ve Fibonacciho soustavě končí lichým počtem nul. Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) z věty 1 platí, že $a_n = s_n$ a $b_n = \ell_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Než okomentujeme důkaz, máme pro čtenáře úkol.

Úkol 4. Dokažte, že pro posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$ z věty 3 platí:

- Hladový rozvoj ℓ_n vznikne vždy přidáním nuly na konec hladového rozvoje s_n .
- Posloupnost $(\ell_n - s_n)_{n=1}^{\infty}$ ostře roste.

Důkaz věty 3. V důkazu využijeme alternativního popisu posloupností (a_n) a (b_n) v úkolu 1. Stačí ukázat, že (s_n) a (ℓ_n) splňují podmínky 2., 3. a 4. Pak už nutně platí $a_n = s_n$ a $b_n = \ell_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Evidentně je splněna podmínka 2., jelikož (s_n) je podle definice ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Dále platí podmínka 4., protože každé přirozené číslo má na konci hladového rozvoje buď sudý počet nul, a je tedy rovno nějakému s_n , nebo lichý počet nul, a je tedy rovno nějakému ℓ_n . Zbývá pouze ověřit 3. podmínku, že $\ell_n - s_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z tabulky 5 je vidět platnost pro $n \leq 4$.

n	1	2	3	4
s_n	1: (1) = 1_F	3: (100) = 3_F	4: (101) = 4_F	6: (1001) = 6_F
ℓ_n	2: (10) = 2_F	5: (1000) = 5_F	7: (1010) = 7_F	10: (10010) = 10_F

Tabulka 5: Hodnoty s_n a ℓ_n pro $n \leq 4$

Uvažujme libovolné přirozené $n \geq 5$ a zkonstruuje s_k a ℓ_k tak, že $\ell_k - s_k = n$. Najdeme hladový rozvoj $(n-1)_F = (a_j \cdots a_1 a_0)$. Položíme

$$\begin{aligned} s &= a_j f_{j+1} + \cdots + a_1 f_2 + a_0 f_1 + 1, \\ \ell &= a_j f_{j+2} + \cdots + a_1 f_3 + a_0 f_2 + f_1. \end{aligned}$$

Pak platí:

- $\ell - s = a_j f_j + \cdots + a_1 f_1 + a_0 f_0 + 1 = n$, kde jsme využili rekurence $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ pro Fibonacciho čísla.
- s má zápis $(a_j \cdots a_1 a_0 1)$ ve Fibonacciho soustavě, který ovšem nemusí být hladový. Na hladový rozvoj ho ale snadno převedeme. Pokud zápis končí 11, tj. $a_0 = 1$, pak jistě $a_1 = 0$, protože posloupnost cifer $(a_j \cdots a_1 a_0)$ neobsahuje po sobě jdoucí jedničky. Původní zápis $(a_j \cdots a_1 a_0 1) = (a_j \cdots 011)$ a $(a_j \cdots 100)$ odpovídají stejnému číslu s , protože $f_1 + f_0 = f_2$. A oba mají sudý počet nul na konci. Nový zápis $(a_j \cdots 100)$ je buď hladový rozvoj čísla s , nebo je tvaru

$(a_j \cdots 01100)$, což opět přepíšeme na zápis $(a_j \cdots 10000)$ odpovídající stejné hodnotě s mající sudý počet nul na konci. Analogicky postupujeme dále, až dostaneme hladový rozvoj čísla s , který má sudý počet nul na konci, tudíž $s = s_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Přidáním nuly na konec hladového rozvoje s dostaneme hladový rozvoj ℓ , proto $\ell = \ell_k$. Zbývá si uvědomit, že podle 2. bodu úkolu 4 je jasné, že $k = n$, tj. $n = \ell_n - s_n$.

Poznámka 2. Výherní strategii ve Wythoffově hře z kapitoly Rekurentní posloupnost můžeme využívat, aniž bychom museli vyrábět dostatečný počet členů posloupností (a_n) a (b_n) . Když budeme pracovat s definicí (s_n) a (ℓ_n) , pak je třeba umět počítat hladové rozvoje, k čemuž stačí znát dostatečné množství Fibonacciho čísel. K použití výherní strategie potřebujeme:

- Umět rozhodnout, zda je daná pozice (x, y) , kde $x < y$, prohrávající, tedy zda platí $(x, y) = (s_n, \ell_n)$ pro nějaké n . To se snadno vyčte z hladového rozvoje x a y ve Fibonacciho soustavě.
- Umět pro dané přirozené n spočítat s_n . To umíme z důkazu věty 3. Najdeme hladový rozvoj $(n - 1)_F = (a_j \cdots a_1 a_0)$. Pak položíme $s_n = a_j f_{j+1} + \cdots + a_1 f_2 + a_0 f_1 + 1$.

Příklad 6. Ukažme, jak první tah Šárky v příkladu 1 získat použitím hladového rozvoje. Pozice $(27, 32)$ je vyhrávající, protože $27_F = (1001001) = s_n$ pro nějaké n . Pak $\ell_{n_F} = (10010010)$, tedy $\ell_n = 44 > y$. Šárka si tedy spočítá $y - x = 5$ a určí s_5 . Podle 2. bodu poznámky 2 najdeme $4_F = 101$ a $s_5 = f_3 + f_1 + 1 = 8$. Poté z obou hromádek odebere $s_n - s_5 = 27 - 8 = 19$ žetonů.

Zlatý řez

Zlatý řez je slavné iracionální číslo $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$, které splňuje rovnost $\tau^2 = \tau + 1$. Hraje roli v mnoha oblastech matematiky a souvisí s Fibonacciho čísly, viz např. [2, 5].

V této části si ukážeme, jak popsat prohrávající pozice pomocí zlatého řezu a jak uplatnit vyhrávající strategii ve Wythoffově hře, aniž bychom dopředu napočítávali hodnoty posloupností (a_n) a (b_n) z věty 1 a aniž bychom museli znát Fibonacciho čísla. Bude nám tentokrát stačit dostatečně přesná kalkulačka.

Věta 4. (*[4]*) Pro posloupnosti (a_n) a (b_n) z věty 1 platí, že $a_n = \lfloor n\tau \rfloor$ a $b_n = \lfloor n\tau^2 \rfloor$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ ⁶⁾.

Než se pustíme do důkazu věty 4, vyslovíme šikovné lemma.

Lemma 1. Pro každé přirozené číslo x existuje přirozené číslo n takové, že $x = \lfloor n\tau \rfloor$ nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$.

Důkaz. Pro zadané $x \in \mathbb{N}$ porovnáme zlomkovou část x/τ , tj. číslo $\{x/\tau\} := x/\tau - \lfloor x/\tau \rfloor$, s číslem $1/\tau^2$.

- Nejprve vysvětlíme, že $\{x/\tau\} \neq 1/\tau^2$.

Dokažme tvrzení sporem. Předpokládejme, že pro nějaké $x \in \mathbb{N}$ rovnost platí:

$$\left\{ \frac{x}{\tau} \right\} = \frac{x}{\tau} - \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor = \frac{1}{\tau^2} = 1 - \frac{1}{\tau}.$$

Odtud vidíme, že

$$\frac{x+1}{\tau} = \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1.$$

Jelikož x i $\lfloor x/\tau \rfloor$ jsou celá čísla, získáváme

$$\tau = \frac{x+1}{\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1} \in \mathbb{Q},$$

což je spor s iracionalitou čísla τ .

- Pokud $\{x/\tau\} > 1/\tau^2$, položíme $n = \lfloor (x+1)/\tau \rfloor$. Pak platí $x = \lfloor n\tau \rfloor$. Dokažme toto tvrzení. Jelikož vzdálenost x/τ od dolní celé části je větší než $1/\tau^2$, tj.

$$\left\{ \frac{x}{\tau} \right\} = \frac{x}{\tau} - \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor > \frac{1}{\tau^2},$$

z rovnosti $1/\tau^2 + 1/\tau = 1$ plyne, že musí být vzdálenost x/τ od dolní celé části zvětšené o jedna menší než $1/\tau$, tj.

$$\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1 - \frac{x}{\tau} < \frac{1}{\tau}.$$

Proto

$$\frac{x}{\tau} < \left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1 < \frac{x+1}{\tau},$$

⁶⁾Dolní celá část $\lfloor x \rfloor$ z reálného čísla x je největší celé číslo $\leq x$.

tj. mezi x/τ a $(x+1)/\tau$ leží právě jedno celé číslo $n = \lfloor x/\tau \rfloor + 1$, které je zároveň samozřejmě rovno $\lfloor (x+1)/\tau \rfloor$. Nyní vynásobením zlatým řezem dostaneme nerovnost $x < n\tau < x+1$, tudíž $x = \lfloor n\tau \rfloor$.

- Pokud $\{x/\tau\} < 1/\tau^2$, položíme $n = \lfloor (x+1)/\tau^2 \rfloor$. Potom platí $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$. Důkaz tohoto tvrzení necháme jako úkol pro čtenáře.

Důkaz věty 3. V důkazu opět využijeme alternativního popisu posloupností (a_n) a (b_n) v úkolu 1. Je potřeba ověřit, že posloupnosti $(\lfloor n\tau \rfloor)$ a $(\lfloor n\tau^2 \rfloor)$ splňují podmínky 2., 3. a 4. Podmínka 2. je splněna, protože

$$\lfloor (n+1)\tau \rfloor \geq \lfloor n\tau + 1 \rfloor = \lfloor n\tau \rfloor + 1 > \lfloor n\tau \rfloor.$$

Také platí podmínka 3., jelikož

$$\lfloor n\tau^2 \rfloor - \lfloor n\tau \rfloor = \lfloor n(\tau + 1) \rfloor - \lfloor n\tau \rfloor = \lfloor n\tau \rfloor + n - \lfloor n\tau \rfloor = n.$$

Zbývá pouze dokázat 4. podmínku, že pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = \lfloor n\tau \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$.⁷⁾ Jak takové n najít víme z lemmatu 1. Ověříme tedy jednoznačnost.

Uvažujme libovolnou mez $K \in \mathbb{N}$. Pro důkaz jednoznačnosti spočítáme, kolik přirozených čísel tvaru $\lfloor n\tau \rfloor$, resp. $\lfloor n\tau^2 \rfloor$ je menších nebo rovných K . Nerovnost $\lfloor n\tau \rfloor \leq K$ nastává právě pro ta přirozená n , pro která platí $n\tau < K+1$. Tedy určíme všechna $n \in \mathbb{N}$ splňující $n < (K+1)/\tau$, a těch je $\lfloor (K+1)/\tau \rfloor$. Podobně počet přirozených čísel $\lfloor n\tau^2 \rfloor \leq K$ je $\lfloor (K+1)/\tau^2 \rfloor$. Sečtením získáme

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{K+1}{\tau} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{K+1}{\tau^2} \right\rfloor &= \frac{K+1}{\tau} - \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} + \frac{K+1}{\tau^2} - \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\} = \\ &= K+1 - \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} - \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\}. \end{aligned}$$

Využili jsme vztahu $1/\tau + 1/\tau^2 = 1$. Jelikož počítáme zlomkové části z iracionálních čísel, musí platit

$$0 < \left\{ \frac{K+1}{\tau} \right\} < 1 \quad \text{a} \quad 0 < \left\{ \frac{K+1}{\tau^2} \right\} < 1.$$

⁷⁾Dokonce platí obecnější tvrzení, říká se mu Beattyho věta: Pro libovolná iracionální kladná čísla α, β splňující $1/\alpha + 1/\beta = 1$ platí, že pro každé přirozené číslo x existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x = \lfloor n\alpha \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\beta \rfloor$. Snadno ověříme, že čísla $\alpha = \tau$ a $\beta = \tau^2$ předpoklady věty splňují.

Zároveň musí být $\{(K+1)/\tau\} + \{(K+1)/\tau^2\}$ rovno celému číslu 1, protože $K+1 - \{(K+1)/\tau\} - \{(K+1)/\tau^2\}$ je celé. Odtud plyne, že $K+1 - \{(K+1)/\tau\} - \{(K+1)/\tau^2\} = K$. Jelikož každé přirozené číslo $\leq K$ lze podle lemmatu 1 napsat ve tvaru $\lfloor n\tau \rfloor$ nebo $\lfloor n\tau^2 \rfloor$, jsou nutně všechna čísla $\lfloor n\tau \rfloor \leq K$ i $\lfloor n\tau^2 \rfloor \leq K$ vzájemně různá. Tudíž jde každé přirozené číslo $x \leq K$ zapsat jediným způsobem jako $x = \lfloor n\tau \rfloor$, nebo $x = \lfloor n\tau^2 \rfloor$. Mez K jsme volili libovolně, proto tvrzení platí pro libovolné přirozené x .

Příklad 7. Ukažme, jak první tah Šárky v příkladu 1 získat použitím zlatého řezu. Nejprve zjistíme, zda je pozice (27, 32) vyhrávající. Porovnáme $\{27/\tau\} \doteq 0,687 > 1/\tau^2 \doteq 0,382$. Podle důkazu lemmatu 1 položíme $n = \lfloor 28/\tau \rfloor = 17$. Pak platí $27 = \lfloor n\tau \rfloor = a_{17}$. Poté spočítáme $b_{17} = a_{17} + 17 = 44$. Dostáváme $y = 32 < 44$, tudíž pozice je vyhrávající. Podle výherní strategie spočítáme $y - x = 5$. Dále musíme vypočítat také $a_5 = \lfloor 5\tau \rfloor = 8$ a odebereme z obou hromádek $a_{17} - a_5 = 27 - 8 = 19$ žetonů.

Závěr

Wythoffova hra je zábavná, a jistě o to více, když zná hráč výherní strategii. Ale navíc je u ní velmi zajímavé, jak úzce souvisí s Fibonacciho soustavou a se zlatým řezem. Snad se tyto souvislosti líbily i vám, čtenářům. Pro ty z vás, které zaujaly úkoly, máme i pěkná témata pro další práci v rámci středoškolských projektů. Ozvěte se na email redakce, zkontrolujeme vaše řešení a můžete spolu s námi proniknout do dalších tajů Fibonacciho čísel a zlatého řezu.

Literatura

- [1] Fraenkel, A. S.: How to beat your Wythoff games' opponent on three fronts. *Amer. Math. Monthly*, roč. 89 (1982), s. 353–361.
- [2] Masáková, Z., Pelantová, E., Svobodová, M.: Rozklad množiny přirozených čísel pomocí zlatého řezu. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 78 (2001), č. 1, s. 8–15.
- [3] Vopravil, V.: Nestranné hry. *Učitel matematiky*, roč. 26 (2018), č. 2, s. 98–114.
- [4] Wythoff, W. A.: A modification of the game of Nim. *Nieuw Arch. Wisk*, roč. 7(1907), č. 2, s. 199–202.
- [5] Zdeborová, L.: Květ slunečnice a Fibonacciova čísla. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 82 (2007), č. 1, s. 1–10.