

Trik s Fibonacciho číslly

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 1, 31–34

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153138>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Trik s Fibonacciho čísly

V tomto čísle jsme představili Wythoffovu hru a ukázalo se, že vyhrávající a prohrávající pozice úzce souvisejí s Fibonacciho čísly. Pojďme si ukázat „kouzlo“, které je také založeno na vlastnostech Fibonacciho čísel a můžete jím uvést v úžas své kamarády.

- Připravte si kartičku s deseti sloupčky.
- Požádejte kamaráda, ať napíše do prvních dvou sloupců dvě čísla mezi 1 a 20.
- Do dalších sloupců ať kamarád vždy napíše součet předchozích dvou.
- Na závěr ať kamarád spočítá součet všech čísel na kartičce.
- Udivte kamaráda tím, že výsledek oznámíte okamžitě, bude totiž roven 11násobku čísla v 7. sloupci (a násobit 11 jde snadno). Taký rovnou oznamte, že podíl 10. a 9. řádku je 1,6 (s přesností na jedno desetinné místo).

Úloha zní: *Dokažte, že trik funguje. To jest, že vaše odpověď bude vždy správná bez ohledu na to, jaká čísla váš kamarád vybral.*

Příklad 1. Předpokládejme, že kamarád vybere čísla 7 a 12. Na kartičce pak bude napsáno:

7	12	19	31	50	81	131	212	343	555
---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Součet je $1441 = 11 \cdot 131$ a podíl $555/343 \doteq 1,6$.

Minule jsme zadávali úlohy související s kombinačními čísly a Pascalovým trojúhelníkem.

- *Dokažte, že v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku je počet lichých čísel roven $2^{s(n)}$, kde $s(n)$ je součet číslic v binárním zápisu čísla n .*

Již minule jsme uváděli větu z knihy [1], na které je určování parity kombinačních čísel založeno.

Věta 1. Pokud n je sudé a k je liché číslo, pak $\binom{n}{k}$ je sudé. Jinak platí¹⁾

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \pmod{2}.$$

Napovídali jsme, že se parita dobře počítá, když uvažujeme binární zápis čísel. Připomeňme, že binární zápis přirozeného čísla n je posloupnost $(a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0)$, kde číslice $a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d \in \{0, 1\}$, $a_d \neq 0$

$$n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0.$$

V binárním zápisu snadno nahlédneme, že platí pravidla:

1. Číslo n je sudé, právě když $a_0 = 0$.
2. $\lfloor n/2 \rfloor$ má binární zápis $(a_d a_{d-1} \dots a_1)$, tj. vypustí se poslední číslice ze zápisu n .

Příklad 2. Opakovaným využíváním věty 1 určíme paritu $\binom{70}{38}$:

$$\binom{70}{38} \equiv \binom{35}{19} \equiv \binom{17}{9} \equiv \binom{8}{4} \equiv \binom{4}{2} \equiv \binom{2}{1} \equiv 0 \pmod{2},$$

tedy $\binom{70}{38}$ je sudé číslo. Využijme v příkladu binární zápisy čísel (doplňené nulami na stejnou délku) a pravidla 1. a 2.

$$\begin{pmatrix} 1000110 \\ 0100110 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 100011 \\ 010011 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10001 \\ 01001 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

kde jsme využili, že $\binom{\text{sudé}}{\text{liché}}$ je sudé číslo.

Z příkladu můžeme odvodit obecné pravidlo. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je sudé, právě když se v průběhu určování parity podle věty 1 objeví situace $\binom{\text{sudé}}{\text{liché}}$ neboli právě když se v binárním zápisu k objeví nějaká jednička na stejné pozici jako nula v binárním zápisu n .

Uvažujme opět číslo 70 s binárním zápisem (1000110). Pak $\binom{n}{k}$ je liché, právě když má k binární zápis (doplňený eventuálně nulami na délku zápisu n) $(x000yz0)$, kde $x, y, z \in \{0, 1\}$. Takových čísel je $2^3 = 8$.

Odtud již plyne dokazované tvrzení. Když zapíšeme číslo řádku n Pascalova trojúhelníku v binárním zápisu, pak $\binom{n}{k}$ je liché, právě když má binární zápis k (doplňený eventuálně nulami na délku zápisu n) nulu

¹⁾Dolní celá část reálného čísla x se značí $\lfloor x \rfloor$ a je to největší celé číslo $\leq x$.

všude tam, kde byla nula v binárním zápisu n . Abychom dostali všechna lichá čísla $\binom{n}{k}$, budeme volit mezi nulou a jedničkou v binárním zápisu k na pozicích, kde byla jednička v binárním zápisu n . Protože počet jedniček v zápisu n je $s(n)$, máme $2^{s(n)}$ různých voleb a dostaneme opravdu $2^{s(n)}$ lichých čísel v n -tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Připomeňme další úlohy z minula. Pro libovolné přirozené číslo n označme jako $e(n)$ největší přirozené číslo takové, že $2^{e(n)}$ dělí n . Tedy pro $n = 2^r \cdot \ell$, kde ℓ je liché číslo, je $e(n) = r$. Například $112 = 2^4 \cdot 7$, tudíž $e(112) = 4$.

- Necht' $n \leq 2^j$. Dokažte, že $e(n!) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2^4} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{n}{2^j} \rfloor$.
- Najděte jednoduchý vztah mezi n , $s(n)$ a $e(n!)$.
- Vyjádřete $e\left(\binom{n}{k}\right)$ pomocí $s(n)$, $s(k)$ a $s(n-k)$.

Označme

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 2^m \cdot \ell, \quad \text{kde } \ell \text{ je liché.}$$

Pak každý násobek dvou $\leq n$ přispívá faktorem 2 do mocniny 2^m a takových násobků je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dále každý násobek čtyř $\leq n$ přispívá nejen faktorem 2, ale dokonce $2^2 = 4$, a takových násobků je $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Poté každý násobek osmi $\leq n$ přispěje opět dodatečným faktorem 2 atd. Proto

$$e(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^j} \right\rfloor.$$

K nalezení vztahu mezi n , $s(n)$ a $e(n!)$ využijeme právě odvozený vzorec pro $e(n!)$. Pokud n má binární zápis

$$n = a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \cdots + a_2 2^2 + a_1 2 + a_0,$$

pak

$$e(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^d} \right\rfloor.$$

Snadno si rozmyslíme, že platí

$$\begin{aligned} \lfloor n/2 \rfloor &= a_d 2^{d-1} + a_{d-1} 2^{d-2} + \cdots + a_2 2 + a_1 \\ \lfloor n/4 \rfloor &= a_d 2^{d-2} + a_{d-1} 2^{d-3} + \cdots + a_2 \\ &\vdots \\ \lfloor n/2^{d-1} \rfloor &= a_d 2 + a_{d-1} \\ \lfloor n/2^d \rfloor &= a_d. \end{aligned}$$

Vysčítáním mocnin dvou postupně u koeficientů $a_d, a_{d-1}, \dots, a_1$ dostaneme

$$\begin{aligned} e(n!) &= \\ &= a_d(1+2+\dots+2^{d-1}) + a_{d-1}(1+2+\dots+2^{d-2}) + \dots + a_2(1+2) + a_1 = \\ &= a_d(2^d - 1) + a_{d-1}(2^{d-1} - 1) + \dots + a_2(2^2 - 1) + a_1(2 - 1) + a_0 - a_0 = \\ &= a_d 2^d + a_{d-1} 2^{d-1} + \dots + a_1 2 + a_0 - (a_d + a_{d-1} + \dots + a_1 + a_0) = \\ &= n - s(n). \end{aligned}$$

K vyřešení posledního úkolu si připomeňme definici kombinačního čísla

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} e\left(\binom{n}{k}\right) &= e(n!) - e(k!) - e((n-k)!) = \\ &= n - s(n) - k + s(k) - (n-k) + s(n-k) = \\ &= s(k) + s(n-k) - s(n). \end{aligned}$$

Ilustrujme ještě výsledky na konkrétním příkladu. Např. $\binom{14}{4} = 1001$. Číslo 14 má binární zápis (1110), 4 má binární zápis (100) a 10 má binární zápis (1010), odtud

$$s(4) + s(10) - s(14) = 1 + 2 - 3 = 0 = e(1001).$$

Literatura

- [1] Aigner, M., Ziegler, G.: Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, Berlin, 2009.