

Dimitri Ara; Georges Maltsiniotis

Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes II: la preuve ∞ -catégorique

Higher Structures, Vol. 4 (2020), No. 1, 284–388

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153422>

Terms of use:

© Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, 2020

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>



Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes II : la preuve ∞ -catégorique

Dimitri Ara ^a et Georges Maltsiniotis ^b

^aAix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France

^bInstitut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis Diderot, Case Postale 7012, Bâtiment Sophie Germain, 75205 Paris Cedex 13, France

Résumé

Cet article est le second d'une série de deux articles consacrés à une généralisation du théorème A de Quillen aux ∞ -catégories strictes. Dans le premier, nous avons exposé une preuve de nature simpliciale, rapide mais quelque peu *ad hoc*, de ce théorème A. Dans le présent article, nous en donnons une preuve conceptuelle, de nature ∞ -catégorique, basée sur, d'une part, la théorie du joint et des tranches ∞ -catégoriques développée par les auteurs dans un précédent travail et, d'autre part, une construction comma pour les ∞ -catégories strictes qui généralise les catégories comma classiques et les 2-catégories comma de Gray. Cette construction comma ∞ -catégorique est utilisée par le premier auteur dans un autre article pour démontrer une généralisation du théorème B de Quillen aux ∞ -catégories strictes. L'importance de cette construction comma en théorie des ∞ -catégories nous semble dépasser largement le cadre de la théorie de l'homotopie.

Mots clés: ∞ -catégories comma, ∞ -catégories de Gray, ∞ -catégories strictes, complexes dirigés augmentés, ensembles simpliciaux, joint, nerf de Street, orientaux, produit tensoriel de Gray, sesquicatégories, théorème A, tranches, transformations oplax.

Abstract (A Quillen's Theorem A for strict ∞ -categories II)

This paper is the second in a series of two papers about generalizing Quillen's Theorem A to strict ∞ -categories. In the first one, we presented a proof of this Theorem A of a simplicial nature, direct but somewhat *ad hoc*. In the current paper, we give a conceptual proof of an ∞ -categorical nature of the same theorem. This proof is based on the theory of join and slices for strict ∞ -categories developed by the authors in a previous paper, and on a comma construction for strict ∞ -categories generalizing classical comma categories and Gray's comma 2-categories. This ∞ -categorical comma construction is used by the first author in another paper to prove a

Email addresses: dimitri.ara@univ-amu.fr (Ara)

georges.maltsiniotis@imj-prg.fr (Maltsiniotis)

© Ara and Maltsiniotis, 2020, under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

DOI: [10.21136/HS.2020.07](https://doi.org/10.21136/HS.2020.07)

generalization of Quillen's Theorem B to strict ∞ -categories. We believe that the importance of this comma construction in the theory of ∞ -categories goes far beyond the scope of homotopy theory.

Communicated by: Joachim Kock.

Received: 6th July, 2018. Accepted: 27th September, 2019.

MSC: 18A25, 18D05, 18G30, 18G35, 18G55, 55P15, 55U10, 55U15, 55U35.

Keywords: comma ∞ -categories, Gray ∞ -categories, strict ∞ -categories, augmented directed complexes, simplicial sets, join, Street's nerve, orientals, Gray tensor product, sesquicategories, Theorem A, slices, oplax transformations.

Introduction

Ce texte fait partie d'un projet consacré à la théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes, projet constitué actuellement des articles et prépublications [4, 2, 5, 7, 6, 3] et du texte en préparation [8]. L'objet de ce projet est l'étude des relations entre les ∞ -catégories strictes et les types d'homotopie *via* leur espace classifiant. Rappelons, en effet, qu'à toute ∞ -catégorie stricte C , on associe selon Street [28] un ensemble simplicial $N(C)$, appelé son *nerf de Street*, et donc un type d'homotopie. On dira qu'un ∞ -foncteur strict entre ∞ -catégories strictes $u : C \rightarrow D$ est une *équivalence de Thomason* si le morphisme simplicial qu'il induit entre les nerfs de Street de C et de D est une équivalence d'homotopie faible. La théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes est l'étude de la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories strictes et des ∞ -foncteurs stricts munie de cette notion d'équivalence faible. Gagna a démontré dans [15] une conjecture que nous avons formulée dans [5] affirmant que le nerf de Street induit une équivalence de catégories entre la localisation de $\infty\text{-Cat}$ par les équivalences de Thomason et la catégorie homotopique des espaces. Ainsi, étudier la théorie de l'homotopie des ∞ -catégories strictes, c'est étudier les espaces sous un nouvel angle. On renvoie à l'introduction de [6] pour plus de détails sur notre projet.

Mais revenons en arrière. Notre projet est inspiré de la théorie de l'homotopie de Cat , la catégorie des petites catégories, développée notamment par Quillen [25], Thomason [29] et Grothendieck [17] (voir également [24, 14]). Le point de départ de cette théorie est l'idée de Quillen de définir les groupes de K-théorie algébrique supérieurs comme les groupes d'homotopie de l'espace classifiant d'une catégorie. Afin d'établir les propriétés importantes de sa K-théorie algébrique, Quillen démontre ses fameux théorèmes A et B, établissant ainsi les propriétés fondamentales des *équivalences de Thomason*, foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale. Énonçons une variante relative de son théorème A.

Théorème (Quillen). *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & C & \end{array}$$

un triangle commutatif de foncteurs entre petites catégories. Si pour tout objet c de C , le foncteur $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ induit par u est une équivalence de Thomason, alors il en est de même du foncteur u .

Dans cet énoncé, $c \backslash A$ désigne la *tranche de A au-dessous de c* , catégorie dont les objets sont les couples $(a, f : c \rightarrow v(a))$, où a est un objet de A et f une flèche de C , et dont les morphismes d'un objet (a, f) vers un objet (a', f') sont les morphismes $g : a \rightarrow a'$ de A tels que $v(g)f = f'$.

Le caractère fondamental du théorème A de Quillen a été mis en évidence par Grothendieck. En effet, celui-ci a défini une notion de *localisateur fondamental*, classe de flèches de $\mathcal{Cat}$ satisfaisant à des axiomes inspirés des propriétés formelles de la classe des équivalences de Thomason, le plus important de ces axiomes étant le théorème A, et il a conjecturé que la classe des équivalences de Thomason forme le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture a été démontrée par Cisinski dans [13]. Ce résultat peut s’interpréter de la manière suivante : le théorème A est le seul moyen non trivial dont on dispose pour démontrer qu’un foncteur est une équivalence de Thomason.

Le théorème A de Quillen a été généralisé aux 2-catégories et 2-foncteurs stricts par Bullejos et Cegarra [10], aux 2-catégories et foncteurs lax par del Hoyo [18, 19] et aux triangles de foncteurs lax ne commutant qu’à une transformation près par Chiche [11, 12]. On renvoie à l’introduction de [6] pour plus de détails sur l’historique de ces théorèmes A.

Théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes

Le présent article est le second d’une série de deux articles consacrés à une généralisation du théorème A de Quillen aux ∞ -catégories strictes. Dans le premier article [6], nous avons établi, par des techniques simpliciales, le théorème suivant :

Théorème. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \Rightarrow \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs stricts commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ induit par u est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Dans cet énoncé, $c \backslash A$ désigne une généralisation ∞ -catégorique adéquate des tranches catégoriques qui peut se définir par des formules explicites. Par ailleurs, l’adjectif « oplax » dans « transformation oplax » fait référence à un choix d’orientation des cellules associées à α . Rappelons enfin que nous appelons *équivalence de Thomason* un ∞ -foncteur strict u dont le nerf de Street $N(u)$ est une équivalence faible simpliciale.

Dans la suite de cette introduction, toutes les ∞ -catégories et tous les ∞ -foncteurs seront supposés stricts.

Dans le présent article, on présente une nouvelle preuve de ce théorème, de nature ∞ -catégorique. L’intérêt de ce travail par rapport à [6] est multiple :

- La preuve présentée du théorème A ∞ -catégorique est plus conceptuelle : elle s’appuie sur des outils ∞ -catégoriques comme le joint et les fonctorialités des tranches que nous avons développés dans [7] et une nouvelle construction comma pour les ∞ -catégories.
- On établit des propriétés de fonctorialité de cette nouvelle construction comma, construction qui, nous semble-t-il, est une contribution importante à la théorie des ∞ -catégories, indépendamment des questions d’homotopie qui nous préoccupent dans ce travail. Cette construction est également utilisée par le premier auteur dans sa preuve d’un théorème B ∞ -catégorique [3].
- En utilisant cette construction comma, on montre comment le théorème A pour les triangles commutatifs à une transformation oplax près peut se ramener formellement au cas des triangles commutatifs, non seulement pour les équivalences de Thomason mais également

pour des classes de ∞ -foncteurs plus générales inspirées des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{Cat}$ de Grothendieck.

— Enfin, on montre comment associer à toute transformation oplax une homotopie simpliciale.

Notre preuve s'articule de la manière suivante. On dégage deux théorèmes A abstraits pour les triangles *commutatifs*, le premier cosimplicial et le second monoïdal, exprimant l'essence de l'argument originel de Quillen. En appliquant le second de ces théorèmes à $\infty\text{-}\mathcal{Cat}$ munie du joint ∞ -catégorique, on ramène le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles *commutatifs* à l'énoncé suivant : si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur, alors pour tout ∞ -foncteur $b : \mathcal{O}_m \rightarrow B$, où $\mathcal{O}_m$ désigne le m -ième oriental de Street, le ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$ induit par fonctorialité des tranches est une équivalence de Thomason. Dans cet énoncé, b_m désigne l'objet correspondant au ∞ -foncteur $\mathcal{O}_0 \rightarrow B$ (l'oriental $\mathcal{O}_0$ étant la ∞ -catégorie terminale) obtenu en précomposant $b : \mathcal{O}_m \rightarrow B$ par le ∞ -foncteur $m : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$, analogue ∞ -catégorique du morphisme simplicial $m : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$ correspondant au m -ième sommet du m -simplexe standard. Par ailleurs, $b \backslash A$ désigne la tranche de A au-dessous du ∞ -foncteur b . Cette tranche, contrairement à celles qui apparaissent dans l'énoncé du théorème A, n'est donc pas une tranche au-dessous d'un objet ; sa définition, plus complexe, utilise la théorie du joint ∞ -catégorique. On démontre cet énoncé par des méthodes ∞ -catégoriques basées sur les fonctorialités des tranches que nous avons établies dans [7], obtenant ainsi le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs. Enfin, en utilisant notre nouvelle construction comma mentionnée plus haut et ses propriétés de fonctorialité, on déduit le théorème ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs à transformation oplax près du théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs.

Voici comment cette preuve se compare à la preuve simpliciale que nous avons donnée dans [6]. L'argument originel de Quillen permet de ramener le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles *commutatifs* aux deux assertions suivantes :

- Si C est une ∞ -catégorie et c est un objet de C , on a un isomorphisme naturel entre $N(c \backslash C)$ et la tranche simpliciale $c \backslash N(C)$, l'objet c correspondant à un 0-simplexe de $N(C)$.
- Si $u : A \rightarrow B$ est un ∞ -foncteur, alors pour tout m -simplexe b de $N(B)$, le morphisme simplicial $b \backslash N(A) \rightarrow b_m \backslash N(A)$, où b_m désigne le m -ième sommet de b , est une équivalence d'homotopie faible. (Notons que les tranches apparaissant ici sont des tranches simpliciales au-dessous d'un simplexe, tranches dont la définition est classique.)

Dans [6], on démontre le premier énoncé en construisant un isomorphisme explicite à l'aide de la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [26] et le second, toujours en utilisant la théorie de Steiner, en montrant que le morphisme en jeu est la rétraction d'un rétracte par déformation fort en produisant explicitement une section et une homotopie simpliciale par des formules *ad hoc*. Dans le présent article, le premier énoncé résulte formellement des propriétés de monoïdalité du joint et le second s'obtient par des fonctorialités des tranches, celles-ci permettant d'obtenir un ∞ -foncteur et une transformation oplax de nerf la rétraction et l'homotopie simpliciale de [6] respectivement. Enfin, dans [6], pour obtenir le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs à une transformation oplax près, on est conduit à modifier de manière non triviale l'argument originel de Quillen en faisant de nouveau intervenir la théorie de Steiner, alors que dans le présent texte, on déduit formellement ce cas de celui des triangles commutatifs grâce à la construction comma ∞ -catégorique.

Détaillons maintenant les éléments de notre preuve.

Théorème A pour les triangles commutatifs et théorèmes A abstraits

La stratégie adoptée dans le présent article pour réduire notre théorème A ∞ -catégorique pour les triangles *commutatifs* au fait que le ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$ est une équivalence de Thomason est axiomatique. Comme on vient de l'expliquer, on commence par dégager deux théorèmes A abstraits : un théorème A cosimplicial et un théorème A monoïdal.

Le cadre du théorème A cosimplicial est le suivant. On se donne un objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ (l'exemple qui nous intéresse étant celui de l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ des orientaux de Street). Ceci permet de définir un foncteur nerf N de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles simpliciaux et donc, en utilisant ce nerf, une notion d'équivalence faible dans $\mathcal{C}$. Le théorème A cosimplicial affirme alors la chose suivante : si pour tout morphisme $T \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$ et tout m -simplexe z de $N(Z)$, le morphisme simplicial $z \backslash N(T) \rightarrow z_m \backslash N(T)$ est une équivalence d'homotopie faible, alors un théorème A est valable dans $\mathcal{C}$ au sens où, pour tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & Z & \end{array}$$

dans $\mathcal{C}$, si pour tout 0-simplexe z de $N(Z)$, le morphisme $z \backslash N(X) \rightarrow z \backslash N(Y)$ induit par u est une équivalence d'homotopie faible simpliciale, alors u est une équivalence faible de $\mathcal{C}$.

Le théorème A monoïdal, qui s'appuie sur le théorème A cosimplicial, permet de formuler un théorème A en termes de tranches dans $\mathcal{C}$ et non pas dans les ensembles simpliciaux. Le cadre est le suivant. On se donne une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \star, \emptyset)$, où $\emptyset$ est un objet initial de $\mathcal{C}$, localement bifermée, au sens où, pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, les foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \rightarrow X \backslash \mathcal{C} & & \mathcal{C} \rightarrow Y \backslash \mathcal{C} \\ Z \mapsto (X \star Z, X \simeq X \star \emptyset \rightarrow X \star Z) & \text{et} & Z \mapsto (Z \star Y, Y \simeq \emptyset \star Y \rightarrow Z \star Y) \end{array}$$

admettent des adjoints à droite. Ces adjoints définissent des foncteurs tranches

$$\begin{array}{ccc} X \backslash \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} & & Y \backslash \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ (Z, u : X \rightarrow Z) \mapsto u \backslash Z & \text{et} & (Z, v : Y \rightarrow Z) \mapsto Z / v. \end{array}$$

Ces considérations sont bien sûr inspirées des propriétés de $\infty\text{-Cat}$ munie du joint ∞ -catégorique. Si $\mathcal{C}$ admet un objet final e , on définit un objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ en posant $\mathcal{O}_m = e \star e \star \cdots \star e$, où e apparaît $m + 1$ fois. On en déduit un foncteur nerf et une notion d'équivalence faible dans $\mathcal{C}$. Le théorème A cosimplicial appliqué à cet objet cosimplicial $\mathcal{O}$ permet alors d'obtenir le théorème A monoïdal : si pour tout morphisme $T \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$ et tout morphisme $z : \mathcal{O}_m \rightarrow Z$, le morphisme $z \backslash T \rightarrow z_m \backslash T$ induit par functorialité des tranches, où $z_m : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{C}$ désigne le morphisme obtenu en précomposant z par le morphisme $m : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$ induit par $m : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$, est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, alors un théorème A est valable dans $\mathcal{C}$ au sens où, pour tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & Z & \end{array}$$

dans $\mathcal{C}$, si pour tout morphisme $z : e \rightarrow Z$, le morphisme $z \backslash X \rightarrow z \backslash Y$ induit par u est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, alors il en est de même de u .

Voici comment on utilise le théorème A monoïdal pour obtenir notre théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs. Considérons la catégorie $\infty\text{-Cat}$ munie du joint ∞ -catégorique. On montre dans [7] que l'objet cosimplicial associé à cette catégorie monoïdale par le procédé qu'on vient de décrire n'est autre que l'objet cosimplicial des orientaux. Ainsi, en appliquant le théorème A monoïdal à $\infty\text{-Cat}$ munie du joint, on ramène le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs à l'énoncé suivant : pour tout ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ et tout ∞ -foncteur $b : \mathcal{O}_m \rightarrow B$, le ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$ est une équivalence de Thomason. Pour démontrer ceci, on utilise les propriétés de fonctorialité des tranches établies dans [7]. En effet, ce ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$ est induit par une fonctorialité des tranches appliquée au ∞ -foncteur $m : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$. De la même manière que le morphisme $m : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$ est un rétracte par déformation fort, nous montrons que le ∞ -foncteur $m : \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_m$ est ce que nous appelons un rétracte par transformation oplax fort, notion analogue dans laquelle la notion d'homotopie simpliciale est remplacée par celle de transformation oplax. Nos résultats de fonctorialité des tranches entraînent alors que $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$ est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax fort. Or, nous montrons que toute transformation oplax induit une homotopie simpliciale et nous en déduisons que le nerf de Street du ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b_m \backslash A$, qui n'est autre que le morphisme simplicial $b \backslash N(A) \rightarrow b_m \backslash N(A)$, est la rétraction d'un rétracte par déformation fort. Nous montrons de plus que la section et l'homotopie simpliciale qu'on obtient ainsi coïncident avec celles définies par les formules de [6].

Théorème A pour les 2-triangles et construction comma ∞ -catégorique

Comme mentionné précédemment, dans le présent article, nous montrons que le théorème A pour les triangles commutatifs à une transformation oplax près peut se déduire du théorème A pour les triangles commutatifs par des outils ∞ -catégoriques. Pour cela, nous nous inspirons de l'article [12] de Chiche dans lequel est démontré l'assertion analogue pour la catégorie 2-Cat des 2-catégories. La preuve de Chiche repose sur la théorie de l'intégration de Grothendieck dans 2-Cat . La théorie de l'intégration dans $\infty\text{-Cat}$ n'étant pas encore pleinement développée, nous l'avons contournée en introduisant une construction comma pour les ∞ -catégories (qui permet d'ailleurs de définir la construction de Grothendieck).

Soient

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

deux ∞ -foncteurs. On montre qu'il existe une ∞ -catégorie $f \downarrow g$, qu'on appelle ∞ -catégorie comma, satisfaisant à la propriété universelle suivante. Si T est une ∞ -catégorie, la donnée d'un ∞ -foncteur

$$T \rightarrow f \downarrow g$$

correspond à celle d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xRightarrow{\lambda} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array},$$

où x et y sont des ∞ -foncteurs et λ est une transformation oplax. Lorsque X , Y et Z sont des catégories, on retrouve les catégories comma classiques telles que définies par exemple dans [23, chapitre II, section 6]. Lorsque ce sont des 2-catégories ou des 3-catégories, on retrouve les

constructions comma étudiées par Gray dans [16] (au détail près que nous considérons des comma oplax alors que Gray privilégie les comma lax).

On vérifie que cette construction est fonctorielle par rapport à des morphismes de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array},$$

où α et β sont des transformations oplax. Nous conjecturons que le foncteur construction comma ainsi obtenu s'étend en un ∞ -foncteur de Gray, c'est-à-dire un foncteur enrichi dans $\infty\text{-Cat}$ munie du produit tensoriel de Gray, et qu'en particulier, il agit sur une notion adéquate de n -cellules pour tout $n \geq 0$. Dans ce texte, nous parvenons uniquement, par une preuve quelque peu technique et laborieuse, à étendre la construction comma en un sesquifoncteur par rapport à des 2-cellules de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array},$$

où les lettres grecques minuscules désignent des transformations oplax et les lettres grecques majuscules des 2-transformations oplax (parfois également appelées modifications).

Cette sesquifonctorialité est la quantité minimale de fonctorialité de la construction comma qui nous permette de déduire le théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs à une transformation oplax près du cas des triangles commutatifs. En effet, elle entraîne que la construction comma préserve les rétractes par transformation oplax forts, ce qui fournit un précieux outil pour montrer que certains ∞ -foncteurs sont des équivalences de Thomason. Cette propriété joue également un rôle central dans la preuve de la généralisation du théorème B de Quillen aux ∞ -catégories strictes par le premier auteur dans [3].

La raison pour laquelle on obtient un sesquifoncteur et non pas un 2-foncteur est que les 2-cellules comme ci-dessus ne se composent pas horizontalement (horizontalement au sens technique mais verticalement sur le diagramme). Ceci est lié au fait que les ∞ -catégories strictes, ∞ -foncteurs stricts et transformations oplax ne forment pas une 2-catégorie mais seulement une sesquicatégorie. En effet, si

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} Z$$

sont deux transformations oplax, les deux manières de les composer en utilisant la composition verticale des transformations oplax et la composition horizontale d'une transformation oplax et d'un ∞ -foncteur ne coïncident pas. Néanmoins, il existe une 2-transformation oplax canonique entre ces deux compositions que nous appelons la *contrainte de Gray* associée à α et β . Cette contrainte de Gray fait partie de la structure de ∞ -catégorie de Gray, c'est-à-dire de catégorie enrichie dans $\infty\text{-Cat}$ munie du produit tensoriel de Gray oplax, dont sont munis les ∞ -catégories strictes, ∞ -foncteurs stricts et i -transformations oplax pour tout $i \geq 1$, structure qu'on notera $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$.

Ainsi, l'étude de la sesquifonctorialité de la construction comma nécessite une compréhension de la structure de ∞ -catégorie de Gray. On établit quelques propriétés de cette structure dans ce texte. On utilise ces propriétés pour montrer que si $\mathbb{C}$ est une ∞ -catégorie de Gray, alors pour tout objet c de $\mathbb{C}$, on dispose d'une sesquicatégorie tranche $\mathbb{C}/_c$, établissant ainsi une conséquence en basse dimension de notre conjecture C.24 de [7] affirmant qu'on dispose d'une ∞ -catégorie de Gray tranche $\mathbb{C}/_c$. C'est à partir de cette sesquicatégorie tranche, appliquée à $\mathbb{C} = \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, qu'on définit la sesquicatégorie source de la construction comma.

Organisation de l'article

La première section est consacrée à des préliminaires sur les ensembles simpliciaux. On y définit une construction comma bisimpliciale et les tranches simpliciales. On démontre, selon l'argument originel de Quillen, un théorème A simplicial.

Dans la deuxième section, en utilisant ce théorème A simplicial, on démontre deux théorèmes A abstraits, abstraits signifiant que ces résultats s'appliquent dans une catégorie $\mathcal{C}$ (qui n'est pas nécessairement Cat ou $\infty\text{-Cat}$) munie de structure supplémentaire. Pour le premier, le théorème A cosimplicial, cette structure supplémentaire est un objet cosimplicial (vérifiant certains axiomes). Pour le second, le théorème A monoïdal, cette structure est celle d'une catégorie monoïdale localement biformée, notion introduite dans cette section. On montre comment déduire de ce formalisme le théorème A de Quillen originel.

La troisième section est dédiée à des rappels sur la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [26]. On y présente les résultats fondamentaux de cette théorie, dus à Steiner, ainsi que quelques compléments issus de [7].

La quatrième section est consacrée à des préliminaires ∞ -catégoriques. On commence par rappeler la théorie du produit tensoriel de Gray oplax, produit introduit par Al-Agl et Steiner dans [1] et généralisant le produit de Gray 2-catégorique [16], et la notion de transformation oplax ou, plus généralement, de i -transformation oplax, ainsi que leurs variantes lax. On définit quelques opérations de composition sur les transformations oplax et on explicite le lien avec les transformations strictes. On expose ensuite un résumé de la théorie du joint et des tranches ∞ -catégoriques telle que développée dans [7]. On rappelle en particulier que $\infty\text{-Cat}$ munie de ce joint forme une catégorie localement biformée au sens de la section 2 et que les adjoints à droite associés à cette structure sont les tranches ∞ -catégoriques. Enfin, on rappelle les résultats de sesquifonctorialité des tranches obtenus dans [7].

L'objet de la cinquième section est de démontrer notre théorème A ∞ -catégorique dans le cas d'un triangle commutatif. On commence par montrer comment le joint ∞ -catégorique induit l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ des orientaux de Street et donc le nerf de Street et la notion d'équivalence de Thomason. On introduit la notion de rétracte par transformation oplax fort, analogue ∞ -catégorique de la notion de rétracte par déformation fort, et on étudie ses propriétés de stabilité par changement de base. On observe, en utilisant des résultats de l'appendice A, que ces rétractes sont des équivalences de Thomason. On montre que le m -ième oriental $\mathcal{O}_m$ se rétracte par transformation oplax sur son m -ième objet. On en déduit, en utilisant les résultats de sesquifonctorialité des tranches rappelés dans la section précédente, que $\infty\text{-Cat}$ munie du joint vérifie les hypothèses du théorème A monoïdal. On obtient ainsi le théorème A annoncé. On étudie les interactions entre ce théorème A et les dualités de $\infty\text{-Cat}$. On montre par ailleurs que les tranches ∞ -catégoriques de la forme $c \setminus C$ se rétractent par transformation oplax sur un objet et on en déduit une version non relative du théorème A ∞ -catégorique. On termine la section

par une application de notre théorème A donnant une condition suffisante pour que le nerf d’une ∞ -catégorie soit faiblement contractile, résultat qui est utilisé dans [5].

Dans la sixième section, on introduit la notion de ∞ -catégorie comma, généralisation ∞ -catégorique des catégories comma classiques et des 2-catégories (ou 3-catégories) comma de Gray. On montre que cette construction est fonctorielle. On énonce un résultat de préservation des rétractes par transformation oplax forts par la construction comma qui découlera de l’appendice B et jouera un rôle central dans la section suivante.

La septième section est consacrée au théorème A pour les 2-triangles, c’est-à-dire les triangles commutatifs à une transformation oplax près. On montre comment, en utilisant la fonctorialité de la construction comma et le fait qu’elle préserve les rétractes par transformation oplax forts, on peut déduire le théorème A ∞ -catégorique pour les 2-triangles du théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs, non seulement pour les équivalences de Thomason mais également pour des classes de ∞ -foncteurs plus générales vérifiant des axiomes adéquats. On termine la section par une étude des interactions entre le théorème A pour les 2-triangles et les dualités de ∞ -Cat.

Dans l’appendice A, on associe à toute transformation oplax une homotopie simpliciale. Ainsi, on obtient que les nerfs de deux ∞ -foncteurs source et but d’une transformation oplax sont homotopes et donc que les rétractes par transformation oplax forts sont des équivalences de Thomason. On vérifie que, lorsque la transformation est stricte, l’homotopie associée n’est autre que le nerf de Street de la transformation.

L’appendice B est dédié aux propriétés de sesquifonctorialité de la construction comma ∞ -catégorique introduite dans la section 6. On définit la notion de ∞ -catégorie de Gray et la notion de contrainte de Gray associée à deux cellules composables horizontalement dans une ∞ -catégorie de Gray. On étudie les propriétés de ces contraintes de Gray. Ceci nous permet de définir, pour $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray et c un objet de $\mathbb{C}$, une sesquicatégorie tranche $\mathbb{C}/c$, ainsi que, par dualité, une variante $\mathbb{C}/c$ de cette sesquicatégorie tranche. En appliquant ces constructions à $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, la ∞ -catégorie de Gray des ∞ -catégories strictes, ∞ -foncteurs stricts et i -transformations oplax pour $i \geq 1$, on obtient, pour Z une ∞ -catégorie stricte, des sesquicatégories $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$ et $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$. On montre que la construction comma s’étend en un sesquifoncteur

$$-\downarrow_Z - : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z} \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z} \xrightarrow{\text{to}} \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}},$$

où $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ désigne la sesquicatégorie des ∞ -catégories strictes, ∞ -foncteurs stricts et transformations oplax. On en déduit le résultat de préservation des rétractes par transformation oplax forts par la construction comma annoncé dans la section 6 et utilisé dans la section 7.

Enfin, dans l’appendice C, on fait le lien entre la preuve du théorème A ∞ -catégorique présentée dans ce texte et celle de notre précédent article [6]. Plus précisément, on montre que la section simpliciale et l’homotopie simpliciale utilisées pour prouver ce théorème dans ce précédent article proviennent de la section ∞ -catégorique et de la transformation oplax utilisées pour prouver ce même théorème dans le présent texte.

1. Préliminaires simpliciaux : le théorème A simplicial

1.1. On notera Δ la catégorie des simplexes. Rappelons que ses objets sont les ensembles ordonnés

$$\Delta_m = \{0, \dots, m\}, \quad \text{pour } m \geq 0,$$

et ses morphismes les applications croissantes (au sens large) entre tels ensembles ordonnés. De même, on notera Δ_+ la *catégorie des simplexes augmentée*, c'est-à-dire la catégorie obtenue à partir de Δ en ajoutant l'ensemble ordonné vide Δ_{-1} .

La catégorie des *ensembles simpliciaux*, c'est-à-dire des préfaisceaux sur Δ , sera notée $\widehat{\Delta}$. On considérera le foncteur de Yoneda $\Delta \hookrightarrow \widehat{\Delta}$ comme une inclusion. Si X est un ensemble simplicial, pour $m \geq 0$, on notera X_m l'ensemble $X(\Delta_m)$ de ses m -simplexes.

Soit x un m -simplexe d'un ensemble simplicial X . Pour $I = \{i_0 < \dots < i_p\}$ un sous-ensemble de Δ_m , on notera $x_{i_0, \dots, i_p}$ le p -simplexe

$$x_{i_0, \dots, i_p} = X(f_I)(x),$$

où $f_I : \Delta_p \rightarrow \Delta_m$ est l'application qui envoie k sur i_k .

1.2. On appellera *équivalences faibles d'ensembles simpliciaux* les équivalences d'homotopie faibles d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire les morphismes dont la réalisation topologique est une équivalence d'homotopie. On dira qu'un ensemble simplicial X est *faiblement contractile* si l'unique morphisme de X vers l'ensemble simplicial final Δ_0 est une équivalence faible.

1.3. On rappelle que la catégorie Δ admet un unique automorphisme non trivial, automorphisme qui se trouve être une involution et que nous noterons $D_\Delta : \Delta \rightarrow \Delta$. Explicitement, le foncteur D_Δ est l'identité sur les objets et, si $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$ est un morphisme de Δ , le morphisme $D_\Delta(f)$ est donné par

$$D_\Delta(f)(i) = n - f(m - i), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq m.$$

Cet automorphisme s'étend de manière unique en un automorphisme D_{Δ_+} de Δ_+ et celui-ci vérifie $D_{\Delta_+}(\Delta_{-1}) = \Delta_{-1}$.

L'automorphisme D_Δ induit un automorphisme involutif de $\widehat{\Delta}$ qui envoie un ensemble simplicial X sur l'ensemble simplicial $X^{\text{op}} = X \circ D_\Delta$.

On rappelle que f est une équivalence faible simpliciale si et seulement si il en est de même de f^{op} . On vérifie en effet immédiatement que les morphismes f et f^{op} ont même réalisation topologique.

1.4. On rappelle qu'un *ensemble bisimplicial* est un préfaisceau sur $\Delta \times \Delta$. Si X est un ensemble bisimplicial et m, n sont deux entiers positifs, on notera $X_{m,n}$ l'ensemble $X(\Delta_m, \Delta_n)$.

On notera $p_1, p_2 : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta$ les deux projections. Ces foncteurs induisent par précomposition des foncteurs $p_1^*, p_2^* : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta \times \Delta}$. Si X est un ensemble simplicial, $p_1^*(X)$ et $p_2^*(X)$ sont les ensembles bisimpliciaux définis, pour m et n deux entiers positifs, par

$$\begin{aligned} p_1^*(X)_{m,n} &= X_m, \\ p_2^*(X)_{m,n} &= X_n. \end{aligned}$$

On notera $\delta : \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$ le foncteur diagonal. Celui-ci induit un foncteur $\delta^* : \widehat{\Delta \times \Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$ qui envoie un ensemble bisimplicial X sur l'ensemble simplicial $\delta^*(X)$ défini par $\delta^*(X)_m = X_{m,m}$. On appellera *équivalence faible diagonale* un morphisme d'ensembles bisimpliciaux tel que $\delta^*(f)$ soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

On rappelle le lemme classique suivant :

Lemme 1.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'ensembles bisimpliciaux. Si pour tout $m \geq 0$, le morphisme $f_{m,\bullet} : X_{m,\bullet} \rightarrow Y_{m,\bullet}$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, alors f est une équivalence faible diagonale.

Démonstration. Voir par exemple [9, Chapitre XII, paragraphe 4.3] ou [13, proposition 2.1.7] pour une preuve plus moderne. $\square$

1.6. Soient $g : X \rightarrow Z$ et $h : Y \rightarrow Z$ deux morphismes d'ensembles simpliciaux. On définit un ensemble bisimplicial $g \downarrow h$ en posant

$$(g \downarrow h)_{m,n} = \{(x \in X_m, y \in Y_n, z \in Z_{m+1+n}) \mid \\ z_{0,\dots,m} = g(x) \text{ et } z_{m+1,\dots,m+1+n} = h(y)\},$$

les opérations simpliciales étant définies de la manière évidente. On a des morphismes canoniques

$$p_1^*(X) \leftarrow g \downarrow h \rightarrow p_2^*(Y)$$

définis par

$$x \mapsto (x, y, z) \mapsto y.$$

On notera respectivement $g \downarrow Z$ et $Z \downarrow h$ les ensembles bisimpliciaux $g \downarrow 1_Z$ et $1_Z \downarrow h$. Notons que dans ces cas, les définitions se simplifient (à isomorphisme près) en

$$(g \downarrow Z)_{m,n} = \{(x \in X_m, z \in Z_{m+1+n}) \mid z_{0,\dots,m} = g(x)\}, \\ (Z \downarrow h)_{m,n} = \{(y \in Y_n, z \in Z_{m+1+n}) \mid z_{m+1,\dots,m+1+n} = h(y)\}.$$

1.7. Soient $g : X \rightarrow Z$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et $m \geq 0$ un entier. L'application canonique

$$Z \downarrow g \rightarrow p_1^*(Z)$$

induit un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$(Z \downarrow g)_{m,\bullet} \rightarrow p_1^*(Z)_{m,\bullet} = Z_m,$$

où Z_m désigne l'ensemble simplicial constant associé à l'ensemble Z_m .

Si z est un m -simplexe de Z , on notera $z \setminus X$ la fibre du morphisme ci-dessus en z . On appellera $z \setminus X$ la *tranche de X au-dessous de z* . Explicitement, les n -simplexes de $z \setminus X$ sont donnés par

$$(z \setminus X)_n = \{(x \in X_n, z' \in Z_{m+1+n}) \mid \\ z'_{0,\dots,m} = z \text{ et } z'_{m+1,\dots,m+1+n} = g(x)\}.$$

Par définition, l'ensemble simplicial $(Z \downarrow g)_{m,\bullet}$ se décompose en

$$(Z \downarrow g)_{m,\bullet} = \coprod_{z \in Z_m} z \setminus X.$$

Par ailleurs, le morphisme $Z \downarrow g \rightarrow p_2^*(X)$ induit un morphisme canonique

$$z \setminus X \rightarrow X$$

donné explicitement par $(x, z') \mapsto x$.

Un cas particulièrement important de tranche est celui où $X = Z$ et g est l'identité de Z . Ainsi, si Z est un ensemble simplicial et z est un m -simplexe de Z , on obtient un ensemble simplicial $z \setminus Z$.

Remarque 1.8. L'ensemble simplicial $z \setminus X$ peut se définir de manière plus conceptuelle à partir du joint simplicial (voir le paragraphe 2.7).

1.9. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \quad \swarrow h & \\ & Z & \end{array}$$

un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux. On définit un morphisme $Z \downarrow f$ d'ensembles bisimpliciaux

$$Z \downarrow f : Z \downarrow g \rightarrow Z \downarrow h$$

en envoyant (x, z) sur $(f(x), z)$. (On prendra garde que la notation $Z \downarrow f$ est ambiguë dans le cas $Y = Z$ puisqu'elle désigne à la fois un ensemble bisimplicial et un morphisme d'ensembles bisimpliciaux. Nous avons pris soin de toujours indiquer clairement quel objet la notation désigne dans la suite du texte.)

On obtient un triangle

$$\begin{array}{ccc} Z \downarrow g & \xrightarrow{Z \downarrow f} & Z \downarrow h \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & p_1^*(Z) & \end{array}$$

de morphismes bisimpliciaux dont on vérifie immédiatement la commutativité. Si z est un m -simplexe de Z , en prenant la fibre au-dessus de z du morphisme $Z \downarrow f$, on obtient un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$z \setminus f : z \setminus X \rightarrow z \setminus Y$$

qui, explicitement, envoie (x, z') sur $(f(x), z')$. Par définition, on a

$$(Z \downarrow f)_{m, \bullet} = \coprod_{z \in Z_m} z \setminus f : \coprod_{z \in Z_m} z \setminus X \rightarrow \coprod_{z \in Z_m} z \setminus Y.$$

1.10. Soient $g : X \rightarrow Z$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et z un m -simplexe de Z . En vertu du paragraphe précédent, en considérant g comme un morphisme au-dessus de Z , on obtient un morphisme $z \setminus g : z \setminus X \rightarrow z \setminus Z$. On vérifie immédiatement que le carré

$$\begin{array}{ccc} z \setminus X & \longrightarrow & X \\ z \setminus g \downarrow & & \downarrow g \\ z \setminus Z & \longrightarrow & Z \end{array}$$

est cartésien. Autrement dit, on a

$$z \setminus X = (z \setminus Z) \times_Z X.$$

1.11. Soient $g : X \rightarrow Z$ un morphisme d'ensembles simpliciaux et z un n -simplexe de Z . On peut définir, de manière similaire à la définition des tranches au-dessous, un ensemble simplicial X/z *tranche de X au-dessus de z* en considérant les fibres du morphisme canonique

$$g \downarrow Z \rightarrow p_2^*(Z).$$

On peut également définir X/z à partir de $z \setminus X$ en utilisant la dualité $X \mapsto X^{\text{op}}$. En effet, on a un morphisme $g^{\text{op}} : X^{\text{op}} \rightarrow Z^{\text{op}}$ et le n -simplexe z de Z peut-être vu comme un n -simplexe de Z^{op} . On peut donc considérer l'ensemble simplicial $z \setminus X^{\text{op}}$. On a alors

$$X/z = (z \setminus X^{\text{op}})^{\text{op}}.$$

Explicitement, pour $m \geq 0$, on a

$$(X/z)_m = \{(x \in X_m, z' \in Z_{m+1+n}) \mid z'_{0,\dots,m} = g(x) \text{ et } z'_{m+1,\dots,m+1+n} = z\}.$$

Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

est un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux et si z est toujours un n -simplexe de Z , on définit un morphisme

$$f/z : X/z \rightarrow Y/z$$

en posant $f/z = (z \setminus f^{\text{op}})^{\text{op}}$. Explicitement, ce morphisme envoie (x, z') sur $(f(x), z')$.

Proposition 1.12. *Soient X un ensemble simplicial et x un n -simplexe de X . Alors l'ensemble simplicial X/x est contractile.*

Démonstration. Cela résulte de [20, chapitre 6, proposition 1.4]. Voir également [6, lemme 2.4] pour une preuve élémentaire. $\square$

1.13. Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

est un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux, on dispose d'un carré

$$\begin{array}{ccc} Z \downarrow g & \xrightarrow{Z \downarrow f} & Z \downarrow h \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_2^*(X) & \xrightarrow{p_2^*(f)} & p_2^*(Y) \end{array}$$

de morphismes bisimpliciaux dont on vérifie immédiatement la commutativité.

Le lemme suivant affirme que les flèches verticales de ce carré sont des équivalences faibles diagonales :

Lemme 1.14. *Soit $g : X \rightarrow Z$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Alors le morphisme canonique $Z \downarrow g \rightarrow p_2^*(X)$ est une équivalence faible diagonale.*

Démonstration. En vertu du lemme 1.5, il suffit de vérifier que, pour tout $n \geq 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$(Z \downarrow g)_{\bullet, n} \rightarrow p_2^*(X)_{\bullet, n} = X_n,$$

où X_n désigne l'ensemble simplicial constant associé à l'ensemble X_n , est une équivalence faible. Puisque les équivalences faibles simpliciales sont stables par somme, il suffit donc de vérifier que les fibres de ce morphisme sont faiblement contractiles. Soit donc x un élément de X_n . L'ensemble des m -simplexes de la fibre en x est

$$\begin{aligned} & \{(x' \in X_n, z \in Z_{m+1+n}) \mid x' = x \text{ et } z_{m+1, \dots, m+1+n} = g(x')\} \\ & \simeq \{z \in Z_{m+1+n} \mid z_{m+1, \dots, m+1+n} = g(x)\}. \end{aligned}$$

Cette fibre s'identifie ainsi à l'ensemble simplicial $Z/g(x)$. Or celui-ci est faiblement contractile en vertu de la proposition 1.12, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 1.15. *Si*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

est un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux, alors le morphisme f est une équivalence faible si et seulement si $Z \downarrow f : Z \downarrow g \rightarrow Z \downarrow h$ est une équivalence faible diagonale.

Démonstration. En vertu du lemme précédent, les flèches verticales du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z \downarrow g & \xrightarrow{Z \downarrow f} & Z \downarrow h \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_2^*(X) & \xrightarrow{p_2^*(f)} & p_2^*(Y) \end{array}$$

sont des équivalences faibles diagonales. Par deux sur trois, on en déduit que le morphisme $p_2^*(f) : p_2^*(X) \rightarrow p_2^*(Y)$ est une équivalence faible diagonale si et seulement si il en est de même de $Z \downarrow f : Z \downarrow g \rightarrow Z \downarrow h$. Or $\delta^*(p_2^*(f))$ n'est autre que f et dire que $p_2^*(f)$ est une équivalence faible diagonale signifie précisément que f est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. $\square$

Théorème 1.16 (Théorème A simplicial). *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux. Si pour tout $m \geq 0$ et tout m -simplexe z de Z , le morphisme $z \setminus f : z \setminus X \rightarrow z \setminus Y$ est une équivalence faible, alors f est une équivalence faible.

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, il s'agit de montrer que le morphisme

$$Z \downarrow f : Z \downarrow g \rightarrow Z \downarrow h$$

est une équivalence faible diagonale. Pour cela, il suffit de montrer, en vertu du lemme 1.5, que, pour tout $m \geq 0$, le morphisme $(Z \downarrow f)_{m,\bullet}$ est une équivalence faible. Or, on a vu au paragraphe 1.9 que ce morphisme s'identifie au morphisme

$$\coprod_{z \in Z_m} z \setminus f : \coprod_{z \in Z_m} z \setminus X \rightarrow \coprod_{z \in Z_m} z \setminus Y.$$

Puisque les équivalences faibles simpliciales sont stables par somme, l'hypothèse de l'énoncé entraîne que ce morphisme est bien une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. $\square$

Corollaire 1.17. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

un triangle commutatif de morphismes d'ensembles simpliciaux. Si pour tout $n \geq 0$ et tout n -simplexe z de Z , le morphisme $f/z : X/z \rightarrow Y/z$ est une équivalence faible, alors f est une équivalence faible.

Démonstration. Soit z un n -simplexe de Z . Puisque le morphisme $f/z : X/z \rightarrow Y/z$ est par hypothèse une équivalence faible, il en est de même de $(f/z)^{\text{op}}$. Or, en vertu du paragraphe 1.11, celui-ci s'identifie à $z \setminus f^{\text{op}}$. Ainsi, on peut appliquer le théorème précédent à f^{op} . On en déduit que f^{op} est une équivalence faible et donc qu'il en est de même de f , ce qu'on voulait démontrer. $\square$

2. Deux théorèmes A abstraits

2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Pour $n \geq 0$, on pose $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\Delta_n)$. On notera $N : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\Delta}$ le *foncteur nerf* associé défini par

$$X \mapsto (\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}_n, X)).$$

On appellera *équivalences faibles* de $\mathcal{C}$ les morphismes de $\mathcal{C}$ dont le nerf, c'est-à-dire l'image par N , est une équivalence faible simpliciale.

On dira que l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\Delta}$ *permet un théorème A* si, pour tout morphisme $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, tout $m \geq 0$ et tout m -simplexe z de $N(Z)$, le morphisme $z \setminus N(X) \rightarrow z_m \setminus N(X)$, défini sur les n -simplexes par $(x, z') \mapsto (x, z'_{m,\dots,m+1+n})$, est une équivalence faible simpliciale.

Théorème 2.2 (Théorème A cosimplicial). *Fixons une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ permettant un théorème A. Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}$. Si pour tout 0-simplexe z de $N(Z)$, le morphisme

$$z \setminus N(f) : z \setminus N(X) \rightarrow z \setminus N(Y)$$

est une équivalence faible simpliciale, alors f est une équivalence faible de $\mathcal{C}$.

Démonstration. Le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & Z & \end{array}$$

induit un triangle commutatif d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} N(X) & \xrightarrow{N(f)} & N(Y) \\ & \searrow N(g) & \swarrow N(h) \\ & N(Z) & \end{array}$$

auquel on va appliquer le théorème 1.16. Pour conclure, il suffit donc de montrer que, pour tout $m \geq 0$ et tout m -simplexe z de $N(Z)$, le morphisme

$$z \backslash N(f) : z \backslash N(X) \rightarrow z \backslash N(Y)$$

est une équivalence faible simpliciale. Considérons le carré de morphismes d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} z \backslash N(X) & \longrightarrow & z \backslash N(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ z_m \backslash N(X) & \longrightarrow & z_m \backslash N(Y) \end{array}$$

dont on vérifie immédiatement la commutativité. Puisque l'objet cosimplicial $\mathcal{O}$ permet un théorème A, les morphismes verticaux de ce carré sont des équivalences faibles. Le morphisme $z_m \backslash N(X) \rightarrow z_m \backslash N(Y)$ étant une équivalence faible par hypothèse, on conclut par deux sur trois. $\square$

Dans la suite de cette section, on fixe une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ de produit monoïdal noté $\star$ et d'unité un objet initial $\emptyset$ de $\mathcal{C}$.

2.3. Supposons que $\mathcal{C}$ admette un objet final e . L'objet e admet une et une seule structure de monoïde dans $(\mathcal{C}, \star, \emptyset)$. En effet, il existe d'unique morphismes $e \star e \rightarrow e$ et $\emptyset \rightarrow e$ et ceux-ci vérifient trivialement les axiomes des monoïdes. En vertu de la propriété universelle de la catégorie des simplexes augmentés Δ_+ [23, chapitre VII, section 5], ce monoïde induit un foncteur monoïdal (défini à unique isomorphisme monoïdal près) $\mathcal{O}_+ : \Delta_+ \rightarrow \mathcal{C}$, où Δ_+ est munie du produit monoïdal défini par la somme ensembliste

$$\Delta_m \amalg \Delta_n = \Delta_{m+1+n},$$

l'unité étant Δ_{-1} . Ce foncteur monoïdal est caractérisé (à unique isomorphisme monoïdal près) par le fait que $\mathcal{O}_+(\Delta_0) = e$. En restreignant $\mathcal{O}_+$ à Δ , on obtient donc un objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$. Explicitement, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\Delta_n)$ est égal à $e \star \cdots \star e$, où e apparaît $n + 1$ fois (pour un certain choix de parenthésage).

Ainsi, si $\mathcal{C}$ admet un objet final, on dispose d'un objet cosimplicial canonique et on est en position d'utiliser les définitions du début de la présente section. En particulier, on dispose d'un foncteur nerf $N : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\Delta}$ et d'équivalences faibles de $\mathcal{C}$, morphismes dont le nerf est une équivalence faible simpliciale.

On dira que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ permet un théorème A si l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ permet un théorème A au sens du paragraphe 2.1.

2.4. Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$. On dispose de morphismes

$$X \xrightarrow{\iota_1} X \star Y \xleftarrow{\iota_2} Y$$

définis par

$$X \simeq X \star \emptyset \xrightarrow{X \star \emptyset_Y} X \star Y \xleftarrow{\emptyset_X \star Y} \emptyset \star Y \simeq Y,$$

où $\emptyset_Z$, pour Z un objet de $\mathcal{C}$, désigne l'unique morphisme $\emptyset \rightarrow Z$.

On en déduit l'existence d'un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow X \backslash \mathcal{C} \\ Y &\mapsto (X \star Y, \iota_1 : X \rightarrow X \star Y). \end{aligned}$$

On dira que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est *localement fermée à gauche* si ce foncteur admet un adjoint à droite. Dans ce cas, on dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} X \backslash \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (Z, g : X \rightarrow Z) &\mapsto g \backslash Z \end{aligned}$$

et de bijections

$$\mathrm{Hom}_{X \backslash \mathcal{C}}((X \star Y, \iota_1), (Z, g)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, g \backslash Z),$$

naturelles en Y dans $\mathcal{C}$ et (Z, g) dans $X \backslash \mathcal{C}$. On appelle $g \backslash Z$ la *tranche de Z au-dessous de g* .

De même, on dira que $\mathcal{C}$ est *localement fermée à droite* si le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow Y \backslash \mathcal{C} \\ X &\mapsto (X \star Y, \iota_2 : Y \rightarrow X \star Y) \end{aligned}$$

admet un adjoint à droite. Enfin, on dira que $\mathcal{C}$ est *localement bifermée* si elle est localement fermée à gauche et à droite.

2.5. Supposons $\mathcal{C}$ localement fermée à gauche et fixons Z un objet de $\mathcal{C}$. On dispose d'un foncteur

$$(\mathcal{C}/Z)^\circ \rightarrow \mathcal{C}$$

défini sur les objets par

$$(T, z : T \rightarrow Z) \mapsto z \backslash Z$$

et sur les morphismes de la manière suivante. Soit

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\quad l \quad} & T_2 \\ & \searrow z_1 \quad \swarrow z_2 & \\ & Z & \end{array}$$

un morphisme de (T_1, z_1) vers (T_2, z_2) dans $\mathcal{C}/Z$. Pour tout objet S de $\mathcal{C}$, le composé

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, z_2 \backslash Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{T_2 \backslash \mathcal{C}}((T_2 \star S, \iota_1), (Z, z_2)) \\ &\downarrow \\ \mathrm{Hom}_{T_1 \backslash \mathcal{C}}((T_1 \star S, \iota_1), (Z, z_1)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, z_1 \backslash Z), \end{aligned}$$

où la flèche verticale est induite par le morphisme $l \star S : T_1 \star S \rightarrow T_2 \star S$, est naturel en S . On obtient ainsi, par le lemme de Yoneda, le morphisme $l^* : z_2 \backslash Z \rightarrow z_1 \backslash Z$ associé. La functorialité de ce morphisme est immédiate.

En particulier, en appliquant cette construction au triangle

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\emptyset_X} & X \\ & \searrow \emptyset_Z & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

et en tenant compte de l'isomorphisme canonique $\emptyset_Z \backslash Z \simeq Z$, on obtient un morphisme

$$U : g \backslash Z \rightarrow Z$$

qu'on appellera *morphisme d'oubli*.

Par functorialité, le foncteur

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}/Z)^\circ &\rightarrow \mathcal{C} \\ (T, z : T \rightarrow Z) &\mapsto z \backslash Z \end{aligned}$$

se relève, le long du foncteur d'oubli $\mathcal{C}/Z \rightarrow \mathcal{C}$, en un foncteur

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}/Z)^\circ &\rightarrow \mathcal{C}/Z \\ (T, z : T \rightarrow Z) &\mapsto (z \backslash Z, U), \end{aligned}$$

où $U : z \backslash Z \rightarrow Z$ désigne le morphisme d'oubli que l'on vient de définir.

2.6. On suppose toujours $\mathcal{C}$ localement fermée à gauche et on suppose de plus que $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés. Pour $g : X \rightarrow Z$ et $z : T \rightarrow Z$ des morphismes de $\mathcal{C}$, on pose

$$z \backslash X = z \backslash Z \times_Z X,$$

où le morphisme $z \backslash Z \rightarrow Z$ est le morphisme d'oubli. On appellera la seconde projection $z \backslash X \rightarrow X$ le *morphisme d'oubli*.

À $z : T \rightarrow Z$ fixé, on obtient un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}/Z &\rightarrow \mathcal{C} \\ (X, g : X \rightarrow Z) &\mapsto z \backslash X \end{aligned}$$

en composant les foncteurs

$$\mathcal{C}/Z \rightarrow \mathcal{C}/(z \backslash Z) \rightarrow \mathcal{C},$$

le foncteur de gauche étant le foncteur de changement de base le long du morphisme d'oubli $z \backslash Z \rightarrow Z$ et celui de droite le foncteur d'oubli.

De même, à $g : X \rightarrow Z$ fixé, on obtient un foncteur

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}/Z)^\circ &\rightarrow \mathcal{C} \\ (T, z : T \rightarrow Z) &\mapsto z \backslash X \end{aligned}$$

en composant les foncteurs

$$(\mathcal{C}/Z)^\circ \rightarrow \mathcal{C}/Z \rightarrow \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C},$$

le foncteur de gauche étant le foncteur du paragraphe précédent, celui du milieu le foncteur de changement de base le long de $g : X \rightarrow Z$ et celui de droite le foncteur d'oubli. Si

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{l} & T_2 \\ & \searrow z_1 & \swarrow z_2 \\ & Z & \end{array}$$

est un morphisme de (T_1, z_1) vers (T_2, z_2) dans $\mathcal{C}/Z$, on notera $l^* : z_2 \backslash X \rightarrow z_1 \backslash X$ le morphisme associé par ce foncteur.

2.7. Dans ce paragraphe, nous allons nous placer dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux. Rappelons la définition du joint simplicial (voir par exemple [21, section 3]). La catégorie des simplexes augmentée Δ_+ est munie d'une structure de catégorie monoïdale de produit monoïdal $\star$ induit par la somme ensembliste

$$\Delta_m \star \Delta_n = \Delta_m \amalg \Delta_n = \Delta_{m+1+n},$$

et d'objet unité $\emptyset = \Delta_{-1}$. La catégorie Δ_+ est naturellement une sous-catégorie pleine de $\widehat{\Delta}$ et on définit le *joint* $X \star Y$ de deux ensembles simpliciaux X et Y par la formule

$$X \star Y = \varinjlim_{\substack{\Delta_m \rightarrow X \\ \Delta_n \rightarrow Y}} \Delta_{m+1+n},$$

où Δ_m et Δ_n varient dans Δ_+ . On montre qu'on obtient ainsi une structure de catégorie monoïdale sur les ensembles simpliciaux d'objet unité l'ensemble simplicial vide. Par ailleurs, on vérifie que cette structure est localement bifermée. En particulier, si X est un ensemble simplicial, on en déduit l'existence d'un foncteur

$$\begin{array}{ccc} X \backslash \widehat{\Delta} & \rightarrow & \widehat{\Delta} \\ (Z, g : X \rightarrow Z) & \mapsto & g \backslash Z \end{array}$$

et de bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{X \backslash \widehat{\Delta}}((X \star Y, \iota_1), (Z, g)) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(Y, g \backslash Z).$$

Soient Z un ensemble simplicial et $z : \Delta_m \rightarrow Z$ un m -simplexe. En spécialisant la bijection ci-dessus au cas $X = \Delta_m$, $Y = \Delta_n$ et $g = z$, on obtient que les n -simplexes de $z \backslash Z$ correspondent aux morphismes $x : \Delta_{m+1+n} \rightarrow Z$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{m+1+n} & \xrightarrow{x} & Z \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow z & \\ \Delta_m & & \end{array},$$

où ι_1 désigne l'inclusion comme section initiale. C'est exactement la description de la tranche $z \backslash Z$ définie par des formules explicites dans le paragraphe 1.7. De plus, si $g : X \rightarrow Z$ est quelconque, on a $z \backslash X \simeq z \backslash Z \times_Z X$ pour les tranches au sens du présent paragraphe comme pour celles au sens du paragraphe 1.7 (voir le paragraphe 1.10). On en déduit que les tranches au sens de ces deux paragraphes coïncident.

Remarque 2.8. L'objet cosimplicial associé à la catégorie des ensembles simpliciaux munie du joint s'identifie au foncteur de Yoneda $\Delta \rightarrow \hat{\Delta}$. Ainsi, le foncteur nerf associé est l'identité.

Dans la suite de cette section, on suppose que $\mathcal{C}$ est localement fermée à gauche et admet des limites projectives finies. On note e un objet final de $\mathcal{C}$.

Proposition 2.9. Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et $x : \mathcal{O}_m \rightarrow X$ un m -simplexe de $N(X)$. On a un isomorphisme canonique

$$N(x \setminus X) \simeq x \setminus N(X),$$

naturel en x dans la catégorie des éléments $\Delta/N(X)$ de $N(X)$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} N(x \setminus X)_n &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}_n, x \setminus X) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_m \setminus \mathcal{C}}((\mathcal{O}_m \star \mathcal{O}_n, \iota_1), (X, x)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_m \setminus \mathcal{C}}((\mathcal{O}_{m+1+n}, \iota_1), (X, x)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\Delta_m \setminus \hat{\Delta}}((\Delta_{m+1+n}, \iota_1), (N(X), x)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\Delta_m \setminus \hat{\Delta}}((\Delta_m \star \Delta_n, \iota_1), (N(X), x)) \simeq (x \setminus N(X))_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 2.10. Si on suppose de plus que la catégorie $\mathcal{C}$ est cocomplète, le foncteur nerf $N : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\Delta}$ admet un adjoint à gauche $c : \hat{\Delta} \rightarrow \mathcal{C}$. On peut alors vérifier que ce foncteur c est monoïdal pour le joint simplicial et le produit monoïdal $\star$ de $\mathcal{C}$. On en déduit que la proposition précédente reste vraie si on remplace le m -simplexe $x : \mathcal{O}_m \rightarrow X$ par un morphisme $c(Y) \rightarrow X$ quelconque, où Y est un ensemble simplicial, le cas de la proposition précédente étant celui où $Y = \Delta_m$.

Corollaire 2.11. Soient $X \rightarrow Z$ un morphisme de $\mathcal{C}$ et $z : \mathcal{O}_m \rightarrow Z$ un m -simplexe de $N(Z)$. On a un isomorphisme canonique

$$N(z \setminus X) \simeq z \setminus N(X),$$

naturel en z dans la catégorie des éléments $\Delta/N(Z)$ de $N(Z)$ et en X dans $\mathcal{C}/Z$.

Démonstration. On a, en utilisant la proposition précédente et la commutation du nerf aux produits fibrés, des isomorphismes canoniques

$$N(z \setminus X) \simeq N(z \setminus Z \times_Z X) \simeq N(z \setminus Z) \times_{N(Z)} N(X) \simeq z \setminus N(Z) \times_{N(Z)} N(X) \simeq z \setminus N(X),$$

ce qui prouve l'assertion. $\square$

Proposition 2.12. La catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ permet un théorème A si et seulement si, pour tout morphisme $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, tout $m \geq 0$ et tout morphisme $z : \mathcal{O}_m \rightarrow Z$, le morphisme $m^* : z \setminus X \rightarrow z_m \setminus X$, associé en vertu du paragraphe 2.6 au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_0 & \xrightarrow{m} & \mathcal{O}_m \\ & \searrow z_m & \swarrow z \\ & Z & \end{array},$$

où m désigne l'image par $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ du morphisme $m : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$, est une équivalence faible de $\mathcal{C}$.

Démonstration. Par définition, la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ permet un théorème A si, pour tout morphisme $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$ et tout m -simplexe $z : \mathcal{O}_m \rightarrow Z$ de $N(Z)$, le morphisme $z \backslash N(X) \rightarrow z_m \backslash N(X)$, défini sur les n -simplexes par $(x, z') \mapsto (x, z'_{m, \dots, m+1+n})$, est une équivalence faible simpliciale. Or, ce morphisme n'est autre que le morphisme m^* , associé en vertu du paragraphe 2.6 au triangle

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{m} & \Delta_m \\ & \searrow z_m \quad \swarrow z & \\ & N(X) & \end{array},$$

pour $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles simpliciaux munie du joint. La naturalité de l'isomorphisme du corollaire 2.11 donne donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} N(z \backslash X) & \longrightarrow & N(z_m \backslash X) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ z \backslash N(X) & \longrightarrow & z_m \backslash N(X) \end{array},$$

où la flèche horizontale du haut est le nerf du morphisme de l'énoncé et celle du bas est le morphisme simplicial mentionné ci-dessus, ce qui entraîne le résultat. $\square$

Théorème 2.13 (Théorème A monoïdal). *On suppose que la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ permet un théorème A. Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \quad \swarrow h & \\ & Z & \end{array}$$

un triangle commutatif dans $\mathcal{C}$. Si pour tout morphisme $z : e \rightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, le morphisme $z \backslash X \rightarrow z \backslash Y$ induit par f est une équivalence faible de $\mathcal{C}$, alors il en est de même du morphisme f .

Démonstration. Puisque la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ permet un théorème A, on peut appliquer le théorème A cosimplicial (théorème 2.2) à l'objet cosimplicial associé. Pour montrer que f est une équivalence faible, il suffit donc de montrer que l'hypothèse de ce théorème est satisfaite, à savoir que, pour tout 0-simplexe z de $N(Z)$, le morphisme $z \backslash N(X) \rightarrow z \backslash N(Y)$ est une équivalence faible simpliciale. Or, en vertu de la proposition 2.11, ce morphisme s'identifie au nerf du morphisme $z \backslash X \rightarrow z \backslash Y$ de $\mathcal{C}$, qui est une équivalence faible par hypothèse, d'où le résultat. $\square$

Dans la suite de cette section, on va déduire le théorème A original de Quillen [25] du résultat précédent.

2.14. Rappelons la définition du joint de deux catégories (voir par exemple [22, section 3.1]). Celui-ci peut se définir essentiellement comme on l'a fait pour les ensembles simpliciaux au paragraphe 2.7. La catégorie des simplexes augmentée Δ_+ peut être considérée de manière évidente comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{Cat}$ des petites catégories. Si A et B sont deux petites catégories, on peut alors définir leur *joint* $A \star B$ par la formule

$$A \star B = \varinjlim_{\substack{\Delta_m \rightarrow A \\ \Delta_n \rightarrow B}} \Delta_{m+1+n},$$

où Δ_m et Δ_n varient dans Δ_+ . La catégorie $A \star B$ peut se décrire explicitement de la manière suivante : le graphe sous-jacent à $A \star B$ est obtenu à partir du graphe sous-jacent à $A \amalg B$ en

ajoutant, pour tout objet a de A et tout objet b de B , une flèche de a vers b ; les identités et composés sont définis de la manière évidente. En particulier, la catégorie $\Delta_0 \star A$ est la catégorie obtenue à partir de A en ajoutant librement un objet initial. On montre qu'on obtient bien ainsi une structure de catégorie monoïdale sur $\mathcal{Cat}$ d'objet unité la catégorie vide. Par ailleurs, on vérifie que cette structure est localement bifermée. En particulier, si A est une petite catégorie, on en déduit l'existence d'un foncteur

$$\begin{aligned} A \backslash \mathcal{Cat} &\rightarrow \mathcal{Cat} \\ (C, v : A \rightarrow C) &\mapsto v \backslash C \end{aligned}$$

et de bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{A \backslash \mathcal{Cat}}((A \star B, \iota_1), (C, v)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Cat}}(B, v \backslash C).$$

Soient C une petite catégorie et $c : \Delta_m \rightarrow C$ un foncteur pour un entier $m \geq 0$, c'est-à-dire une suite de flèches

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} c_m$$

de C . En spécialisant la bijection ci-dessus au cas $A = \Delta_m$, $B = \Delta_0$ et $v = c$, on obtient que les objets de $c \backslash C$ correspondent aux foncteurs $x : \Delta_{m+1} \rightarrow C$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{m+1} & \xrightarrow{x} & C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow c & \\ \Delta_m & & \end{array},$$

où ι_1 désigne l'inclusion comme section initiale, c'est-à-dire aux suites de flèches

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} c_m \xrightarrow{g} d.$$

De même, on obtient que les flèches de $c \backslash C$ correspondent aux suites de flèches

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} c_m \xrightarrow{g} d \xrightarrow{h} d',$$

et qu'une telle flèche a pour source

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} c_m \xrightarrow{g} d$$

et pour but

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_m} c_m \xrightarrow{hg} d'.$$

On vérifie enfin que les identités et les composés sont obtenus de la manière évidente. Il résulte de cette description que, d'une part, dans le cas $m = 0$ où c correspond à un objet de C , la catégorie $c \backslash C$ est la tranche usuelle et, d'autre part, le foncteur $c \backslash C \rightarrow c_m \backslash C$ induit par le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0 & \xrightarrow{m} & \Delta_m \\ & \searrow c_m & \swarrow c \\ & C & \end{array}$$

est un isomorphisme. On en déduit que, plus généralement, si $v : A \rightarrow C$ est un foncteur, le foncteur $c \backslash A \rightarrow c_m \backslash A$ induit par ce même triangle est un isomorphisme.

2.15. Considérons toujours la catégorie $\mathcal{Cat}$ munie du joint catégorique. L’objet cosimplicial $\Delta \rightarrow \mathcal{Cat}$ induit par cette structure de catégorie monoïdale est, essentiellement par définition, l’inclusion canonique. En particulier, le foncteur nerf associé $N : \mathcal{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ est le foncteur nerf usuel.

On appellera *équivalences de Thomason* les équivalences faibles associées, c’est-à-dire les foncteurs qui sont envoyés par le nerf usuel sur une équivalence faible simpliciale.

Proposition 2.16. *La catégorie $\mathcal{Cat}$ des petites catégories munie du joint catégorique permet un théorème A.*

Démonstration. Le paragraphe 2.14 montre que le morphisme de la proposition 2.12 est un isomorphisme. C’est donc une équivalence faible et on conclut par cette même proposition. $\square$

Théorème 2.17 (Théorème A de Quillen originel). *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array}$$

un triangle commutatif de foncteurs entre petites catégories. Si pour tout objet c de C , le foncteur $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même du foncteur u .

Démonstration. Cela résulte du théorème A monoïdal (théorème 2.13), qu’on peut appliquer en vertu de la proposition précédente. $\square$

3. Rappels sur la théorie de Steiner

Dans cette section, on rappelle brièvement quelques éléments de la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [26], ainsi que quelques compléments issus de [7]. On renvoie à [7, chapitre 2] pour des rappels plus complets.

3.1. On notera $\infty\text{-Cat}$ la catégorie des ∞ -catégories *strictes* et des ∞ -foncteurs *stricts* entre celles-ci. Sauf mention expresse du contraire, les ∞ -catégories et les ∞ -foncteurs considérés dans ce texte seront supposés stricts. Rappelons qu’une ∞ -catégorie C consiste en la donnée, pour tout $i \geq 0$, d’un ensemble C_i de i -cellules. Si x est une i -cellule pour un $i \geq 1$, on dispose de sa *source* $s(x)$ et de son *but* $t(x)$ qui sont deux $(i-1)$ -cellules. Si x est une i -cellule pour un $i \geq 0$, on dispose de son *identité* 1_x qui est une $(i+1)$ -cellule. Par ailleurs, pour $i > j \geq 0$ et x, y deux i -cellules telles que la j -cellule source itérée de x soit égale à la j -cellule but itéré de y , on dispose d’une i -cellule composée $x *_j y$. Ces données sont soumises à des axiomes qui doivent être vérifiés à égalité près (et non à des contraintes supérieures près).

3.2. Un *complexe dirigé augmenté* est un complexe de chaînes de groupes abéliens en degrés positifs augmenté

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+1}} K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \xrightarrow{e} \mathbb{Z}$$

muni, pour tout $i \geq 0$, d’un sous-monoïde K_i^* de K_i qu’on appellera *sous-monoïde de positivité*. Un *morphisme de complexes dirigés augmentés* est un morphisme de complexes de chaînes augmentés qui envoie les sous-monoïdes de positivité de sa source dans les sous-monoïdes de positivité de son but. On obtient ainsi une catégorie qu’on notera $\mathcal{C}_{\text{da}}$.

3.3. À toute ∞ -catégorie C , on associe un complexe dirigé augmenté $\lambda(C)$ de la manière suivante. Pour tout $i \geq 0$, le groupe abélien $\lambda(C)_i$ est engendré par des générateurs $[x]$, où x varie parmi les i -cellules de C , soumis aux relations $[x * y] = [x] + [y]$, où x et y varient parmi les i -cellules de C pour lesquelles le composé $x * y$ est défini. Le sous-monoïde de positivité $\lambda(C)_i^*$ est le sous-monoïde engendré par les $[x]$, où x varie parmi les i -cellules de C . Pour $i > 0$, la différentielle $d_i : \lambda(C)_i \rightarrow \lambda(C)_{i-1}$ est définie par

$$d_i([x]) = [t(x)] - [s(x)].$$

Enfin, l'augmentation $e : \lambda(C)_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie par $e([x]) = 1$.

On vérifie qu'on obtient ainsi un foncteur $\lambda : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}}$, l'action sur les morphismes étant définie de la manière évidente.

Proposition 3.4 (Steiner). *Le foncteur λ admet un adjoint à droite $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$.*

Démonstration. Voir [26, théorème 2.11]. □

3.5. Soit K un complexe dirigé augmenté. Pour $i \geq 0$, les i -cellules de $\nu(K)$, où ν désigne le foncteur de la proposition précédente, sont les tableaux

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_{i-1}^0 & x_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_{i-1}^1 & x_i^1 \end{pmatrix}$$

où

- (a) x_k^ε appartient à K_i^* pour $\varepsilon = 0, 1$ et $0 \leq k \leq i$;
- (b) $d(x_k^\varepsilon) = x_{k-1}^1 - x_{k-1}^0$ pour $\varepsilon = 0, 1$ et $0 < k \leq i$;
- (c) $e(x_0^\varepsilon) = 1$ pour $\varepsilon = 0, 1$;
- (d) $x_i^0 = x_i^1$.

Les opérations de la ∞ -catégorie $\nu(K)$ peuvent se décrire aisément en termes de ces tableaux mais nous n'aurons pas besoin de cette description dans ce texte.

3.6. Une *base* d'un complexe dirigé augmenté K est un ensemble gradué $B = (B_i)_{i \geq 0}$ tel que, pour tout $i \geq 0$,

- (a) B_i est une base du $\mathbb{Z}$ -module K_i ;
- (b) B_i engendre le sous-monoïde K_i^* de K_i .

On vérifie que si un complexe dirigé augmenté admet une base, cette base est unique.

3.7. Soit K un complexe admettant une base $B = (B_i)$. Si x est un élément de K_i , son *support* est l'ensemble des éléments de B_i qui apparaissent avec un coefficient non nul dans la décomposition de x selon la base B_i . Il est immédiat que tout élément x de K_i se décompose de manière unique en $x = x_+ - x_-$, où x_- et x_+ sont deux éléments de K_i^* à supports disjoints.

3.8. Soit K un complexe dirigé augmenté admettant une base. Si x est un élément de degré i de la base de K , on lui associe un tableau

$$\langle x \rangle = \begin{pmatrix} \langle x \rangle_0^0 & \langle x \rangle_1^0 & \dots & \langle x \rangle_{i-1}^0 & \langle x \rangle_i^0 \\ \langle x \rangle_0^1 & \langle x \rangle_1^1 & \dots & \langle x \rangle_{i-1}^1 & \langle x \rangle_i^1 \end{pmatrix},$$

où les $\langle x \rangle_k^\varepsilon$ sont définis par récurrence descendante sur k de i à 0 :

$$\text{— } \langle x \rangle_i^0 = x = \langle x \rangle_i^1;$$

— $\langle x \rangle_{k-1}^0 = d(\langle x \rangle_k^0)_-$ et $\langle x \rangle_{k-1}^1 = d(\langle x \rangle_k^1)_+$ pour $0 < k \leq i$.

Ce tableau est une cellule de $\nu(K)$ si et seulement si $e(\langle x \rangle_0^0) = 1 = e(\langle x \rangle_0^1)$.

On dit que la base B de K est *unitaire* si, pour tout $i \geq 0$ et tout x dans B_i , le tableau $\langle x \rangle$ est une i -cellule de $\nu(K)$.

3.9. Soit K un complexe dirigé augmenté admettant une base B . On notera $\leq_{\mathbb{N}}$ la plus petite relation de préordre sur B pour laquelle, pour tout $i \geq 1$ et tout x dans B_i , si y est dans le support de $d(x)_-$ et z est dans le support de $d(x)_+$, on a $y \leq_{\mathbb{N}} x \leq_{\mathbb{N}} z$.

On dira que la base B est *fortement sans boucle* si cette relation $\leq_{\mathbb{N}}$ est une relation d'ordre.

3.10. On appellera *complexe de Steiner fort* un complexe dirigé augmenté admettant une base unitaire et fortement sans boucle.

Théorème 3.11 (Steiner). *La restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à la sous-catégorie pleine formée des complexes de Steiner forts est un foncteur pleinement fidèle.*

Démonstration. Voir [26, théorème 5.6]. □

La notion suivante, introduite dans [7], joue un rôle technique dans les functorialités du joint ∞ -catégorique qu'on rappellera dans la section suivante.

3.12. Soit $i : K \rightarrow L$ un monomorphisme entre des complexes dirigés augmentés admettant une base. On dira que i est une *inclusion rigide ordonnée* si, d'une part, i envoie tout élément de la base de K sur un élément de la base de L et, d'autre part, si x et y sont des éléments de la base de K , on a $x \leq_{\mathbb{N}} y$ si et seulement si on a $f(x) \leq_{\mathbb{N}} f(y)$.

Terminons cette section par quelques rappels sur les antihomotopies de complexes dirigés augmentés.

3.13. Soient $f, g : K \rightarrow L$ deux morphismes de complexes dirigés augmentés. Une *antihomotopie* h de f vers g consiste en la donnée, pour tout $i \geq 0$, de morphismes de groupes abéliens $h_i : K_i \rightarrow L_{i+1}$ envoyant K_i^* dans L_{i+1}^* et vérifiant, pour tout $i \geq 0$,

$$d_{i+1}h_i - h_{i-1}d_i = (-1)^i(g_i - f_i),$$

en convenant que $h_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$, de sorte qu'on a $d_1h_0 = g_0 - f_0$ pour $i = 0$.

Si maintenant h et k sont deux antihomotopies de f vers g , une 2-antihomotopie H de h vers k consiste en la donnée, pour tout $i \geq 0$, de morphismes de groupes abéliens $H_i : K_i \rightarrow L_{i+2}$ envoyant K_i^* dans L_{i+2}^* et vérifiant, pour tout $i \geq 0$,

$$d_{i+2}H_i - H_{i-1}d_i = (-1)^i(k_i - h_i),$$

en convenant que $H_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$.

3.14. Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme de complexes dirigés augmentés. On notera 1_f l'antihomotopie de f vers f définie par $(1_f)_i = 0$ pour tout $i \geq 0$. De même, si h est une antihomotopie, on notera 1_h la 2-antihomotopie de h vers h définie par $(1_h)_i = 0$ pour tout $i \geq 0$.

On renvoie à la fin du chapitre 2 de [7] pour les définitions de diverses opérations de composition pour les antihomotopies et les 2-antihomotopies. Dans ce texte, nous manipulerons les antihomotopies et les 2-antihomotopies comme des morphismes de groupes abéliens gradués (de degré 1 et 2) en les additionnant et les composant degré par degré. Nous renverrons à [7] pour le fait que les formules que nous utiliserons définissent bien des antihomotopies ou des 2-antihomotopies.

4. Préliminaires ∞ -catégoriques : produit tensoriel, joint et tranches

Cette section est essentiellement un résumé de [7], avec quelques emprunts à [26]. Commençons par des rappels sur le produit tensoriel ∞ -catégorique introduit par Al-Agl et Steiner [1] et généralisant le produit de Gray 2-catégorique [16].

4.1. Soient K et L deux complexes dirigés augmentés. On définit leur *produit tensoriel* $K \otimes L$ de la manière suivante. Le complexe sous-jacent est le produit tensoriel usuel des complexes : pour tout $r \geq 0$, on pose

$$(K \otimes L)_r = \bigoplus_{\substack{p+q=r \\ p \geq 0, q \geq 0}} K_p \otimes L_q$$

et, pour $x \otimes y$ dans $K_p \otimes L_q$ avec $p + q > 0$,

$$d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d(y),$$

où on convient que $d(z) = 0$ lorsque z est de degré 0. L'augmentation, pour $x \otimes y$ dans $K_0 \otimes L_0$, est définie par

$$e(x \otimes y) = e(x)e(y).$$

Enfin, pour $r \geq 0$, le sous-monoïde de positivité $(K \otimes L)_r^*$ est le sous-monoïde de $(K \otimes L)_r$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$, avec x dans K_p^* , y dans L_q^* et $p + q = r$.

Proposition 4.2 (Steiner). *Si K et L sont des complexes de Steiner forts admettant respectivement X et Y pour base, alors $K \otimes L$ est un complexe de Steiner fort admettant*

$$X \otimes Y = \{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$$

pour base.

Démonstration. Voir [26, exemple 3.10]. □

4.3. Le produit tensoriel définit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie $\mathcal{C}_{\text{da}}$ des complexes dirigés augmentés. L'unité est le complexe dirigé augmenté $\lambda(D_0)$, où D_0 désigne la ∞ -catégorie terminale. En vertu de la proposition précédente (et du fait évident que $\lambda(D_0)$ est un complexe de Steiner fort), cette structure se restreint à la sous-catégorie pleine des complexes de Steiner forts.

Théorème 4.4. *Il existe une et une seule structure de catégorie monoïdale biformée (à unique isomorphisme monoïdal près) sur la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories telle que la restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\text{da}}$ formée des complexes de Steiner forts munie du produit tensoriel soit un foncteur monoïdal.*

Démonstration. Voir [7, théorème A.15]. □

4.5. On appellera *produit tensoriel* le produit monoïdal

$$\begin{aligned} \otimes : \infty\text{-Cat} \times \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (A, B) &\mapsto A \otimes B \end{aligned}$$

donné par le théorème précédent. L'unité de ce produit tensoriel est la ∞ -catégorie terminale D_0 .

Le fait que le produit tensoriel est bifermé signifie qu'il existe des foncteurs

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}} : \infty\text{-}\mathcal{C}at^{\circ} \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}} : \infty\text{-}\mathcal{C}at^{\circ} \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

tels qu'on ait des bijections

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(B, C))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(B, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, C)),$$

naturelles en A , B et C dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Le produit tensoriel est compatible aux principales dualités de $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ dont on rappelle maintenant les définitions.

4.6. Soit J un ensemble d'entiers strictement positifs. On dispose d'un ∞ -foncteur involutif $D_J : \infty\text{-}\mathcal{C}at \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at$ envoyant une ∞ -catégorie C sur la ∞ -catégorie $D_J(C)$ obtenue en inversant le sens des i -cellules pour tout i dans J .

Outre la dualité triviale (le cas $J = \emptyset$), trois dualités jouent un rôle particulièrement important en théorie des ∞ -catégories. Si J est l'ensemble de tous les entiers strictement positifs, on note C° la ∞ -catégorie $D_J(C)$ et on parle du *dual total* de C ; si J est l'ensemble des entiers impairs, on note C^{op} la ∞ -catégorie $D_J(C)$ et on parle du *dual impair* de C ; enfin, si J est l'ensemble des entiers pairs strictement positifs, on note C^{co} la ∞ -catégorie $D_J(C)$ et on parle du *dual pair* de C .

Proposition 4.7. Soient A et B deux ∞ -catégories. On a des isomorphismes canoniques

$$(A \otimes B)^{\mathrm{op}} \simeq B^{\mathrm{op}} \otimes A^{\mathrm{op}}, \quad (A \otimes B)^{\mathrm{co}} \simeq B^{\mathrm{co}} \otimes A^{\mathrm{co}} \quad \text{et} \quad (A \otimes B)^{\circ} \simeq A^{\circ} \otimes B^{\circ},$$

naturels en A et B .

Démonstration. Voir par exemple [7, proposition A.22]. □

Proposition 4.8. Soient A et B deux ∞ -catégories. On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)^{\mathrm{op}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}}), \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)^{\mathrm{co}} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A^{\mathrm{co}}, B^{\mathrm{co}})$$

et

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A, B)^{\circ} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(A^{\circ}, B^{\circ}),$$

naturels en A et B .

Démonstration. Voir par exemple [7, proposition A.23]. □

Passons maintenant à des rappels sur les transformations oplax. Commençons par introduire quelques notations.

4.9. Pour $i \geq 0$, on notera D_i la ∞ -catégorie coreprésentant le foncteur associant à une ∞ -catégorie C l'ensemble C_i de ses i -cellules. On a donc une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(D_i, C) \simeq C_i.$$

La ∞ -catégorie D_i est en fait une i -catégorie. Elle possède une unique i -cellule n'étant pas une identité qu'on appellera sa *cellule principale*. Pour k tel que $0 \leq k < i$, elle admet exactement deux i -cellules qui ne sont pas des identités ; ces cellules sont la source et le but itérés en dimension k de la cellule principale.

Pour $i > 0$, on notera σ et τ les ∞ -foncteurs de D_{i-1} vers D_i qui correspondent respectivement à la source et au but de la cellule principale de D_i . De même, si $i \geq 0$, on notera κ le ∞ -foncteur de D_{i+1} vers D_i correspondant à l'identité de la cellule principale de D_i .

4.10. Soient A et B deux ∞ -catégories. Pour $i \geq 0$, les i -cellules de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ seront appelées des *i -transformation oplax* de 0-source A et de 0-but B . En vertu de la bijection canonique

$$\mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(D_i, \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)) \simeq \mathbf{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(D_i \otimes A, B),$$

une i -transformation oplax s'identifie à un ∞ -foncteur $D_i \otimes A \rightarrow B$. Ainsi, pour $i = 0$, en vertu de l'isomorphisme $D_0 \otimes A \simeq A$, une 0-transformation oplax n'est autre qu'un ∞ -foncteur *strict* $A \rightarrow B$. On appellera *transformations oplax* les 1-transformations oplax. Pour $i > 0$, une i -transformation oplax $\Lambda : D_i \otimes A \rightarrow B$ a une $(i-1)$ -transformation oplax source $s(\Lambda)$ et une $(i-1)$ -transformation oplax but $t(\Lambda)$ obtenues en précomposant Λ par

$$\sigma \otimes A, \tau \otimes A : D_{i-1} \otimes A \rightarrow D_i \otimes A$$

respectivement, où σ et τ désignent les ∞ -foncteurs du paragraphe précédent.

En particulier, si u et v sont deux ∞ -foncteurs, une transformation oplax α de u vers v est un ∞ -foncteur $\alpha : D_1 \otimes A \rightarrow B$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \sigma \otimes A \downarrow & \searrow u & \\ D_1 \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \tau \otimes A \uparrow & \nearrow v & \\ A & & \end{array},$$

où on a identifié A et $D_0 \otimes A$.

De même, on définit une notion de *i -transformation lax* en remplaçant $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ par la ∞ -catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{lax}}(A, B)$. En vertu de la proposition 4.8, les i -transformations lax peuvent se définir par dualité à partir des i -transformations oplax (et réciproquement). En particulier, si $u, v : A \rightarrow B$ sont deux ∞ -foncteurs, une transformation lax de u vers v n'est rien d'autre qu'une transformation oplax de v^{op} vers u^{op} (ou de u^{co} vers v^{co}).

Remarque 4.11. La donnée d'une transformation oplax α entre deux ∞ -foncteurs de A vers B revient à la donnée, pour toute i -cellule x de A , d'une $(i+1)$ -cellule α_x de B avec des sources et buts prescrits et vérifiant des axiomes de compatibilités aux identités et compositions. C'est cette définition concrète qui est utilisée dans [7] (voir le paragraphe 1.9 pour la définition et le corollaire B.2.6 pour la comparaison).

4.12. Si $v : C \rightarrow D$ est un ∞ -foncteur, on notera 1_v la transformation oplax identité de v dans $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$. Explicitement, elle est donnée par le composé

$$D_1 \otimes C \xrightarrow{\kappa \otimes C} C \xrightarrow{v} D,$$

où κ désigne le ∞ -foncteur du paragraphe 4.9 et où on a identifié C et $D_0 \otimes C$.

Soient maintenant $v_0, v_1 : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs et α une transformation oplax de v_0 vers v_1 . Si $u : B \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, on notera $\alpha * u$ la transformation oplax de $v_0 u$ vers $v_1 u$ donnée par le composé

$$D_1 \otimes B \xrightarrow{D_1 \otimes u} D_1 \otimes C \xrightarrow{\alpha} D.$$

De même, si $w : D \rightarrow E$ est un ∞ -foncteur, on notera $w * \alpha$ la transformation oplax de $w v_0$ vers $w v_1$ donnée par le composé

$$D_1 \otimes C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{w} E.$$

4.13. Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & C & \xleftarrow{g} & B \\ u \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \Downarrow \end{array} \right) u' & w \left(\begin{array}{c} \gamma \\ \Downarrow \end{array} \right) w' & v \left(\begin{array}{c} \beta \\ \Downarrow \end{array} \right) v' \\ A' & \xrightarrow{f'} & C' & \xleftarrow{g'} & B' \end{array}$$

de ∞ -catégories, où α , β et γ sont des transformations oplax de u vers u' , de v vers v' et de w vers w' respectivement. On suppose le diagramme commutatif au sens où

$$\gamma * f = f' * \alpha \quad \text{et} \quad \gamma * g = g' * \beta.$$

On définit alors une transformation oplax $\alpha \times_{\gamma} \beta$ de $u \times_w v$ vers $u' \times_{w'} v'$ (qui sont deux ∞ -foncteurs de $A \times_C B$ vers $A' \times_{C'} B'$) par le composé

$$D_1 \otimes (A \times_C B) \rightarrow (D_1 \otimes A) \times_{D_1 \otimes C} (D_1 \otimes B) \xrightarrow{\alpha \times_{\gamma} \beta} A' \times_{C'} B',$$

où la flèche de gauche est le morphisme canonique et celle de droite est bien définie par l'hypothèse de commutativité du diagramme.

Un cas particulièrement important est celui où

$$B = B', \quad v = 1_B = v', \quad \beta = 1_{1_B}, \quad C = C', \quad w = 1_C = w', \quad \gamma = 1_{1_C},$$

c'est-à-dire celui d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ \alpha \Downarrow & & \Downarrow u' \\ A & \xrightarrow{f} & C \\ B \xrightarrow{g} & & C \end{array},$$

commutatif au sens où $f' * \alpha = 1_f$. Dans ce cas, on obtient une transformation oplax qu'on notera plus simplement $\alpha \times_C B$ de $u \times_C B$ vers $u' \times_C B$.

4.14. Soient $u_0, u_1, u_2 : C \rightarrow D$ trois ∞ -foncteurs et soient $\alpha : u_0 \Rightarrow u_1$ et $\beta : u_1 \Rightarrow u_2$ deux transformations oplax. On définit une transformation oplax $\beta \alpha : u_0 \Rightarrow u_2$ de la manière suivante. Par définition, les transformations oplax α et β sont des 1-cellules de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$, la première de source u_0 et de but u_1 , et la seconde de source u_1 et de but u_2 . La composition des 1-cellules de $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(C, D)$ fournit une 1-cellule de u_0 vers u_2 qui par définition est la transformation oplax $\beta \alpha : u_0 \Rightarrow u_2$.

4.15. On se gardera de croire que les ∞ -catégories, les ∞ -foncteurs et les transformations oplax munis des opérations de composition définies dans les paragraphes 4.12 et 4.14 forment une 2-catégorie. Ils forment néanmoins une sesquicatégorie (voir la définition B.16) que l'on notera $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. On renvoie à l'appendice B pour plus de détails et notamment à l'exemple B.3 et à la remarque B.17 pour une justification du fait que $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ est bien une sesquicatégorie.

Le but des paragraphes qui suivent est d'expliciter le lien entre les notions de transformation oplax et de transformation stricte.

4.16. Soient A et B deux ∞ -catégories. On dispose d'un ∞ -foncteur canonique $q_1 : A \otimes B \rightarrow A$ défini par le composé

$$A \otimes B \xrightarrow{A \otimes p} A \otimes D_0 \xrightarrow{\sim} A,$$

où p désigne l'unique ∞ -foncteur de B vers D_0 . De même, on dispose d'un ∞ -foncteur canonique $q_2 : A \otimes B \rightarrow B$. On obtient donc un ∞ -foncteur

$$q = (q_1, q_2) : A \otimes B \rightarrow A \times B.$$

Les ∞ -foncteurs q_1 et q_2 étant naturels en A et B , il en est de même de q .

Proposition 4.17. *Soient A et B deux ∞ -catégories. Le ∞ -foncteur*

$$q : A \otimes B \rightarrow A \times B$$

est surjectif sur les cellules et est en particulier un épimorphisme.

Démonstration. Fixons $i \geq 0$. Soient a une 0-cellule de A et y une i -cellule de B . Considérons le carré de naturalité

$$\begin{array}{ccc} D_0 \otimes D_i & \xrightarrow{q} & D_0 \times D_i \\ a \otimes y \downarrow & & \downarrow a \times y \\ A \otimes B & \xrightarrow{q} & A \times B \end{array} .$$

Il résulte du fait que D_0 est à la fois l'unité du produit cartésien et du produit tensoriel que la flèche horizontale du haut de ce carré est un isomorphisme. Ainsi, la i -cellule $(1_a, y)$ de $A \times B$, où 1_a désigne l'identité itérée de a en dimension i , est atteinte par le ∞ -foncteur q . Plus précisément, la i -cellule de $A \otimes B$ correspondant au ∞ -foncteur $a \otimes y$, cellule que l'on notera également $a \otimes y$, est envoyée sur $(1_a, y)$ par q . En particulier, le ∞ -foncteur $q : A \otimes B \rightarrow A \times B$ est surjectif sur les 0-cellules. On montre de même que si x est une i -cellule de A et b est une 0-cellule de B , alors q envoie $x \otimes b$ sur $(x, 1_b)$. Or, si (x, y) est une i -cellule de $A \times B$ avec $i > 0$, on a

$$(x, y) = (x, 1_{t_0(y)}) *_0 (1_{s_0(x)}, y),$$

où s_0 et t_0 désignent les sources et buts en dimension 0. Puisque

$$s_0(x \otimes t_0(y)) = s_0(x) \otimes t_0(y) = t_0(s_0(x) \otimes y),$$

on dispose d'une i -cellule $(x \otimes t_0(y)) *_0 (s_0(x) \otimes y)$ dans $A \otimes B$. En vertu des considérations précédentes, cette cellule est envoyée par q sur $(x, 1_{t_0(y)}) *_0 (1_{s_0(x)}, y)$, c'est-à-dire sur (x, y) , ce qu'il fallait démontrer. $\square$

4.18. Rappelons que la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories est cartésienne fermée. Si B et C sont deux ∞ -catégories, on notera $\underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(B, C)$ le Hom interne associé. Par définition, si A est une troisième ∞ -catégorie, on a une bijection

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A \times B, C) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A, \underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(B, C)),$$

naturelle en A , B et C .

Soient A et B deux ∞ -catégories. On déduit du ∞ -foncteur naturel q du paragraphe 4.16 un ∞ -foncteur $i : \underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(A, B) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ naturel en A et B . En effet, si T est une troisième ∞ -catégorie, en vertu du lemme de Yoneda, il suffit de définir une application naturelle

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T, \underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(A, B)) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T, \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)),$$

c'est-à-dire une application naturelle

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T \times A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T \otimes A, B).$$

Or, le ∞ -foncteur $q : T \otimes A \rightarrow T \times A$ induit bien une telle application. Par ailleurs, puisque q est un épimorphisme en vertu de la proposition précédente, le ∞ -foncteur i est un monomorphisme.

De même, on a un monomorphisme canonique $j : \underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(A, B) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(A, B)$, naturel en A et B dans $\infty\text{-Cat}$.

4.19. Soient A et B deux ∞ -catégories. Pour tout $i \geq 0$, on définit comme dans le paragraphe 4.10 une notion de *i-transformation stricte* de 0-source A et de 0-but B en remplaçant $\underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ par $\underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(A, B)$. Le monomorphisme $\underline{\text{Hom}}_{\text{str}}(A, B) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B)$ défini au paragraphe précédent permet de considérer toute *i-transformation stricte* comme une *i-transformation oplax*. En particulier, si $u, v : A \rightarrow B$ sont deux ∞ -foncteurs, une transformation stricte de u vers v est un ∞ -foncteur $h : D_1 \times A \rightarrow B$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \sigma \times A \downarrow & \searrow u & \\ D_1 \times A & \xrightarrow{h} & B \\ \tau \times A \uparrow & \nearrow v & \\ A & & \end{array},$$

où on a identifié A et $D_0 \times A$, et la transformation oplax associée est donnée par le composé

$$D_1 \otimes A \xrightarrow{q} D_1 \times A \xrightarrow{h} B,$$

où q est le ∞ -foncteur du paragraphe 4.16.

Nous terminons ces rappels liés au produit tensoriel par une proposition, de nature technique, qui n'interviendra que dans l'appendice B.

Proposition 4.20. Soient $f : K \rightarrow K'$ et $g : L \rightarrow L'$ des morphismes entre complexes de Steiner forts et soient $x \otimes y$ un élément de la base de $K \otimes L$. Supposons qu'il existe un élément $x' \otimes y'$ de la base de $K' \otimes L'$ tel que

$$\nu(f)(\langle x \rangle) = 1_{\langle x' \rangle} \quad \text{et} \quad \nu(f)(\langle y \rangle) = 1_{\langle y' \rangle},$$

où 1 désigne une identité itérée (éventuellement 0 fois). Alors on a

$$\nu(f \otimes g)(\langle x \otimes y \rangle) = 1_{\langle x' \otimes y' \rangle}.$$

En particulier, lorsque $x' = f(x)$ et $y' = g(y)$ vérifient les hypothèses ci-dessus, on a

$$\nu(f \otimes g)(\langle x \otimes y \rangle) = \langle f(x) \otimes g(y) \rangle.$$

Démonstration. Voir [7, proposition A.7]. □

Passons maintenant à des rappels sur le joint ∞ -catégorique introduit dans [7].

4.21. Soient K et L deux complexes dirigés augmentés. On définit leur *joint* $K \star L$ de la manière suivante. Pour tout $r \geq 0$, on pose

$$(K \star L)_r = \bigoplus_{\substack{p+1+q=r \\ p \geq -1, q \geq -1}} K_p \otimes L_q,$$

où on convient que $K_{-1} = \mathbb{Z}$ et $L_{-1} = \mathbb{Z}$. On notera $\emptyset$ le générateur positif de K_{-1} et L_{-1} . Par ailleurs, si x est dans K_p et y dans L_q avec $q+1+p \geq 0$, l'élément correspondant de $K \star L$ sera noté $x \star y$. Avec ces notations, la différentielle de $K \star L$ est définie par, pour $x \star y$ dans $K_p \otimes L_q$ avec $p+1+q > 0$,

$$d(x \star y) = d(x) \star y + (-1)^{p+1} x \star d(y),$$

où on convient, d'une part, que $d(z) = e(z)\emptyset$ lorsque z est de degré 0 et, d'autre part, que $d(\emptyset) = 0$. L'augmentation, pour x dans K_0 et y dans L_0 , est définie par

$$e(x \star \emptyset) = e(x) \quad \text{et} \quad e(\emptyset \star y) = e(y).$$

Enfin, pour $r \geq 0$, le sous-monoïde de positivité $(K \star L)_r^*$ est le sous-monoïde de $(K \star L)_r$ engendré par les éléments de la forme $x \star y$, avec x dans K_p^* , y dans L_q^* et $p+1+q = r$, en convenant que $K_{-1}^* = \mathbb{N}$ et $L_{-1}^* = \mathbb{N}$.

Proposition 4.22. *Si K et L sont des complexes de Steiner forts admettant X et Y pour bases respectives, alors $K \star L$ est un complexe de Steiner fort admettant*

$$X \star Y = \{x \star \emptyset \mid x \in X\} \cup \{\emptyset \star y \mid y \in Y\} \cup \{x \star y \mid x \in X, y \in Y\}$$

pour base.

Démonstration. Voir [7, paragraphe 6.13 et corollaire 6.21]. □

4.23. Le joint définit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie $\mathcal{C}_{\text{da}}$ des complexes dirigés augmentés. L'unité est le complexe dirigé augmenté $\lambda(\emptyset)$, où $\emptyset$ désigne la ∞ -catégorie initiale. On notera également $\emptyset$ ce complexe dirigé augmenté. En vertu de la proposition précédente (et du fait évident que $\emptyset$ est un complexe de Steiner fort), cette structure se restreint à la sous-catégorie pleine des complexes de Steiner forts.

Théorème 4.24. *Il existe une et une seule structure de catégorie monoïdale (à unique isomorphisme monoïdal près) localement bifermée (au sens du paragraphe 2.4) sur la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories telle que la restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\text{da}}$ formée des complexes de Steiner forts munie du joint soit un foncteur monoïdal.*

Démonstration. Voir [7, théorème 6.29]. □

4.25. On appellera *joint* le produit monoïdal

$$\begin{aligned} \star : \infty\text{-Cat} \times \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (A, B) &\mapsto A \star B \end{aligned}$$

donné par le théorème précédent. L'unité de ce produit tensoriel est la ∞ -catégorie initiale $\emptyset$.

On notera, comme dans le paragraphe 2.4, pour A et B deux ∞ -catégories,

$$A \xrightarrow{\iota_1} A \star B \xleftarrow{\iota_2} B$$

les deux ∞ -foncteurs canoniques. Le fait que le joint est localement bifermé signifie que les foncteurs

$$\begin{aligned} \infty\text{-Cat} &\rightarrow A \backslash \infty\text{-Cat} \\ B &\mapsto (A \star B, \iota_1 : A \rightarrow A \star B) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \infty\text{-Cat} &\rightarrow B \backslash \infty\text{-Cat} \\ A &\mapsto (A \star B, \iota_2 : B \rightarrow A \star B) \quad , \end{aligned}$$

pour A fixé pour le premier foncteur et B fixé pour le second, admettent des adjoints à droite. On obtient donc des foncteurs

$$\begin{aligned} A \backslash \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (C, A \xrightarrow{v} C) &\mapsto v \backslash C \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B \backslash \infty\text{-Cat} &\rightarrow \infty\text{-Cat} \\ (C, B \xrightarrow{w} C) &\mapsto \check{C}/w \end{aligned}$$

et des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A \backslash \infty\text{-Cat}}((A \star B, \iota_1), (C, v)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(B, v \backslash C), \\ \text{Hom}_{B \backslash \infty\text{-Cat}}((A \star B, \iota_2), (C, w)) &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(A, \check{C}/w). \end{aligned}$$

Si $v : A \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, la ∞ -catégorie $v \backslash C$ sera appelé la *tranche de C au-dessous de v* .

Remarque 4.26. Si $w : B \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, ce n'est pas la ∞ -catégorie $\check{C}/w$ qu'on appelle la tranche de C au-dessus de w dans [7] mais la ∞ -catégorie $C/w = (w^\circ \backslash C^\circ)^\circ$. Néanmoins, cette tranche n'interviendra pas dans ce texte. On renvoie à [7, remarque 6.37] pour plus de détails.

Proposition 4.27. Soient A et B deux ∞ -catégories. On a un isomorphisme canonique

$$(A \star B)^{\text{op}} \simeq B^{\text{op}} \star A^{\text{op}},$$

naturel en A et B .

Démonstration. Voir [7, proposition 6.35]. $\square$

Proposition 4.28. Soient C une ∞ -catégorie et $v : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur. On a un isomorphisme canonique

$$(v \backslash C)^{\text{op}} \simeq C^{\text{op}} / v^{\text{op}},$$

naturel en A et C .

Démonstration. Voir [7, proposition 6.36]. $\square$

4.29. Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . En considérant c comme un ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow C$, on obtient une ∞ -catégorie $c \backslash C$. Par adjonction, les i -cellules de $c \backslash C$ correspondent aux ∞ -foncteurs $D_0 \star D_i \rightarrow C$ rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} D_0 \star D_i & \longrightarrow & C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow c & \\ D_0 & & \end{array}$$

commutatif. On peut décrire explicitement ces ∞ -foncteurs et la structure de ∞ -catégorie résultante (voir [7, chapitre 9]). En particulier, lorsque C est une 1-catégorie, $c \backslash C$ est la 1-catégorie tranche usuelle. Dans ce texte, nous aurons seulement besoin de la description explicite des objets de $c \backslash C$. On a un isomorphisme canonique $D_0 \star D_0 \simeq D_1$ (cela résulte par exemple de [7, corollaire 7.10]) et les objets de $c \backslash C$ correspondent donc à des 1-cellules f de C de source c . On notera (c, f) un tel objet.

Par ailleurs, d'après [7, proposition B.5.2], la ∞ -catégorie $c \backslash C$ peut se décrire par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} c \backslash C & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_0 \\ D_0 & \xrightarrow{c} & C \end{array},$$

où π_0 désigne le ∞ -foncteur $\underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(\sigma, D_1) : \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_0, C) \simeq C$.

4.30. L'opération $C \mapsto D_0 \star C$ a une interprétation particulièrement simple en termes de transformations oplax. En effet, si A et B sont deux ∞ -catégories, en vertu de [7, paragraphe B.5.5 et corollaire B.5.6], on dispose d'un ∞ -foncteur $D_1 \otimes A \rightarrow D_0 \star A$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} D_1 \otimes A & \longrightarrow & D_0 \star A \\ \nwarrow \tau \otimes A & & \nearrow \iota_2 \\ & A & \end{array},$$

et un ∞ -foncteur $D_1 \otimes A \rightarrow B$ se factorise par $D_0 \star A$ si et seulement si sa source en tant que transformation oplax est un ∞ -foncteur constant, cette valeur constante correspondant alors au composé $D_0 \xrightarrow{\iota_1} D_0 \star A \rightarrow B$.

En particulier, si C est une ∞ -catégorie, se donner une transformation oplax d'un ∞ -endofoncteur constant de C vers l'identité de C revient à se donner un ∞ -foncteur $D_0 \star C \rightarrow C$ rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} D_0 \star C & \longrightarrow & C \\ \uparrow \iota_2 & \nearrow 1_C & \\ C & & \end{array}$$

commutatif. Par adjonction, il revient au même de se donner un objet c de C et un ∞ -foncteur $C \rightarrow c \backslash C$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & c \backslash C \\ & \searrow 1_C & \downarrow U \\ & & C \end{array},$$

où U désigne le ∞ -foncteur d'oubli.

Nous terminons cette section par des rappels sur les résultats de fonctorialités des tranches établis dans [7, chapitre 11], qui sont centraux à la démonstration du théorème A ∞ -catégorique présentée dans ce texte.

Dans la suite de cette section, on fixe une ∞ -catégorie C , un complexe de Steiner fort L et un ∞ -foncteur $b : \nu(L) \rightarrow C$.

4.31. Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow g \quad \swarrow h \quad \nearrow g' & \\ & L & \end{array},$$

où K et K' sont des complexes de Steiner forts, f et g sont des morphismes de complexes dirigés augmentés quelconques, g' est une inclusion rigide ordonnée (voir le paragraphe 3.12) et h est une antihomotopie de g vers $g'f$. Le théorème 11.2.2 de [7] associe à un tel diagramme un ∞ -foncteur

$$(f, h, b)^* : c' \backslash C \rightarrow c \backslash C,$$

où on a posé

$$c = b\nu(g) \quad \text{et} \quad c' = b\nu(g').$$

La définition précise de ce ∞ -foncteur ne jouera aucun rôle dans ce texte et nous utiliserons seulement quelques propriétés que nous allons maintenant rappeler.

Proposition 4.32. *Le ∞ -foncteur $(f, h, b)^*$ du paragraphe précédent est au-dessus de C au sens où le triangle*

$$\begin{array}{ccc} c' \backslash C & \xrightarrow{(f, h, b)^*} & c \backslash C \\ & \searrow & \swarrow \\ & C & \end{array},$$

où les flèches obliques désignent les ∞ -foncteurs d'oubli, est commutatif.

Démonstration. Voir [7, proposition 11.3.6]. □

Proposition 4.33. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow g \quad \swarrow 1_g \quad \nearrow g' & \\ & L & \end{array}$$

un diagramme commutatif de complexes de Steiner forts, avec g' une inclusion rigide ordonnée. Alors on a

$$(f, 1_g, b)^* = \nu(f)^*,$$

où $\nu(f)^*$ est le ∞ -foncteur associé au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \nu(K) & \xrightarrow{\nu(f)} & \nu(K') \\ & \searrow c & \swarrow c' \\ & C & \end{array}$$

en vertu du paragraphe 2.5.

Démonstration. Voir [7, proposition 11.2.5]. $\square$

Proposition 4.34. Soit $g : K \rightarrow L$ une inclusion rigide ordonnée entre complexes de Steiner forts. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{1_K} & K \\ & \searrow g & \swarrow g \\ & L & \end{array}.$$

Alors on a

$$(1_K, 1_g, b)^* = 1_{c \setminus C}.$$

Démonstration. Voir [7, proposition 11.3.2]. (Le résultat est en fait une conséquence directe de la proposition précédente.) $\square$

Proposition 4.35. Soit

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{f} & K' & \xrightarrow{f'} & K'' \\ & \searrow h & \downarrow g' & \swarrow h' & \\ & & L & & \end{array}$$

un diagramme de complexes de Steiner forts, où g' et g'' sont des inclusions rigides ordonnées, et h et h' sont des antihomotopies de g vers $g'f$ et de g' vers $g''f'$ respectivement. Considérons le diagramme composé

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f'f} & K' \\ & \searrow g & \swarrow g'' \\ & L & \end{array},$$

où $h'' = h'f + h$. Alors on a

$$(f, h, b)^*(f', h', b)^* = (f'f, h'f + h, b)^*.$$

Démonstration. Voir [7, proposition 11.3.4]. $\square$

4.36. Considérons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f'} & K' \\ & \searrow f & \swarrow k \\ & & H \\ & \searrow h' & \swarrow h \\ & L & \end{array},$$

où K et K' sont des complexes de Steiner forts, f , f' et g sont des morphismes de complexes dirigés augmentés quelconques, g' est une inclusion rigide ordonnée, h , h' et k sont des antihomotopies de g vers $g'f$, de g vers $g'f'$ et de f vers f' respectivement et H est une 2-antihomotopie de $g'k + h$ vers h' (qui sont deux antihomotopies de g vers $g'f'$). Le théorème 11.4.2 de [7] associe à un tel diagramme une transformation oplax

$$(k, H, b)^* : c' \backslash C \begin{array}{c} \xrightarrow{(f', h', b)^*} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(f, h, b)^*} \end{array} c \backslash C \quad ,$$

où on pose toujours

$$c = b\nu(g) \quad \text{et} \quad c' = b\nu(g').$$

Ici encore, la définition précise de cette transformation oplax ne jouera aucun rôle dans ce texte et nous utiliserons seulement quelques propriétés que nous allons maintenant rappeler.

Proposition 4.37. *La transformation oplax $(k, H, b)^*$ du paragraphe précédent est au-dessus de C au sens où on a*

$$U * (k, H, b)^* = 1_{U'},$$

où $U : c \backslash C \rightarrow C$ et $U' : c' \backslash C \rightarrow C$ désignent les ∞ -foncteurs d'oubli.

Démonstration. Voir [7, proposition 11.5.6]. □

Proposition 4.38. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow g \quad \swarrow g' & \\ & L & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \end{array}$$

un diagramme de complexes de Steiner forts, avec g' une inclusion rigide ordonnée et h une antihomotopie de g vers $g'f$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow g \quad \swarrow g' & \\ & L & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{h} \end{array}$$

Alors on a

$$(1_f, 1_h, b)^* = 1_{(f, h, b)^*}.$$

Démonstration. Voir [7, proposition 11.5.2]. □

Proposition 4.39. *Soit*

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{f} & K' & \xrightarrow{f''} & K'' \\ & \searrow g \quad \swarrow g' & \downarrow h' & \swarrow g'' & \\ & L & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{H} \end{array}$$

un diagramme de complexes de Steiner forts, où g' et g'' sont des inclusions rigides ordonnés, h , h' , h'' et k sont des antihomotopies de g vers $g'f$, de g' vers $g'f'$, de g' vers $g''f''$ et de f' vers f'' respectivement et H est une 2-antihomotopie de $g''k + h'$ vers h'' (qui sont deux antihomotopies de g' vers $g''f''$). Considérons le diagramme composé

$$\begin{array}{ccc} & f''f & \\ K & \xrightarrow{f''f} & K'' \\ & \uparrow f'f \quad \uparrow kf & \\ & g & g'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & L & \end{array},$$

la 2-cellule courbée de devant étant l'antihomotopie $h'f + h$, celle de derrière l'antihomotopie $h''f + h$ et la 3-cellule la 2-antihomotopie Hf . Alors le composé

$$c'' \setminus C \begin{array}{c} \xrightarrow{(f'', h'', b)^*} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(f', h', b)^*} \end{array} c' \setminus C \xrightarrow{(f, h, b)^*} c \setminus C, \quad ,$$

où la 2-cellule du diagramme est $(k, H, b)^*$ et où on a posé

$$c = b\nu(g), \quad c' = b\nu(g') \quad \text{et} \quad c'' = b\nu(g''),$$

est égal à

$$(kf, Hf, b)^* : c'' \setminus C \begin{array}{c} \xrightarrow{(f''f, h''f+h, b)^*} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(f'f, h'f+h, b)^*} \end{array} c \setminus C.$$

Autrement dit, on a

$$(f, h, b)^* * (k, H, b)^* = (kf, Hf, b)^*.$$

Démonstration. Voir [7, proposition 11.5.4]. □

Proposition 4.40. Soit

$$\begin{array}{ccccc} & f' & & & \\ K & \xrightarrow{f'} & K' & \xrightarrow{f''} & K'' \\ & \uparrow f & \uparrow k & & \\ & g & g' & g'' & \\ & \searrow & \swarrow & \swarrow & \\ & L & & & \end{array}$$

un diagramme de complexes de Steiner forts, où g' et g'' sont des inclusions rigides ordonnées, h , h' , h'' et k sont des antihomotopies de g vers $g'f$, de g vers $g'f'$, de g' vers $g''f''$ et de f vers f' respectivement et H est une 2-antihomotopie de $g''k + h$ vers h' (qui sont deux antihomotopies de g vers $g'f'$). Considérons le diagramme composé

$$\begin{array}{ccc} & f''f' & \\ K & \xrightarrow{f''f'} & K'' \\ & \uparrow f''f \quad \uparrow f''k & \\ & g & g'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & L & \end{array},$$

la 2-cellule courbée de devant étant l'antihomotopie $h''f + h$, celle de derrière l'antihomotopie $h''f + h'$ et la 3-cellule la 2-antihomotopie $h''k + H$. Alors le composé

$$c'' \setminus C \xrightarrow{(f'', h'', b)^*} c' \setminus C \begin{array}{c} \xrightarrow{(f', h', b)^*} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(f, h, b)^*} \end{array} c' \setminus C \quad ,$$

où la 2-cellule du diagramme est $(k, H, b)^*$ et où on pose toujours

$$c = b\nu(g), \quad c' = b\nu(g') \quad \text{et} \quad c'' = b\nu(g''),$$

est égal à

$$(f''k, h''k + H, b)^* : c'' \setminus C \begin{array}{c} \xrightarrow{(f''f', h''f' + h', b)^*} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{(f''f, h''f + h, b)^*} \end{array} c \setminus C \quad .$$

Autrement dit, on a

$$(k, H, b)^* * (f'', h'', b)^* = (f''k, h''k + H, b)^*.$$

Démonstration. Voir [7, proposition 11.5.8]. □

Remarque 4.41. Les transformations oplax $(k, H, b)^*$ sont également compatibles à la composition verticale des cônes (voir [7, proposition 11.5.10]) mais nous n'aurons pas besoin de cette functorialité dans ce texte. L'ensemble de ces résultats de functorialités des tranches peut s'exprimer par l'existence d'un sesquifoncteur. La source de ce sesquifoncteur est liée à la construction de la sesquicatégorie tranche d'une ∞ -catégorie de Gray qui sera étudiée dans l'appendice B. D'ailleurs, la 2-antihomotopie $h''k$ apparaissant dans la proposition précédente est la « contrainte de Gray » pour la composition horizontale des antihomotopies k et h'' .

5. Un théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs

5.1. Considérons la catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories munie du joint ∞ -catégorique. À cette catégorie monoïdale, le paragraphe 2.3 associe un foncteur

$$\mathcal{O}_+ : \Delta_+ \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

défini par

$$\Delta_n \mapsto \mathcal{O}_n = \mathcal{O}_0 \star \cdots \star \mathcal{O}_0,$$

où $\mathcal{O}_0 = D_0$ apparaît $n + 1$ fois, ainsi que, par restriction, un objet cosimplicial

$$\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

et donc un foncteur nerf

$$N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$$

défini par

$$C \mapsto (\Delta_n \mapsto \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, C)).$$

On appellera $\mathcal{O}_n$ le n -ième *oriental* et N le *nerf de Street*. Ces objets coïncident avec ceux définis par Street dans [28] en vertu de [7, chapitre 7]. En particulier, on a

$$\mathcal{O}_0 = D_0 = \bullet, \quad \mathcal{O}_1 = D_1 = \bullet \longrightarrow \bullet \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_2 = \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ & \searrow \Rightarrow \swarrow & \\ & \bullet & \end{array}.$$

On dira qu'un ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ est une *équivalence de Thomason* si u est une équivalence faible au sens du paragraphe 2.3, c'est-à-dire si son nerf $N(u)$ est une équivalence faible simpliciale. On dira qu'une ∞ -catégorie C est *asphérique* si l'unique ∞ -foncteur de C vers la ∞ -catégorie terminale est une équivalence de Thomason.

Proposition 5.2. *Soit C une ∞ -catégorie. On a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux*

$$N(C^{\text{op}}) \simeq N(C)^{\text{op}},$$

naturel en C .

Démonstration. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale de produit tensoriel $\otimes$, on appellera dans cette preuve *transposée* de $\mathcal{C}$ la catégorie monoïdale ${}^t\mathcal{C}$ de même catégorie sous-jacente et de produit tensoriel $(X, Y) \mapsto Y \otimes X$. Notons que la transposée est fonctorielle sur les foncteurs monoïdaux de manière évidente. Avec cette terminologie, la proposition 4.27 affirme que la dualité ∞ -catégorique $C \mapsto C^{\text{op}}$ est un foncteur monoïdal de la catégorie $\infty\text{-Cat}$ munie du joint vers sa transposée. De même, l'automorphisme D_{Δ_+} de la catégorie Δ_+ (voir le paragraphe 1.3) est un foncteur monoïdal de Δ_+ munie de la somme ensembliste vers sa transposée. Ainsi, on dispose d'un carré

$$\begin{array}{ccc} \Delta_+ & \xrightarrow{\mathcal{O}_+} & \infty\text{-Cat} \\ D_{\Delta_+} \downarrow & & \downarrow \text{op} \\ {}^t\Delta_+ & \xrightarrow{{}^t\mathcal{O}_+} & {}^t\infty\text{-Cat} \end{array}$$

de foncteurs monoïdaux, les structures de catégories monoïdales étant celles mentionnées ci-dessus. Nous allons montrer que ce carré est commutatif à isomorphisme canonique près. Notons que les deux foncteurs que l'on veut comparer envoient Δ_0 sur D_0 . Ainsi, en vertu de la propriété universelle de Δ_+ [23, chapitre VII, section 5], chacun de ces foncteurs monoïdaux correspond à une structure de monoïde sur D_0 dans ${}^t\infty\text{-Cat}$. Or, D_0 étant un objet final, il existe une unique telle structure. La propriété universelle de Δ_+ fournit donc l'isomorphisme recherché.

Par restriction, on obtient un isomorphisme entre les objets cosimpliciaux en ∞ -catégories $\mathcal{O} \circ D_{\Delta}$ et $\text{op} \circ \mathcal{O}$. Ainsi, les deux foncteurs nerfs associés sont canoniquement isomorphes. Or, le foncteur nerf associé au premier objet cosimplicial envoie une ∞ -catégorie C sur

$$N(C) \circ D_{\Delta} = N(C)^{\text{op}},$$

alors que le foncteur nerf associé au second envoie C sur

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_{\bullet}^{\text{op}}, C) \simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_{\bullet}, C^{\text{op}}) \simeq N(C^{\text{op}}),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5.3. *Un ∞ -foncteur $u : A \rightarrow B$ est une équivalence de Thomason si et seulement si $u^{\text{op}} : A^{\text{op}} \rightarrow B^{\text{op}}$ en est une.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition précédente et du fait que la classe des équivalences faibles simpliciales est stable par la dualité $X \mapsto X^{\text{op}}$. $\square$

Notre but est maintenant de montrer que la catégorie $\infty\text{-Cat}$ munie du joint permet un théorème A au sens du paragraphe 2.3.

5.4. Soit $i : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Une *structure de rétracte par transformation oplax à gauche* (resp. à droite) sur i consiste en la donnée de :

- (a) une rétraction $r : B \rightarrow A$ de i (de sorte qu'on a $ri = 1_A$) ;
- (b) une transformation oplax α de ir vers 1_B (resp. de 1_B vers ir).

On omettra parfois les indications « à gauche » ou « à droite » dans les énoncés abstraits qui sont valables pour les deux variantes (à condition de rester cohérent dans un même énoncé).

Si on dispose d'un ∞ -foncteur $q : B \rightarrow C$, on dira que la structure est *au-dessus de C* si on a

$$qir = q \quad \text{et} \quad q * \alpha = 1_q.$$

En particulier, on pourra utiliser cette notion pour $C = A$ et $q = r$ (auquel cas, l'égalité $qir = q$ est automatique). De même, si on dispose d'un ∞ -foncteur $j : C \rightarrow B$, on dira que la structure est *au-dessous de C* si on a

$$irj = j \quad \text{et} \quad \alpha * j = 1_j.$$

Le cas où $C = A$ et $j = i$ (ce qui entraîne l'égalité $irj = j$) est particulièrement important : dans ce cas, on dira que la structure est *forte*.

On dit que i est un *rétracte par transformation oplax à gauche* (resp. à droite) si i admet une structure de rétracte par transformation oplax à gauche (resp. à droite). On qualifiera un tel rétracte d'*au-dessus de C*, d'*au-dessous de C* ou de *forte* en fonction des propriétés des structures que i peut admettre.

On appellera *rétraction d'un rétracte par transformation oplax* non pas n'importe quelle rétraction d'un tel rétracte mais une rétraction r faisant partie d'une structure (r, α) .

Toutes les notions introduites dans ce paragraphe admettent également des variantes lax obtenues en remplaçant la transformation oplax α par une transformation lax.

5.5. Soit C une ∞ -catégorie. En vertu du paragraphe 4.30, la donnée d'une structure de rétracte par transformation oplax à gauche sur un ∞ -foncteur $c : D_0 \rightarrow C$ correspondant à un objet c de C est équivalente à celle d'un ∞ -foncteur $D_0 \star C \rightarrow C$ au-dessous de C tel que $D_0 \xrightarrow{!_1} D_0 \star C \rightarrow C$ soit c , ou encore à celle d'un ∞ -foncteur $C \rightarrow {}_c C$ au-dessus de C .

On vérifie qu'une telle structure est forte si et seulement si, dans la première description, le composé

$$D_0 \star D_0 \xrightarrow{D_0 \star c} D_0 \star C \longrightarrow C$$

correspond à la 1-cellule 1_c de C (rappelons qu'on a $D_0 \star D_0 \simeq D_1$) ou, dans la deuxième description, le composé

$$D_0 \xrightarrow{c} C \rightarrow {}_c C$$

correspond à l'objet $(c, 1_c)$ de ${}_c C$.

Proposition 5.6. *Si $i : A \rightarrow B$ est un rétracte par transformation oplax au-dessus d'une ∞ -catégorie C , alors tout changement de base de i au-dessus de C est un rétracte par transformation oplax. Autrement dit, pour tout ∞ -foncteur $D \rightarrow C$, le ∞ -foncteur*

$$i \times_C D : A \times_C D \rightarrow B \times_C D$$

est un rétracte par transformation oplax.

Plus précisément, si (r, α) est une structure de rétracte par transformation oplax sur i au-dessus de C , alors $(r \times_C D, \alpha \times_C D)$ est une structure de rétracte par transformation oplax sur $i \times_C D$ au-dessus de D . De plus, si la structure (r, α) est au-dessous d'une ∞ -catégorie E , alors la nouvelle structure est au-dessous de $E \times_C D$.

Démonstration. Puisque r est au-dessus de C , le ∞ -foncteur $r \times_C D$ a un sens et est bien une rétraction de $i \times_C D$ par fonctorialité du changement de base. De plus, α étant au-dessus de C , le transformation oplax $\alpha \times_C D$ a également un sens en vertu du paragraphe 4.13 et on conclut de nouveau par fonctorialité du changement de base. $\square$

Proposition 5.7. *Un rétracte par transformation oplax est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. C'est un cas particulier du corollaire A.13. $\square$

Corollaire 5.8. *Un rétracte par transformation oplax au-dessus d'une ∞ -catégorie C , de même que la rétraction d'un tel rétracte, est une équivalence de Thomason et le reste après tout changement de base au-dessus de C .*

Démonstration. Cela résulte des deux propositions précédentes. $\square$

5.9. Soit $i : K \rightarrow L$ un morphisme de complexes dirigés augmentés. Une *structure de rétracte par antihomotopie fort* sur i est la donnée de :

- (a) une rétraction $r : L \rightarrow K$ de i ;
- (b) une antihomotopie h de 1_L vers ir vérifiant $hi = 0$.

Si $rh = 0$, on dira que la structure est *au-dessus de K* . Si $hh = 0$, on parlera de *structure de rétracte par antihomotopie de carré nul fort*.

On dira que i est un *rétracte par antihomotopie fort* s'il admet une structure de rétracte par antihomotopie fort. On qualifiera i de *rétracte par antihomotopie de carré nul fort* ou *au-dessus de K* en fonction des propriétés des structures que i peut admettre.

Remarque 5.10. Tout comme la notion de rétracte par transformation ∞ -catégorique du paragraphe 5.4, la définition du paragraphe précédent admet de nombreuses variantes. On a ici privilégié les structures fortes, à droite et les antihomotopies (qui correspondent aux transformations lax, voir [7, remarque B.4.11]). La condition « de carré nul », qu'on n'a pas introduite dans le contexte ∞ -catégorique même si elle a également un sens, correspond à la trivialité d'une « contrainte de Gray ».

La proposition suivante est le cœur de la démonstration présentée dans ce texte du théorème A ∞ -catégorique. Elle repose sur les résultats de fonctorialité des tranches rappelés dans la section précédente.

Proposition 5.11. *Soit $i : K \rightarrow L$ une inclusion rigide ordonnée entre complexes de Steiner forts qui est un rétracte par antihomotopie de carré nul fort au-dessus de K et soit C une ∞ -catégorie munie d'un ∞ -foncteur $b : \nu(L) \rightarrow C$. Posons $c = b\nu(i)$ et $c' = b$. Alors le foncteur $\nu(i)^* : c' \backslash C \rightarrow c \backslash C$ (du paragraphe 2.5) est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à gauche fort au-dessus de C .*

Démonstration. Notons tout d'abord que, d'après la proposition 4.33, le ∞ -foncteur $\nu(i)^*$ coïncide avec le ∞ -foncteur $(i, 1_i, b)^*$ associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & L \\ & \searrow i & \nearrow \\ & L & \end{array}$$

en vertu du paragraphe 4.31. Soit (r, h) une structure de rétracte par antihomotopie fort sur i et soit $(r, h, b)^*$ le ∞ -foncteur associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{r} & K \\ & \searrow h & \nearrow i \\ & L & \end{array}$$

en vertu du paragraphe 4.31. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{r} & K \\ & \searrow i & \parallel h & \nearrow i & \\ & & L & & \end{array} .$$

D'après la proposition 4.35, on a

$$(i, 1_i, b)^*(r, h, b)^* = (ri, hi, b)^* = (1_K, 1_{1_K}, b)^* = 1_{c \setminus C},$$

la dernière égalité résultant de la proposition 4.34, et $(i, 1_i, b)^*$ est donc une rétraction de $(r, h, b)^*$. On obtient de même, en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{r} & K & \xrightarrow{i} & L \\ & \searrow h & \parallel i & \nearrow & \\ & & L & & \end{array} ,$$

l'égalité

$$(r, h, b)^*(i, 1_i, b)^* = (ir, h, b)^*.$$

Par ailleurs, la construction du paragraphe 4.36 associe au diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{ir} & L \\ & \searrow h & \nearrow \\ & L & \end{array} ,$$

une transformation oplax $(h, 1_h, b)^*$ de $(ir, h, b)^*$ vers $(1_L, 1_{1_L}, b)^* = 1_{c' \setminus C}$. Cette transformation est au-dessus de C en vertu de la proposition 4.37.

Supposons enfin que $rh = 0$ et $hh = 0$, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{ir} & L & \xrightarrow{r} & K \\ & \searrow h & \parallel h & \nearrow i & \\ & & L & & \end{array} .$$

La proposition 4.40 entraîne qu'on a

$$(h, 1_h, b)^* * (r, h, b)^* = (rh, hh, b)^* = (1_r, 1_h, b)^* = 1_{(r, h, b)^*},$$

la dernière égalité résultant de la proposition 4.38, d'où le résultat. $\square$

Remarque 5.12. On a montré plus précisément que si (r, h) est une structure de rétracte par antihomotopie fort sur i , alors $((i, 1_i, b)^*, (h, 1_h, b)^*)$ est une structure de rétracte par transformation oplax à gauche au-dessus de C sur $(r, h, b)^*$ et que si, de plus, la structure (r, h) est au-dessus de K et l'antihomotopie h est de carré nul, alors la structure $((i, 1_i, b)^*, (h, 1_h, b)^*)$ est forte.

Corollaire 5.13. *Soit $i : K \rightarrow L$ une inclusion rigide ordonnée entre complexes de Steiner forts qui est un rétracte par antihomotopie de carré nul fort au-dessus de K et soient $u : A \rightarrow C$ et $b : \nu(L) \rightarrow C$ des ∞ -foncteurs. Posons $c = b\nu(i)$ et $c' = b$. Alors le ∞ -foncteur $\nu(i)^* : c' \setminus A \rightarrow c \setminus A$ (du paragraphe 2.6) est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à gauche fort au-dessus de A et, en particulier, une équivalence de Thomason.*

Démonstration. Le ∞ -foncteur $\nu(i)^* : c' \setminus A \rightarrow c' \setminus A$ s'obtient par définition comme changement de base le long de $A \rightarrow C$ du ∞ -foncteur $\nu(i)^* : c' \setminus C \rightarrow c \setminus C$ (du paragraphe 2.5). Or ce dernier ∞ -foncteur est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à gauche fort au-dessus de C d'après la proposition précédente. Le résultat découle donc des propositions 5.6 et 5.7. $\square$

5.14. Considérons la catégorie $\mathcal{C}_{\text{da}}$ des complexes dirigés augmentés munie du joint des complexes. En vertu du paragraphe 2.3, on associe à cette catégorie monoïdale un objet cosimplicial

$$c : \Delta \rightarrow \mathcal{C}_{\text{da}}$$

défini par

$$\Delta_n \mapsto c(\Delta_n) = c(\Delta_0) \star \cdots \star c(\Delta_0),$$

où $c(\Delta_0) = \lambda(D_0)$ apparaît $n + 1$ fois. Notons que, d'après la proposition 4.22, le complexe $c(\Delta_n)$ est un complexe de Steiner fort. Ainsi, il résulte du fait que la restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ aux complexes de Steiner forts est monoïdale pour le joint que l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ du paragraphe 5.1 se factorise (à isomorphisme canonique près) en

$$\Delta \xrightarrow{c} \mathcal{C}_{\text{da}} \xrightarrow{\nu} \infty\text{-Cat}.$$

En particulier, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{O}_n \simeq \nu(c(\Delta_n))$ qu'on considérera comme une égalité.

5.15. Fixons $n \geq 0$. Le complexe dirigé augmenté $c(\Delta_n)$ du paragraphe précédent peut se décrire explicitement de la manière suivante (voir [7, paragraphe 7.3 et remarque 7.7]). Pour $p \geq 0$, le groupe abélien $c(\Delta_n)_p$ est le groupe abélien libre sur l'ensemble

$$B_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leq i_0 < \cdots < i_p \leq n\}.$$

Si $p \geq 1$ et si $(i_0, \dots, i_p)$ est dans B_p , on a

$$d(i_0, \dots, i_p) = \sum_{k=0}^p (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p),$$

où on a posé $(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p) = (i_0, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p)$. Si (i_0) est dans B_0 , on a

$$e(i_0) = 1.$$

Enfin, les sous-monoïdes de positivité $\mathbf{c}(\Delta_n)_p^*$ sont les sous-monoïdes engendrés par les ensembles B_p . Notons que les B_p forment une base du complexe dirigé augmenté $\mathbf{c}(\Delta_n)$.

De plus, si $f : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n'}$ est un morphisme de Δ , le morphisme associé $\mathbf{c}(f) : \mathbf{c}(\Delta_n) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_{n'})$ est donné sur la base de $\mathbf{c}(\Delta_n)$ par

$$f(i_0, \dots, i_p) = (f(i_0), \dots, f(i_p)),$$

où on convient que $(j_0, \dots, j_p) = 0$ si la suite des j_k n'est pas strictement croissante. Notons qu'avec cette convention, les formules définissant la différentielle d et l'application f restent valables pour $(i_0, \dots, i_p)$ avec $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_p \leq n$.

Proposition 5.16. *Pour tout $m \geq 0$, le morphisme $m : \mathbf{c}(\Delta_0) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_m)$, image par $\mathbf{c}$ du morphisme $m : \Delta_0 \rightarrow \Delta_m$, est un rétracte par antihomotopie de carré nul fort au-dessus de $\mathbf{c}(\Delta_0)$.*

Démonstration. L'unique morphisme $\Delta_m \rightarrow \Delta_0$ dans Δ induit une rétraction $r : \mathbf{c}(\Delta_m) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_0)$ de m . Nous allons produire une antihomotopie h de $1_{\mathbf{c}(\Delta_m)}$ vers mr . Notons que mr vérifie

$$mr(i_0, \dots, i_p) = \begin{cases} (m) & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

sur la base de $\mathbf{c}(\Delta_m)$ ou, plus généralement, pour $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_p \leq m$, avec la convention du paragraphe précédent. On définit h sur cette même base par

$$h(i_0, \dots, i_p) = (i_0, \dots, i_p, m),$$

où, suivant la convention du paragraphe précédent, cette expression est nulle si $i_p = m$. Encore une fois, cette expression reste valable pour $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_p \leq m$. Vérifions que cette formule définit bien une antihomotopie de $1_{\mathbf{c}(\Delta_m)}$ vers mr . Fixons un élément $(i_0, \dots, i_p)$ de la base de $\mathbf{c}(\Delta_m)$. On distingue deux cas :

— Si $p = 0$, on a

$$dh(i_0) = d(i_0, m) = (m) - (i_0) = mr(i_0) - (i_0).$$

— Si $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} & dh(i_0, \dots, i_p) - hd(i_0, \dots, i_p) \\ &= d(i_0, \dots, i_p, m) - \sum_{k=0}^p (-1)^k h(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p) \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p, m) + (-1)^{p+1} (i_0, \dots, i_p) \\ &\quad - \sum_{k=0}^p (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p, m) \\ &= (-1)^p (0 - (i_0, \dots, i_p)) \\ &= (-1)^p (mr(i_0, \dots, i_p) - (i_0, \dots, i_p)). \end{aligned}$$

Enfin, il est immédiat qu'on a bien $hm = 0$, $rh = 0$ et $hh = 0$. □

Proposition 5.17. *Soient $v : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur et c un m -simplexe de $N(C)$. Alors le ∞ -foncteur $m^* : c \backslash A \rightarrow c_m \backslash A$ est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à gauche fort au-dessus de A et, en particulier, une équivalence de Thomason.*

Démonstration. C'est le contenu du corollaire 5.13 appliqué au morphisme $m : c(\Delta_0) \rightarrow c(\Delta_m)$, ses hypothèses étant vérifiées en vertu de la proposition précédente (et du fait immédiat que m est bien une inclusion rigide ordonnée). $\square$

Corollaire 5.18. *La catégorie $\infty\text{-Cat}$ des ∞ -catégories munie du joint permet un théorème A au sens du paragraphe 2.3.*

Démonstration. En vertu de la proposition 2.12, l'assertion est équivalente à la proposition précédente, d'où le résultat. $\square$

Théorème 5.19. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array}$$

un triangle commutatif de ∞ -foncteurs. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. En vertu du corollaire précédent, on peut appliquer le théorème A monoïdal (théorème 2.13) à $\infty\text{-Cat}$ munie du joint. On obtient alors exactement l'assertion qu'on voulait démontrer. $\square$

Remarque 5.20. La stabilité des équivalences de Thomason par la dualité $C \mapsto C^{\text{op}}$ (voir le corollaire 5.3) permet de déduire du théorème précédent un théorème analogue pour les tranches de type C^{co}/c (voir le théorème 7.12 pour un énoncé plus général). Les résultats analogues pour les tranches de type C/c ou $c \backslash C^{\text{co}}$ (voir [7, remarque 6.37]) sont également vrais. Néanmoins, pour les établir, on a besoin de savoir que la classe des équivalences de Thomason est stable par la dualité $C \mapsto C^{\text{co}}$, ce qui sera démontré dans [8].

Les théorèmes A que l'on vient d'établir sont relatifs au sens où ils traitent de ∞ -foncteurs au-dessus d'une ∞ -catégorie. Afin de déduire de ces résultats des théorèmes A absolus, nous avons besoin de montrer que les tranches $c \backslash C$, où c est un objet de C , sont asphériques. Cela résulte facilement de l'énoncé analogue pour les ensembles simpliciaux (voir la remarque 5.24). Nous exposons maintenant une démonstration alternative dont les conséquences joueront un rôle important dans la section 7.

Proposition 5.21. *Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . On a un isomorphisme canonique*

$$(c, 1_c) \backslash (c \backslash C) \simeq 1_c \backslash C,$$

où, à gauche, le couple $(c, 1_c)$ est considéré comme un objet de $c \backslash C$ (voir le paragraphe 4.29) et, à droite, 1_c est considéré comme une 1-cellule de C , c'est-à-dire un ∞ -foncteur $D_1 \rightarrow C$.

Démonstration. Soit T une ∞ -catégorie. Se donner un ∞ -foncteur $T \rightarrow (c, 1_c) \backslash (c \backslash C)$ revient, par adjonction, à se donner un ∞ -foncteur $D_0 \star T \rightarrow c \backslash C$ rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} D_0 \star T & \longrightarrow & c \backslash C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow (c, 1_c) & \\ D_0 & & \end{array}$$

commutatif. En vertu de la définition de $(c, 1_c)$ (voir le paragraphe 4.29), de nouveau par adjonction, cela revient à se donner un ∞ -foncteur $D_0 \star D_0 \star T \rightarrow C$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} (D_0 \star D_0) \star T & \xrightarrow{\quad} & C \\ \uparrow \iota_1 & \nearrow 1_c & \\ D_0 \star D_0 & & \end{array},$$

où on a identifié $D_0 \star D_0$ et D_1 . Par adjonction, cela revient à se donner un ∞ -foncteur $T \rightarrow 1_c \backslash C$, d'où le résultat en vertu du lemme de Yoneda. $\square$

Proposition 5.22. *Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . Le ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow c \backslash C$ correspondant à l'objet $(c, 1_c)$ est un rétracte par transformation oplax à gauche fort.*

Démonstration. En vertu du paragraphe 5.5, il suffit de construire un ∞ -foncteur

$$c \backslash C \rightarrow (c, 1_c) \backslash (c \backslash C)$$

au-dessus de $c \backslash C$ (satisfaisant à une propriété additionnelle pour le caractère fort) ou encore, en utilisant la proposition précédente, un ∞ -foncteur $c \backslash C \rightarrow 1_c \backslash C$ au-dessus de $c \backslash C$. On obtient ce ∞ -foncteur comme le ∞ -foncteur κ^* associé, en vertu du paragraphe 2.5, au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\quad \kappa \quad} & D_0 \\ \searrow 1_c & & \swarrow c \\ & C & \end{array},$$

où κ désigne le ∞ -foncteur du paragraphe 4.9. Le ∞ -foncteur $1_c \backslash C \rightarrow c \backslash C$ correspondant au ∞ -foncteur d'oubli $(c, 1_c) \backslash (c \backslash C) \rightarrow c \backslash C$ à travers l'isomorphisme de la proposition précédente s'identifie lui au ∞ -foncteur τ^* associé au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \xrightarrow{\quad \tau \quad} & D_1 \\ \searrow c & & \swarrow 1_c \\ & C & \end{array},$$

où τ désigne le ∞ -foncteur du paragraphe 4.9. On en déduit que $\kappa^* : c \backslash C \rightarrow 1_c \backslash C$ est bien au-dessus de $c \backslash C$ par functorialité de la construction du paragraphe 2.5. Il nous reste à vérifier le caractère fort du rétracte par transformation. Par définition de κ^* , l'objet

$$D_0 \xrightarrow{(c, 1_c)} c \backslash C \xrightarrow{\kappa^*} 1_c \backslash C$$

de $1_c \backslash C$ correspond au ∞ -foncteur

$$D_1 \star D_0 \xrightarrow{\kappa \star D_0} D_0 \star D_0 \xrightarrow{1_c} C,$$

c'est-à-dire à un ∞ -foncteur constant de valeur c , ce qui montre bien en vertu du paragraphe 5.5 que le rétracte par transformation de l'énoncé est fort. $\square$

Corollaire 5.23. *Soient C une ∞ -catégorie et soit c un objet de C . Les ∞ -catégories $c \backslash C$ et C / c sont asphériques.*

Démonstration. Le cas de $c \backslash C$ résulte de la proposition précédente en vertu du corollaire 5.8 (et du fait que $N(D_0) = \Delta_0$). Celui de $C_{/c}^{\text{co}}$ en résulte par dualité, grâce à la proposition 4.28 et au corollaire 5.3 :

$$N(C_{/c}^{\text{co}}) \simeq N((c \backslash C^{\text{op}})^{\text{op}}) \simeq N(c \backslash C^{\text{op}})^{\text{op}}. \quad \square$$

Remarque 5.24. On peut montrer le corollaire précédent de manière plus directe. En effet, en vertu de la proposition 2.9, on a $N(c \backslash C) \simeq c \backslash N(C)$ et cet ensemble simplicial est faiblement contractile d'après la proposition 1.12. L'asphéricité de $C_{/c}^{\text{co}}$ s'en déduit par dualité comme dans la preuve précédente.

Corollaire 5.25. *Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Si pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie $b \backslash A$ est asphérique, alors u est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. Considérons le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow u & \swarrow 1_B \\ & B & \end{array}.$$

L'hypothèse permettant d'appliquer le théorème 5.19 (et donc de conclure que u est une équivalence de Thomason) est que, pour tout objet b de B , le ∞ -foncteur $b \backslash A \rightarrow b \backslash B$ est une équivalence de Thomason. Puisque $b \backslash B$ est asphérique en vertu du corollaire 5.23, cette hypothèse est équivalente au fait que $b \backslash A$ soit asphérique, ce qui entraîne le résultat. $\square$

Corollaire 5.26. *Soit $u : A \rightarrow B$ un ∞ -foncteur. Si pour tout objet b de B , la ∞ -catégorie $A_{/b}^{\text{co}}$ est asphérique, alors u est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. L'assertion se déduit du corollaire précédent par dualité. $\square$

Terminons cette section par une application de ces théorèmes A.

Théorème 5.27. *Soit C une ∞ -catégorie admettant un objet c_0 ayant la propriété suivante : pour tout objet c de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)$ (provenant de l'enrichissement de $\infty\text{-Cat}$ sur elle-même) est asphérique. Alors C est asphérique.*

Démonstration. Nous allons appliquer le corollaire précédent au ∞ -foncteur $c_0 : D_0 \rightarrow C$. Soit c un objet de C . Il s'agit donc de vérifier que $D_0_{/c}^{\text{co}}$ est asphérique. Commençons par calculer $c \backslash D_0$. D'après le paragraphe 4.29, on a

$$c \backslash D_0 = c \backslash C \times_C \{c_0\} \simeq \{c\} \times_C^{\pi_0} \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C)^{\pi_1 \times_C \{c_0\}},$$

où π_0 et π_1 désignent respectivement les ∞ -foncteurs

$$\underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(\sigma, C), \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(\tau, C) : \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, C) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_0, C) \simeq C.$$

Or, en vertu de [7, proposition B.6.2], ce dernier produit fibré est isomorphe à $\underline{\text{Hom}}_C(c, c_0)^\circ$. Ainsi, en utilisant la proposition 4.28, on obtient des isomorphismes

$$D_0_{/c}^{\text{co}} \simeq (c \backslash D_0^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq (\underline{\text{Hom}}_{C^{\text{op}}}(c, c_0)^\circ)^{\text{op}} \simeq \underline{\text{Hom}}_C(c_0, c)^{\text{co} \circ \text{op}} \simeq \underline{\text{Hom}}_C(c_0, c),$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 5.28. Il est également vrai que si C admet un objet c_0 tel que, pour tout objet c de C , la ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_C(c, c_0)$ est asphérique, alors C est asphérique. Ceci peut se déduire du résultat précédent pourvu qu'on sache que la classe des ∞ -catégories asphériques est stable par la dualité qui inverse le sens des 1-cellules, ce qui sera établi dans [8].

6. ∞ -catégories comma

Dans cette section, on introduit une généralisation ∞ -catégorique des catégories comma. Ces ∞ -catégories comma nous permettront, dans la section suivante, de déduire du théorème A pour les triangles commutatifs un théorème A pour les triangles commutatifs à transformation près.

On fixe une ∞ -catégorie Z .

6.1. Soient

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

deux ∞ -foncteurs. On définit la ∞ -catégorie comma $f \downarrow_Z g$, qu'on notera également plus simplement $f \downarrow g$, par le produit fibré itéré

$$f \downarrow g = X \times_Z \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z) \times_Z Y,$$

limite projective du diagramme

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{\pi_0} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z) \xrightarrow{\pi_1} Z \xleftarrow{g} Y,$$

où π_ε , pour $\varepsilon = 0, 1$, désigne le ∞ -foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(\{\varepsilon\}, Z) \simeq Z$ induit par l'inclusion $\{\varepsilon\} \hookrightarrow D_1$.

Notons que les projections canoniques fournissent des ∞ -foncteurs

$$X \xleftarrow{p_1} f \downarrow g \xrightarrow{p_2} Y$$

et donc un ∞ -foncteur

$$p : f \downarrow g \rightarrow X \times Y.$$

6.2. Soient toujours

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

deux ∞ -foncteurs. La ∞ -catégorie comma $f \downarrow g$ a la propriété universelle suivante. Soit T une ∞ -catégorie. Par adjonction, la donnée d'un ∞ -foncteur λ de T vers $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z)$ correspond à celle d'une transformation oplax de $\pi_0 \lambda$ vers $\pi_1 \lambda$. Ainsi, la donnée d'un ∞ -foncteur $T \rightarrow f \downarrow g$ correspond à celle d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xRightarrow{\lambda} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array},$$

où x et y sont des ∞ -foncteurs et λ est une transformation oplax. On notera (x, λ, y) le ∞ -foncteur $T \rightarrow f \downarrow g$ correspondant à un tel diagramme.

Remarque 6.3. Le paragraphe précédent exprime une propriété universelle de la ∞ -catégorie $f \downarrow g$ en termes de transformations oplax. En remplaçant dans cette propriété universelle les transformations oplax par des transformations lax, on obtient une ∞ -catégorie $f \downarrow' g$ définie par

$$f \downarrow' g = X \times_Z \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{oplax}}(D_1, Z) \times_Z Y.$$

Pour différencier ces deux ∞ -catégories, on pourra parler de ∞ -catégorie *comma oplax* pour $f \downarrow g$ et de ∞ -catégorie *comma lax* pour $f \downarrow' g$. Il résulte de la dualité entre transformations oplax et transformations lax (voir la fin du paragraphe 4.10) qu'on a

$$f \downarrow' g = (g^{\text{op}} \downarrow f^{\text{op}})^{\text{op}}.$$

Dans ce texte, on travaillera uniquement avec des ∞ -catégories comma oplax.

Dans la suite de cette section, on va montrer que la construction comma définit un foncteur

$$-\downarrow_Z- : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z} \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}} \rightarrow \infty\text{-Cat},$$

où $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$ et $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}}$ sont des catégories que l'on va maintenant décrire. On montrera dans l'appendice B que ce foncteur provient en fait d'un sesquifoncteur.

6.4. On définit une catégorie $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$, où $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ désigne la sesquicatégorie des ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et transformations oplax (voir le paragraphe 4.15), de la manière suivante.

— Les objets de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$ sont les couples (X, f) , où X est une ∞ -catégorie et $f : X \rightarrow Z$ un ∞ -foncteur, c'est-à-dire les diagrammes

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Z \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}$.

— Les morphismes sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ & \searrow f \quad \swarrow f' & \\ & Z & \end{array} \quad \alpha$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, où

$$\alpha : f'u \Rightarrow f$$

est donc une transformation oplax. La source d'un tel morphisme est (X, f) et son but est (X', f') .

— L'identité d'un objet

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Z \end{array}$$

est le morphisme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ & \searrow f \quad \swarrow f & \\ & Z & \end{array} \quad 1_f$$

— Le composé de deux morphismes composables

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & X' & \xrightarrow{u'} & X'' \\ & \searrow f \quad \swarrow f' & \downarrow f' & \swarrow f'' & \\ & & Z & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \alpha' \end{array}$$

est le morphisme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u''} & X'' \\ & \searrow f & \swarrow f'' \\ & Z & \end{array},$$

où

$$u'' = u'u \quad \text{et} \quad \alpha'' = \alpha(\alpha' * u).$$

Il résulte facilement du fait que $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ est une sesquicatégorie qu'on obtient bien ainsi une catégorie. On verra dans l'appendice B (voir le paragraphe B.18 et l'exemple B.3) que cette catégorie est la catégorie sous-jacente à une sesquicatégorie.

6.5. De même, on définit une catégorie $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}}$ de la manière suivante.

- Les objets de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}}$ sont les mêmes que ceux de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$.
- Les morphismes sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{v} & Y' \\ & \searrow g & \swarrow g' \\ & Z & \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, où $\beta : g \Rightarrow g'v$ est donc une transformation oplax. La source d'un tel morphisme est (Y, g) et son but est (Y', g') .

— Les identités et la composition des morphismes sont définies de manière analogue à celles de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$. (Une description précise peut être extraite du paragraphe suivant.)

On verra dans l'appendice B (voir le paragraphe B.23) que cette catégorie est la catégorie sous-jacente à une sesquicatégorie qui se déduit par dualité de la sesquicatégorie de catégorie sous-jacente $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}$ mentionnée dans le paragraphe précédent.

6.6. Décrivons maintenant la catégorie produit $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z} \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}}$.

- Les objets sont les diagrammes

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

dans $\infty\text{-Cat}$. On notera (X, f, g, Y) un tel objet.

- Les morphismes sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \swarrow f' & & \searrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, où

$$\alpha : f'u \Rightarrow f \quad \text{et} \quad \beta : g \Rightarrow g'v$$

sont donc des transformations oplax. On notera (u, α, β, v) un tel morphisme, sous-entendant ainsi les morphismes f, f', g et g' . La source du morphisme (u, α, β, v) est (X, f, g, Y) et son but est (X', f', g', Y') .

— L'identité d'un objet

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

est le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \swarrow f & & \searrow g & \\ X & & & & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} 1_X \\ \parallel \\ 1_X \\ \parallel \\ 1_X \end{array} \quad \begin{array}{c} 1_f \\ \parallel \\ 1_f \\ \parallel \\ 1_f \end{array} \quad \begin{array}{c} 1_g \\ \parallel \\ 1_g \\ \parallel \\ 1_g \end{array} \quad \begin{array}{c} 1_Y \\ \parallel \\ 1_Y \\ \parallel \\ 1_Y \end{array} \quad .$$

— Le composé de deux morphismes composables

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ u \downarrow & \searrow f & & \swarrow g & \downarrow v \\ X' & & Z & & Y' \\ u' \downarrow & \searrow f' & & \swarrow g' & \downarrow v' \\ X'' & & Z & & Y'' \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \parallel \\ \alpha' \\ \parallel \\ \alpha'' \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \parallel \\ \beta' \\ \parallel \\ \beta'' \end{array}$$

est le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ u'' \downarrow & \searrow f & & \swarrow g & \downarrow v'' \\ X'' & & Z & & Y'' \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha'' \\ \parallel \\ \alpha'' \\ \parallel \\ \alpha'' \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta'' \\ \parallel \\ \beta'' \\ \parallel \\ \beta'' \end{array}$$

où

$$u'' = u'u, \quad \alpha'' = \alpha(\alpha' * u), \quad \beta'' = (\beta' * v)\beta \quad \text{et} \quad v'' = v'v.$$

6.7. Considérons

$$(u, \alpha, \beta, v) = \begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ u \downarrow & \searrow f & & \swarrow g & \downarrow v \\ X' & & Z & & Y' \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \parallel \\ \alpha \\ \parallel \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \parallel \\ \beta \\ \parallel \\ \beta \end{array}$$

un morphisme de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. On lui associe un ∞ -foncteur

$$(u, \alpha) \downarrow_Z (\beta, v) : f \downarrow_Z g \rightarrow f' \downarrow_Z g',$$

qu'on notera plus simplement $(u, \alpha) \downarrow (\beta, v)$ et parfois également $(u, \alpha, \beta, v)_*$, de la manière suivante. Soit T une ∞ -catégorie et soit $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur (voir le paragraphe 6.2). En composant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \swarrow x & & \searrow y & \\ X & & & & Y \\ & \searrow f & \xRightarrow{\lambda} & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \swarrow f' & & \searrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \parallel \\ \alpha \\ \parallel \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \\ \parallel \\ \beta \\ \parallel \\ \beta \end{array} \quad ,$$

on obtient un carré correspondant au ∞ -foncteur

$$(ux, (\beta * y)\lambda(\alpha * x), vy) : T \rightarrow f' \downarrow g'.$$

Il résulte du fait que $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ est une sesquicatégorie que cette correspondance est naturelle en T . En vertu du lemme de Yoneda, on a donc bien défini un ∞ -foncteur $f \downarrow g \rightarrow f' \downarrow g'$.

Proposition 6.8. *Soit Z une ∞ -catégorie. Les applications*

$$\begin{aligned} (f, g) &\mapsto f \downarrow_Z g \\ (u, \alpha, \beta, v) &\mapsto (u, \alpha) \downarrow_Z (\beta, v) \end{aligned}$$

définissent un foncteur

$$-\downarrow_Z - : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \xrightarrow{\text{to}} \infty\text{-Cat}.$$

Démonstration. Fixons

$$(X, f, g, Y) = X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

un objet de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$, T une ∞ -catégorie et $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur, c'est-à-dire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xRightarrow{\lambda} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. On va vérifier la fonctorialité de $-\downarrow_Z -$ en utilisant le lemme de Yoneda, c'est-à-dire en précomposant les égalités qu'on veut démontrer par (x, λ, y) .

Commençons par la compatibilité à l'identité de l'objet (f, X, Y, g) . On a

$$\begin{aligned} (1_{(X, f, g, Y)})_*(x, \lambda, y) &= (1_X, 1_f, 1_g, 1_Y)_*(x, \lambda, y) \\ &= (1_X x, (1_g * y) \lambda (1_f * x), 1_Y y) \\ &= (x, \lambda, y) \\ &= (1_{f \downarrow g})(x, \lambda, y), \end{aligned}$$

d'où la compatibilité recherchée.

Soit maintenant

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ u \downarrow & \alpha \nearrow & & \nwarrow \beta & \downarrow v \\ X' & \xrightarrow{f'} & Z & \xleftarrow{g'} & Y' \\ & \alpha' \nearrow & & \nwarrow \beta' & \\ u' \downarrow & & & & \downarrow v' \\ X'' & \xrightarrow{f''} & Z & \xleftarrow{g''} & Y'' \end{array}$$

deux morphismes composables de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Vérifions la compatibilité de $-\downarrow_Z -$ à leur composition. On a

$$\begin{aligned} (u', \alpha', \beta', v')_*(u, \alpha, \beta, v)_*(x, \lambda, y) &= (u', \alpha', \beta', v')_*(ux, (\beta * y) \lambda (\alpha * x), vy) \\ &= (u'ux, \lambda', v'vy), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\lambda' &= (\beta' * (vy))(\beta * y)\lambda(\alpha * x)(\alpha' * (ux)) \\ &= (((\beta' * v)\beta) * y)\lambda((\alpha(\alpha' * u)) * x).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(u', \alpha', \beta', v')_*(u, \alpha, \beta, v)_*(x, \lambda, y) \\ &= (u'u, \alpha(\alpha' * u), (\beta' * v)\beta, v'v)_*(x, \lambda, y) \\ &= ((u', \alpha', \beta', v')(u, \alpha, \beta, v))_*(x, \lambda, y),\end{aligned}$$

ce qui achève de montrer la fonctorialité de $- \downarrow_Z -$. $\square$

Proposition 6.9. *Si*

$$(u, \alpha, \beta, v) = \begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array}$$

est un morphisme de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$, alors le carré

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow g & \xrightarrow{(u, \alpha) \downarrow (\beta, v)} & f' \downarrow g' \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X \times Y & \xrightarrow{u \times v} & X' \times Y' \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. On va procéder comme dans la preuve précédente. Soit T une ∞ -catégorie et soit $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur. On a

$$\begin{aligned}p(u, \alpha, \beta, v)_*(x, \lambda, y) &= p(ux, (\beta * y)\lambda(\alpha * x), vy) \\ &= (ux, vy) = (u \times v)(x, y) \\ &= (u \times v)p(x, \lambda, y),\end{aligned}$$

d'où l'égalité recherchée en vertu du lemme de Yoneda. $\square$

6.10. Soit $f : X \rightarrow Z$ un ∞ -foncteur. Si

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{v} & Y' \\ & \searrow g & \swarrow g' \\ & & Z \end{array}$$

est un diagramme dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, on notera

$$f \downarrow (\beta, v) : f \downarrow g \rightarrow f \downarrow g'$$

le ∞ -foncteur $(1_X, 1_f) \downarrow (\beta, v)$. On obtient ainsi un ∞ -foncteur

$$f \downarrow - : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \xrightarrow{\text{to}} \infty\text{-Cat}$$

(voir le paragraphe B.31 pour un énoncé plus précis). Dans le cas particulier où $X = Z$ et $f = 1_Z$, on notera simplement $Z \downarrow -$ ce ∞ -foncteur.

De même, si $g : Y \rightarrow Z$ est un ∞ -foncteur et si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & X' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha \quad \nearrow f' & \\ & Z & \end{array}$$

est un diagramme dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, on notera

$$(u, \alpha) \downarrow g : f \downarrow g \rightarrow f' \downarrow g$$

le ∞ -foncteur $(u, \alpha) \downarrow (1_g, 1_Y)$. On obtient ainsi un ∞ -foncteur

$$- \downarrow g : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

(voir également le paragraphe B.31) qu'on notera simplement $- \downarrow Z$ dans le cas particulier où $Y = Z$ et $g = 1_Z$.

De plus, si

$$(u, \alpha, \beta, v) = \begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array} \begin{array}{c} \downarrow u \\ \swarrow \alpha \\ \downarrow v \end{array}$$

est un morphisme de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$, l'égalité

$$(u, \alpha, 1_{g'}, 1_{Y'}) (1_X, 1_f, \beta, v) = (1_{X'}, 1_{f'}, \beta, v) (u, \alpha, 1_g, 1_Y)$$

des deux décompositions de (u, α, β, v) dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$ entraîne que le carré

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow g & \xrightarrow{f \downarrow (\beta, v)} & f \downarrow g' \\ (u, \alpha) \downarrow g \downarrow & & \downarrow (u, \alpha) \downarrow g' \\ f' \downarrow g & \xrightarrow{f' \downarrow (\beta, v)} & f' \downarrow g' \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 6.11. *Soit*

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

un diagramme dans $\infty\text{-Cat}$. On a un isomorphisme canonique

$$(p_{2, f \downarrow Z}) \downarrow g \simeq f \downarrow (p_{1, Z \downarrow g}),$$

où

$$p_{2, f \downarrow Z} = p_2 : f \downarrow Z \rightarrow Z \quad \text{et} \quad p_{1, Z \downarrow g} = p_1 : Z \downarrow g \rightarrow Z,$$

naturel en (X, f, g, Y) dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$.

Démonstration. Les deux ∞ -catégories en jeu sont limites projectives du diagramme

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{\pi_0} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z) \xrightarrow{\pi_1} Z \xleftarrow{\pi_0} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, Z) \xrightarrow{\pi_1} Z \xleftarrow{g} Y,$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 6.12. Si T est une ∞ -catégorie, un ∞ -foncteur de T vers les deux ∞ -catégories isomorphes de la proposition précédente correspond à un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & x \swarrow & & \searrow y & \\ X & & & & Y \\ & \lambda \searrow & & \swarrow \lambda' & \\ & & Z & & \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\mathrm{oplax}}$.

On étudiera dans l'appendice B les propriétés de 2-fonctorialité de la construction comma. Le but de cette étude est essentiellement de démontrer le résultat suivant qui jouera un rôle central dans la section suivante :

Proposition 6.13. *Soit $i : X' \rightarrow X$ un rétracte par transformation oplax à gauche fort. Alors, pour tout diagramme*

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

dans $\infty\text{-Cat}$, le ∞ -foncteur

$$(i, 1_{f_i}) \downarrow g : (fi) \downarrow g \rightarrow f \downarrow g$$

est également un rétracte par transformation oplax à gauche fort.

Démonstration. C'est l'une des assertions du corollaire B.32. $\square$

7. Un théorème A ∞ -catégorique pour les 2-triangles

Le but de cette section est de déduire du théorème A ∞ -catégorique pour les triangles commutatifs un théorème A pour les 2-triangles, c'est-à-dire les triangles commutatifs à transformation près. Nous montrerons que cette réduction du cas des 2-triangles au cas des triangles commutatifs est valable pour toute classe de ∞ -foncteurs vérifiant des axiomes adéquats. Notre principal outil pour y parvenir sera la construction comma ∞ -catégorique développée dans la section précédente.

Commençons par faire le lien entre ∞ -catégories comma et tranches.

Proposition 7.1. *Soient C une ∞ -catégorie et c un objet de C . Pour toute ∞ -catégorie A et tout ∞ -foncteur $v : A \rightarrow C$, on a un isomorphisme canonique*

$$c \backslash A \simeq c \downarrow v,$$

où on considère c comme un ∞ -foncteur $D_0 \rightarrow C$, naturel en A et v . De plus, cet isomorphisme est au-dessus de A au sens où le triangle

$$\begin{array}{ccc} c \backslash A & \xrightarrow{\sim} & c \downarrow v \\ U \searrow & & \swarrow p_2 \\ & A & \end{array},$$

où $U : c \backslash A \rightarrow A$ désigne le ∞ -foncteur d'oubli, est commutatif.

Démonstration. En vertu du paragraphe 4.29, on a

$$\begin{aligned} c \downarrow v &= D_0 \times_C^{\pi_0} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, C)^{\pi_1 \times_C} A \\ &\simeq c \backslash C \times_C A \\ &= c \backslash A, \end{aligned}$$

d'où l'isomorphisme recherché. Le fait que cet isomorphisme est au-dessus de A est immédiat. De plus, si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & A' \\ & \searrow v & \swarrow v' \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif, on vérifie que le ∞ -foncteur $c \downarrow (1_v, u) : c \downarrow v \rightarrow c \downarrow v'$ est égal à $D_0 \times_C \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, C) \times_C u$, ce qui établit la naturalité de l'isomorphisme. $\square$

Les trois lemmes suivants isolent les aspects techniques relatifs aux tranches et aux ∞ -catégories comma qui apparaîtront dans notre démonstration du théorème A pour les 2-triangles.

Lemme 7.2. *Soient $v : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur et c un objet de C . On a un isomorphisme canonique naturel*

$$c \backslash (C \downarrow v) \simeq U \downarrow v,$$

où la tranche $c \backslash (C \downarrow v)$ est relative au ∞ -foncteur $p_1 : C \downarrow v \rightarrow C$ et où $U : c \backslash C \rightarrow C$ désigne le ∞ -foncteur d'oubli.

Démonstration. En vertu de la proposition précédente et de la proposition 6.11, avec les notations de cette dernière, on a des isomorphismes naturels

$$c \backslash (C \downarrow v) \simeq c \downarrow (p_{1,C} \downarrow v) \simeq (p_{2,c \downarrow C}) \downarrow v \simeq U \downarrow v,$$

d'où le résultat. $\square$

Lemme 7.3. *Soient $v : A \rightarrow C$ un ∞ -foncteur et c un objet de C . Alors le ∞ -foncteur*

$$c \downarrow v \rightarrow U \downarrow v$$

associé au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \xrightarrow{(c, 1_c)} & c \backslash C \\ & \searrow c & \swarrow U \\ & C & \end{array},$$

où $U : c \backslash C \rightarrow C$ désigne le ∞ -foncteur d'oubli, est un rétracte par transformation oplax à gauche fort.

Démonstration. En vertu de la proposition 5.22, le foncteur $(c, 1_c) : D_0 \rightarrow c \backslash C$ est un rétracte par transformation oplax à gauche fort et l'assertion résulte donc de la proposition 6.13. $\square$

Lemme 7.4. *Si $v : A \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, alors le ∞ -foncteur*

$$p_2 : C \downarrow v \rightarrow A$$

est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à droite fort.

Démonstration. Par définition, le carré

$$\begin{array}{ccc} C \downarrow v & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(D_1, C) \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ A & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

est cartésien. Nous allons montrer que le ∞ -foncteur π_1 est la rétraction d'un rétracte par transformation oplax à droite fort au-dessus de C . L'assertion résultera alors des propriétés de stabilité de ces rétractes par changement de base (proposition 5.6). Par définition, le ∞ -foncteur π_1 est l'image du ∞ -foncteur $1 : D_0 \rightarrow D_1$ par le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(-, C)$. Il est immédiat que $1 : D_0 \rightarrow D_1$ est un rétracte par transformation lax à droite fort et au-dessus de D_0 . Or, pour des raisons formelles (voir [7, exemple C.23.(f)]), le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(-, C)$ s'étend en un sesquifoncteur $(\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\mathrm{lax}})^{\mathrm{op}} \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\mathrm{oplax}}$, où $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\mathrm{lax}}$ (resp. $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\mathrm{oplax}}$) désigne la sesquicatégorie des ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et transformations lax (resp. transformations oplax) et, si $\mathcal{C}$ est une sesquicatégorie, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ désigne la sesquicatégorie obtenue en inversant le sens de ses 1-cellules. Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(-, C)$ transforme donc rétractes par transformation lax à droite fort $i : A \rightarrow B$ au-dessus de A en rétractions de rétracte par transformation oplax à droite fort au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{lax}}(A, C)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Nous pouvons maintenant formuler et prouver notre théorème A pour les triangles commutatifs à transformation oplax près.

7.5. Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array}$$

un diagramme dans $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\mathrm{oplax}}$. Pour tout objet c de C , on dispose d'un ∞ -foncteur

$$c \setminus (u, \alpha) : c \setminus A \rightarrow c \setminus B.$$

En effet, en vertu de la proposition 7.1, il revient au même de définir un ∞ -foncteur $c \downarrow v \rightarrow c \downarrow w$. Or, $c \downarrow (\alpha, u)$ est un tel ∞ -foncteur.

Remarque 7.6. Dans [6], le ∞ -foncteur $c \setminus (u, \alpha)$ (qui y est noté $c \setminus \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ désigne le 2-triangle en jeu) est défini sans référence aux ∞ -catégories comma. Néanmoins, ce ∞ -foncteur est défini dans [6, paragraphe 5.1] en termes d'une propriété universelle des tranches (exprimée par [6, proposition 4.3]) qui est exactement celle des ∞ -catégories comma de la forme $c \downarrow v$. En particulier, les deux définitions coïncident.

Théorème 7.7. Soit $\mathcal{W}$ une classe de ∞ -foncteurs satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (a) $\mathcal{W}$ contient les identités et satisfait à la propriété du deux sur trois ;
- (b) tout rétracte par transformation oplax (à gauche comme à droite) fort est dans $\mathcal{W}$;
- (c) $\mathcal{W}$ vérifie un théorème A pour les triangles commutatifs au sens où, pour tout triangle commutatif de ∞ -foncteurs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array},$$

si pour tout objet c de C , le foncteur $c \setminus A \rightarrow c \setminus B$ induit par u est dans $\mathcal{W}$, alors il en est de même du foncteur u .

Alors $\mathcal{W}$ vérifie un théorème A pour les 2-triangles au sens où, pour tout triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation oplax α près

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array},$$

si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \downarrow (u, \alpha) : c \downarrow A \rightarrow c \downarrow B$ est dans $\mathcal{W}$, alors il en est de même de u .

Démonstration. En vertu de la proposition 6.9, on dispose de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} C \downarrow v & \xrightarrow{C \downarrow (\alpha, u)} & C \downarrow w \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_1 & \\ & C & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} C \downarrow v & \xrightarrow{C \downarrow (\alpha, u)} & C \downarrow w \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}.$$

D'après le lemme 7.4, les ∞ -foncteurs verticaux du carré sont des rétractions de rétractes par transformation oplax à droite forts, et sont donc dans $\mathcal{W}$ en vertu des conditions (a) et (b). Ainsi, en vertu de la condition (a), pour montrer que u est dans $\mathcal{W}$, il suffit donc de montrer que $C \downarrow (\alpha, u)$ est dans $\mathcal{W}$. Pour ce faire, nous allons appliquer le théorème A pour les triangles commutatifs (condition (c)) au triangle ci-dessus. Il s'agit donc de montrer que, pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur

$$c \downarrow (C \downarrow (\alpha, u)) : c \downarrow (C \downarrow v) \rightarrow c \downarrow (C \downarrow w)$$

est dans $\mathcal{W}$. En vertu du lemme 7.2, ce ∞ -foncteur s'identifie au ∞ -foncteur

$$U \downarrow (\alpha, u) : U \downarrow v \rightarrow U \downarrow w,$$

où $U : c \downarrow C \rightarrow C$ désigne le ∞ -foncteur d'oubli. Or, en appliquant la fonctorialité de la construction comma (voir la fin du paragraphe 6.10) au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D_0 & & & & A \\ & \searrow c & & \swarrow v & \downarrow u \\ (c, 1_c) \downarrow & = & C & \swarrow \alpha & \downarrow \\ c \downarrow C & \xrightarrow{U} & C & \swarrow w & B \end{array},$$

on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} c \downarrow v & \xrightarrow{c \downarrow (\alpha, u)} & c \downarrow w \\ ((c, 1_c), 1_c) \downarrow v & & \downarrow ((c, 1_c), 1_c) \downarrow w \\ U \downarrow v & \xrightarrow{U \downarrow (\alpha, u)} & U \downarrow w \end{array}.$$

En vertu du lemme 7.3, les flèches verticales de ce carré sont des rétractes par transformation oplax à gauche forts, et sont donc dans $\mathcal{W}$ en vertu de la condition (b). Par ailleurs, par définition, la flèche horizontale du haut du carré s'identifie au ∞ -foncteur $c \downarrow (u, \alpha)$ qui est dans $\mathcal{W}$ par hypothèse. On en déduit que $U \downarrow (\alpha, u)$ est dans $\mathcal{W}$, ce qui achève de prouver que le triangle commutatif introduit au début de cette preuve vérifie bien les hypothèses du théorème A et termine la démonstration. $\square$

Théorème 7.8. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \Rightarrow \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation oplax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $c \backslash (u, \alpha) : c \backslash A \rightarrow c \backslash B$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. Cela résulte du théorème précédent appliqué à $\mathcal{W}$ la classe des équivalences de Thomason, les hypothèses de l'énoncé étant satisfaites en vertu de la proposition 5.7 et du théorème 5.19. $\square$

Remarque 7.9. La classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences de Thomason a été définie à partir de la classe $\mathcal{W}_\infty$ des équivalences d'homotopie simpliciales faibles par la formule

$$\mathcal{W}_\infty = N^{-1}(\mathcal{W}_\infty).$$

Une inspection attentive des preuves précédentes révèle que les seules propriétés de la classe $\mathcal{W}_\infty$ que l'on a utilisées pour démontrer le théorème précédent (ainsi que les théorèmes 1.16, 2.2 et 2.13) sont les suivantes :

- (a) $\mathcal{W}_\infty$ est faiblement saturée, c'est-à-dire contient les identités, satisfait à la propriété du deux sur trois et, tout morphisme i admettant une rétraction r telle que ir soit dans $\mathcal{W}_\infty$ est dans $\mathcal{W}_\infty$;
- (b) $\mathcal{W}_\infty$ est stable par petites sommes ;
- (c) $\mathcal{W}_\infty$ vérifie le lemme bisimplicial (lemme 1.5) ;
- (d) pour tout ensemble simplicial X , la projection $\Delta_1 \times X \rightarrow X$ est dans $\mathcal{W}_\infty$.

Ainsi, le théorème précédent, ainsi que les théorèmes mentionnés ci-dessus, se généralisent à toute classe $\mathcal{W} = N^{-1}(\mathcal{W})$ de ∞ -foncteurs, où $\mathcal{W}$ est une classe de morphismes simpliciaux vérifiant les quatre propriétés ci-dessus. On peut montrer qu'une telle classe $\mathcal{W}$ correspond exactement à ce qui est appelé un Δ -localisateur test dans [14, section 4.2].

7.10. Soit

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \Rightarrow \end{array}$$

un diagramme dans $\infty\text{-Cat}_{\text{lax}}$, la 2-flèche α étant donc une transformation lax. Si c est un objet de C , on définit un ∞ -foncteur

$$(u, \alpha)_{/c}^{\text{co}} : A_{/c}^{\text{co}} \rightarrow B_{/c}^{\text{co}}$$

de la manière suivante. En appliquant la dualité $X \mapsto X^{\text{op}}$ à ce diagramme, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^{\text{op}} & \xrightarrow{u^{\text{op}}} & B^{\text{op}} \\ & \searrow v^{\text{op}} \quad \swarrow w^{\text{op}} & \\ & C^{\text{op}} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha^{\text{op}} \\ \Rightarrow \end{array},$$

où α^{op} est une transformation oplax (voir la fin du paragraphe 4.10). On dispose ainsi d'un ∞ -foncteur

$$c \backslash (u^{\text{op}}, \alpha^{\text{op}}) : c \backslash A^{\text{op}} \rightarrow c \backslash B^{\text{op}}.$$

En appliquant de nouveau la dualité $X \mapsto X^{\text{op}}$, on obtient, en vertu de la proposition 4.28, le ∞ -foncteur $A/c \rightarrow B/c$ recherché.

Remarque 7.11. L'apparente asymétrie entre la définition directe de la ∞ -catégorie $c \setminus (u, \alpha)$ et celle, par dualité, de $(u, \alpha)_{/c}^{\text{co}}$ vient du fait qu'on a privilégié la construction comma oplax par rapport à la construction comma lax (voir la remarque 6.3). En effet, si $v : A \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur et c est un objet de C , alors la tranche A/c est canoniquement isomorphe à la ∞ -catégorie comma lax $v \downarrow' c$ et on peut définir le ∞ -foncteur $(u, \alpha)_{/c}^{\text{co}}$ par functorialité de la construction comma lax.

Théorème 7.12. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow v \quad \swarrow w & \\ & C & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \\ \swarrow \searrow \end{array}$$

un triangle de ∞ -foncteurs commutatif à une transformation lax α près. Si pour tout objet c de C , le ∞ -foncteur $(u, \alpha)_{/c}^{\text{co}} : A/c \rightarrow B/c$ est une équivalence de Thomason, alors il en est de même de u .

Démonstration. Soit c un objet de C . En vertu du corollaire 5.3, l'hypothèse entraîne que le ∞ -foncteur

$$((u, \alpha)_{/c}^{\text{co}})^{\text{op}} : (A/c)^{\text{op}} \rightarrow (B/c)^{\text{op}}$$

est une équivalence de Thomason. Or, par définition, ce ∞ -foncteur n'est autre que le ∞ -foncteur

$$c \setminus (u^{\text{op}}, \alpha^{\text{op}}) : c \setminus (A^{\text{op}}) \rightarrow c \setminus (B^{\text{op}}).$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème 7.8 au triangle

$$\begin{array}{ccc} A^{\text{op}} & \xrightarrow{u^{\text{op}}} & B^{\text{op}} \\ & \searrow v^{\text{op}} \quad \swarrow w^{\text{op}} & \\ & C^{\text{op}} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha^{\text{op}} \\ \swarrow \searrow \end{array}.$$

On en déduit que u^{op} est une équivalence de Thomason et donc, en appliquant de nouveau le corollaire 5.3, que u est une équivalence de Thomason, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarque 7.13. Les deux théorèmes précédents admettent des variantes pour les tranches de type C/c ou $c \setminus C$ (voir [7, remarque 6.37]). Néanmoins, pour les établir, comme dans le cas du théorème A pour les triangles commutatifs (voir la remarque 5.20), on a besoin de savoir que la classe des équivalences de Thomason est stable par la dualité $C \mapsto C^{\text{co}}$, ce qu'on démontrera dans [8].

Appendice A : Transformations oplax et homotopies simpliciales

Le but de cet appendice est d'associer à toute transformation oplax α d'un ∞ -foncteur u vers un ∞ -foncteur v une homotopie simpliciale $N(\alpha)$ de $N(u)$ vers $N(v)$.

A.1. Si A et B sont deux ∞ -catégories, on dispose d'un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$N(q) : N(A \otimes B) \rightarrow N(A) \times N(B),$$

où q désigne le ∞ -foncteur du paragraphe 4.16. On va construire une section

$$s : N(A) \times N(B) \rightarrow N(A \otimes B)$$

de ce morphisme, naturelle en A et B .

A.2. On rappelle que, pour $n \geq 0$, on dispose d'un morphisme de complexes

$$\begin{aligned} \nabla : c(\Delta_n) &\rightarrow c(\Delta_n) \otimes c(\Delta_n) \\ (i_0, \dots, i_p) &\mapsto \sum_{l=0}^p (i_0, \dots, i_l) \otimes (i_l, \dots, i_p), \end{aligned}$$

appelé diagonale d'Alexander-Whitney, naturel en Δ_n dans $\mathbf{\Delta}$, faisant de $c(\Delta_n)$ une cogèbre différentielle graduée coassociative et coïtaire de coïtité $c(p)$, où p désigne l'unique morphisme de $\mathbf{\Delta}$ de Δ_n vers Δ_0 .

En appliquant le foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\text{da}} \rightarrow \infty\text{-Cat}$, on obtient donc un ∞ -foncteur

$$\nu(\nabla) : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n,$$

naturel en Δ_n dans $\mathbf{\Delta}$, faisant de $\mathcal{O}_n$ une cogèbre coassociative et coïtaire de coïtité l'unique ∞ -foncteur de $\mathcal{O}_n$ vers $\mathbf{D}_0$. En effet, cela résulte du théorème 4.4 affirmant que le foncteur ν restreint aux complexes de Steiner forts est monoïdal pour le produit tensoriel, ainsi que du paragraphe 5.14 et en particulier de l'isomorphisme canonique $\nu c(\Delta_n) \simeq \mathcal{O}_n$.

A.3. Soient A et B deux ∞ -catégories. On définit un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$s : N(A) \times N(B) \rightarrow N(A \otimes B)$$

de la manière suivante. Considérons $(x, y) : \Delta_n \rightarrow N(A) \times N(B)$ un n -simplexe de $N(A) \times N(B)$. Les morphismes x et y correspondent à des ∞ -foncteurs $\mathcal{O}_n \rightarrow A$ et $\mathcal{O}_n \rightarrow B$ respectivement qu'on notera également x et y . Le morphisme simplicial s associe à (x, y) le n -simplexe de $N(A \otimes B)$ défini par le composé

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{\nu(\nabla)} \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n \xrightarrow{x \otimes y} A \otimes B.$$

Proposition A.4. *L'application s est bien un morphisme d'ensembles simpliciaux.*

Démonstration. Soit (x, y) un n -simplexe de $N(A) \times N(B)$ et soit $\psi : \Delta_{n'} \rightarrow \Delta_n$ un morphisme de $\mathbf{\Delta}$. Notons (x', y') le n' -simplexe $(N(A) \times N(B))(\psi)(x, y)$. Par définition, les triangles

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{n'} & \xrightarrow{\nu c(\psi)} & \mathcal{O}_n \\ & \searrow x' & \swarrow x \\ & A & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{n'} & \xrightarrow{\nu c(\psi)} & \mathcal{O}_n \\ & \searrow y' & \swarrow y \\ & B & \end{array}$$

sont commutatifs et il s'agit de montrer que les deux ∞ -foncteurs de $\mathcal{O}_{n'}$ vers $A \otimes B$ donnés par le bord du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{n'} & \xrightarrow{\nu(\nabla)} & \mathcal{O}_{n'} \otimes \mathcal{O}_{n'} & \xrightarrow{x' \otimes y'} & A \otimes B \\ \nu c(\psi) \downarrow & & \downarrow \nu c(\psi) \otimes \nu c(\psi) & & \uparrow x \otimes y \\ \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\nu(\nabla)} & \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n & & \end{array}$$

sont égaux. Or, le triangle de ce diagramme est commutatif car il est le produit tensoriel des deux triangles commutatifs mentionnés précédemment dans la preuve et le carré est commutatif par naturalité de $\nu(\nabla)$, d'où le résultat. $\square$

Proposition A.5. *Le morphisme*

$$s : N(A) \times N(B) \rightarrow N(A \otimes B)$$

est une section de

$$N(q) : N(A \otimes B) \rightarrow N(A) \times N(B)$$

naturelle en A et B.

Démonstration. Commençons par montrer que s est une section de $N(q)$. Soit (x, y) un n -simplexe de $N(A) \times N(B)$. Il s'agit de montrer que le composé

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{\nu(\nabla)} \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n \xrightarrow{x \otimes y} A \otimes B \xrightarrow{q} A \times B$$

est égal à

$$(x, y) : \mathcal{O}_n \rightarrow A \times B.$$

Pour cela, il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n & \xrightarrow{x \otimes y} & A \otimes B \\ & \nearrow \nu(\nabla) & \downarrow q & & \downarrow q \\ \mathcal{O}_n & & \mathcal{O}_n \times \mathcal{O}_n & \xrightarrow{x \times y} & A \times B \\ & \searrow \Delta & & & \end{array},$$

où Δ désigne le ∞ -foncteur diagonal, est commutatif. Le carré de ce diagramme étant commutatif par naturalité de q , il suffit de montrer que les deux triangles

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n & \\ \nearrow \nu(\nabla) & \downarrow q_1 & \\ \mathcal{O}_n & & \mathcal{O}_n \\ \searrow 1_{\mathcal{O}_n} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n & \\ \nearrow \nu(\nabla) & \downarrow q_2 & \\ \mathcal{O}_n & & \mathcal{O}_n \\ \searrow 1_{\mathcal{O}_n} & & \end{array}$$

sont commutatifs, ce qui résulte du caractère coïunitaire de la cogèbre $\mathcal{O}_n$.

Montrons maintenant la naturalité de s en A et B . Soient $u : A \rightarrow A'$ et $v : B \rightarrow B'$ deux ∞ -foncteurs et soit (x, y) un n -simplexe de $N(A) \times N(B)$. En considérant $s(x, y)$ comme un ∞ -foncteur de $\mathcal{O}_n$ vers $A \otimes B$, on a

$$(u \otimes v)s(x, y) = (u \otimes v)(x \otimes y)\nu(\nabla) = (ux \otimes vy)\nu(\nabla) = s(ux, vy),$$

ce qu'on voulait démontrer. $\square$

Remarque A.6. Il résulte immédiatement de la coassociativité et du caractère coïunitaire du coproduit $\nu(\nabla)$ que le morphisme

$$s : N(A) \times N(B) \rightarrow N(A \otimes B)$$

fait du nerf de Street $N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$ un foncteur monoïdal lax de $\infty\text{-Cat}$ munie du produit tensoriel vers $\widehat{\Delta}$ munie du produit cartésien.

Remarque A.7. On peut montrer que le morphisme $s : N(A) \times N(B) \rightarrow N(A \otimes B)$ n'est *pas* le nerf d'un ∞ -foncteur $A \times B \rightarrow A \otimes B$. Moralement, le morphisme s correspond à un ∞ -foncteur *oplax*.

A.8. En particulier, lorsque C est une ∞ -catégorie, on obtient une section

$$s : \Delta_1 \times N(C) \rightarrow N(D_1 \otimes C),$$

naturelle en C , du morphisme

$$N(q) : N(D_1 \otimes C) \rightarrow \Delta_1 \times N(C),$$

compatible aux extrémités au sens où le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \times N(C) & \longrightarrow & N(D_1 \otimes C) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{\varepsilon\} \times N(C) & \xrightarrow{\sim} & N(\{\varepsilon\} \otimes C) \end{array}$$

est commutatif pour $\varepsilon = 0, 1$.

Explicitons le morphisme s dans ce cas. Soit $(\varphi, x) : \Delta_n \rightarrow \Delta_1 \times N(C)$ un n -simplexe de $\Delta_1 \times N(C)$. Par définition, le morphisme s associe à (φ, x) le n -simplexe de $N(D_1 \otimes C)$ défini par le composé

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{\nu(\nabla)} \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_n \xrightarrow{\nu c(\varphi) \otimes x} D_1 \otimes C.$$

Autrement dit, en définissant un morphisme

$$g_\varphi : c(\Delta_n) \rightarrow c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)$$

par le composé

$$c(\Delta_n) \xrightarrow{\nabla} c(\Delta_n) \otimes c(\Delta_n) \xrightarrow{c(\varphi) \otimes c(\Delta_n)} c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n),$$

on a

$$s(\varphi, x) = (D_1 \otimes x) \nu(g_\varphi).$$

On vérifie que si $(i_0, \dots, i_p)$ est dans la base de $c(\Delta_n)$ (voir le paragraphe 5.15) et si r désigne le nombre de 0 parmi $\varphi(i_0), \dots, \varphi(i_p)$, on a

$$g_\varphi(i_0, \dots, i_p) = \begin{cases} (1) \otimes (i_0, \dots, i_p) & \text{si } r = 0, \\ (0) \otimes (i_0, \dots, i_p) + (01) \otimes (i_1, \dots, i_p) & \text{si } r = 1, \\ (0) \otimes (i_0, \dots, i_p) & \text{si } r \geq 2, \end{cases}$$

en convenant que $(i_1, \dots, i_p) = 0$ lorsque $p = 0$.

Proposition A.9. *Le morphisme*

$$s : \Delta_1 \times N(C) \rightarrow N(D_1 \otimes C)$$

est l'unique section du morphisme

$$N(q) : N(D_1 \otimes C) \rightarrow \Delta_1 \times N(C)$$

qui soit à la fois naturelle en C et compatible aux extrémités au sens du paragraphe précédent.

Démonstration. Soit s' une seconde section de $N(q)$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $\varphi : \Delta_n \rightarrow \Delta_1$ un n -simplexe de Δ_1 . Considérons le n -simplexe $(\varphi, 1_{\mathcal{O}_n})$ de $\Delta_1 \times N(\mathcal{O}_n)$. On en déduit un ∞ -foncteur

$$s'(\varphi, 1_{\mathcal{O}_n}) : \mathcal{O}_n \rightarrow D_1 \otimes \mathcal{O}_n.$$

Si x est un n -simplexe de $N(C)$, alors, par naturalité de s' , on a

$$s'(\varphi, x) = (D_1 \otimes x)s'(\varphi, 1_{\mathcal{O}_n})$$

et les $s'(\varphi, 1_{\mathcal{O}_n})$ déterminent donc s' . Par ailleurs, puisqu'on a des isomorphismes

$$\nu c(\Delta_n) \simeq \mathcal{O}_n \quad \text{et} \quad \nu(c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)) \simeq D_1 \otimes \mathcal{O}_n$$

et que les complexes $c(\Delta_n)$ et $c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)$ sont de Steiner forts (voir le paragraphe 5.14 et la proposition 4.2), par pleine fidélité du foncteur ν restreint aux complexes de Steiner forts (théorème 3.11), on obtient l'existence d'un unique morphisme de complexes dirigés augmentés

$$g'_\varphi : c(\Delta_n) \rightarrow c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)$$

tel que $s(\varphi, 1_{\mathcal{O}_n}) = \nu(g'_\varphi)$. Quand on applique ces considérations à la section s de l'énoncé, on obtient le morphisme g_φ du paragraphe A.8. Pour conclure, il suffit donc de montrer l'égalité $g'_\varphi = g_\varphi$.

Les propriétés de la section s' se traduisent de la manière suivante sur les g'_φ :

(a) les triangles

$$\begin{array}{ccc} c(\Delta_n) & \xrightarrow{g'_\varphi} & c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n) \\ & \searrow c(\varphi) & \downarrow q_1 \\ & & c(\Delta_1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c(\Delta_n) & \xrightarrow{g'_\varphi} & c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n) \\ & \searrow 1_{c(\Delta_n)} & \downarrow q_2 \\ & & c(\Delta_n) \end{array},$$

où q_1 et q_2 désignent les deux projections, sont commutatifs ;

(b) le carré

$$\begin{array}{ccc} c(\Delta_{n'}) & \xrightarrow{g'_{\varphi'}} & c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_{n'}) \\ c(\psi) \downarrow & & \downarrow c(\Delta_1) \otimes c(\psi) \\ c(\Delta_n) & \xrightarrow{g'_\varphi} & c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n) \end{array},$$

où $\varphi : \Delta_n \rightarrow \Delta_1$ est un n -simplexe de Δ_1 , $\psi : \Delta_{n'} \rightarrow \Delta_n$ est un morphisme de Δ et $\varphi' = \varphi\psi$, est commutatif ;

(c) si $\varphi = \{\varepsilon\}$ est l'application constante de valeur $\varepsilon = 0, 1$, alors g'_φ s'identifie à l'inclusion $\{\varepsilon\} \otimes c(\Delta_n) \hookrightarrow c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)$.

On va montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que, pour tout $\varphi : \Delta_n \rightarrow \Delta_1$, on a l'égalité $g'_\varphi = g_\varphi$. Pour $n = 0$, le morphisme φ est nécessairement constant et la valeur de g'_φ est imposée par la propriété (c). Soit $n > 0$. En vertu de la propriété (b) et de l'hypothèse de récurrence, on a $g'_\varphi(i_0, \dots, i_p) = g_\varphi(i_0, \dots, i_p)$ dès que $p < n$. Pour conclure, il suffit donc de montrer l'égalité $g'_\varphi(0, \dots, n) = g_\varphi(0, \dots, n)$. Notons qu'on a

$$dg'_\varphi(0, \dots, n) = g'_\varphi d(0, \dots, n) = g_\varphi d(0, \dots, n) = dg_\varphi(0, \dots, n).$$

Par ailleurs, la commutativité du deuxième triangle de la propriété (a) montre que

$$g'_\varphi(0, \dots, n) = (\varepsilon) \otimes (0, \dots, n) + (01) \otimes x$$

pour $\varepsilon = 0, 1$ et x un élément de $\mathbf{c}(\Delta_n)_{n-1}^*$. Ainsi, on a

$$dg'_\varphi(0, \dots, n) = (\varepsilon) \otimes d(0, \dots, n) + (1) \otimes x - (0) \otimes x - (01) \otimes dx,$$

en convenant que $dx = 0$ dans le cas $n = 1$, et cette expression est égale à $dg_\varphi(0, \dots, n)$.

Commençons par traiter le cas $n = 1$. Si l'application φ est constante, la valeur de g'_φ est de nouveau imposée par la propriété (c). Il reste donc à considérer le cas où φ est l'identité de Δ_1 . Dans ce cas, on a

$$g_\varphi(01) = (0) \otimes (01) + (01) \otimes (1)$$

et donc

$$\begin{aligned} dg_\varphi(01) &= (0) \otimes (1) - (0) \otimes (0) + (1) \otimes (1) - (0) \otimes (1) \\ &= (1) \otimes (1) - (0) \otimes (0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer $g'_\varphi(01)$, on est conduit à résoudre l'équation

$$(\varepsilon) \otimes (1) - (\varepsilon) \otimes (0) + (1) \otimes x - (0) \otimes x = (1) \otimes (1) - (0) \otimes (0).$$

Si $\varepsilon = 0$, alors, par identification, on a $x = (1)$ et on trouve bien $g'_\varphi(01) = g_\varphi(01)$. Si $\varepsilon = 1$, alors, toujours par identification, on a $x = (0)$ et

$$g'_\varphi(01) = (1) \otimes (01) + (01) \otimes (0)$$

est une seconde solution de l'équation. Néanmoins, on va montrer que cette formule pour $g'_\varphi(01)$ est en contradiction avec le cas $n = 2$. Considérons le morphisme $\psi : \Delta_2 \rightarrow \Delta_1$ envoyant 0 et 1 sur 0, et 2 sur 1. En utilisant cette valeur de $g'_\varphi(01)$, on aurait, en vertu des conditions (b) et (c),

$$\begin{aligned} dg'_\psi(012) &= g'_\psi(12) - g'_\psi(02) + g'_\psi(01) \\ &= ((1) \otimes (12) + (01) \otimes (1)) - ((1) \otimes (02) + (01) \otimes (0)) + (0) \otimes (01) \\ &= (0) \otimes (01) + (1) \otimes ((12) - (02)) + (01) \otimes ((1) - (0)) \end{aligned}$$

et cette expression vaudrait

$$(\varepsilon) \otimes d(012) + (1) \otimes x - (0) \otimes x - (01) \otimes dx.$$

Si $\varepsilon = 0$, par identification, on aurait $x = (12) - (02)$, ce qui est impossible puisque cet élément n'est pas positif au sens où il n'appartient pas au sous-monoïde de positivité $\mathbf{c}(\Delta_2)_1^*$. De même, si $\varepsilon = 1$, on aurait $x = -(01)$, ce qui est également impossible. Ainsi, la seconde formule considérée pour $g'_\varphi(01)$ n'est pas correcte et on a bien établi le cas $n = 1$ de notre récurrence.

Passons maintenant au cas $n > 1$. Notons r le nombre de 0 parmi les entiers $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$. On distingue trois cas suivant la définition de g_φ :

— Si $r = 0$, alors

$$g_\varphi(0, \dots, n) = (1) \otimes (0, \dots, n)$$

et donc

$$dg_\varphi(0, \dots, n) = (1) \otimes d(0, \dots, n).$$

Il suffit de montrer que l'équation

$$(\varepsilon) \otimes d(0, \dots, n) + (1) \otimes x - (0) \otimes x - (01) \otimes dx = (1) \otimes d(0, \dots, n)$$

admet pour unique solution $\varepsilon = 1$ et $x = 0$. Si $\varepsilon = 0$, alors, par identification, on obtient $x = d(0, \dots, n)$, ce qui est impossible puisque cet élément n'est pas positif. Si $\varepsilon = 1$, alors, toujours par identification, $x = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

— Si $r = 1$, alors

$$g_\varphi(0, \dots, n) = (0) \otimes (0, \dots, n) + (01) \otimes (1, \dots, n)$$

et donc $dg_\varphi(0, \dots, n)$ est égal à

$$(0) \otimes d(0, \dots, n) + (1) \otimes (1, \dots, n) - (0) \otimes (1, \dots, n) - (01) \otimes d(1, \dots, n).$$

On cherche donc à résoudre l'équation affirmant l'égalité de cette dernière expression et de

$$(\varepsilon) \otimes d(0, \dots, n) + (1) \otimes x - (0) \otimes x - (01) \otimes dx.$$

Si $\varepsilon = 1$, alors $x = (1, \dots, n) - d(0, \dots, n)$, ce qui est impossible puisque cet élément n'est pas positif (car $n > 1$). Si $\varepsilon = 0$, alors $x = (1, \dots, n)$, ce qu'on voulait démontrer.

— Si $r \geq 2$, alors

$$g_\varphi(0, \dots, n) = (0) \otimes (0, \dots, n)$$

et donc

$$dg_\varphi(0, \dots, n) = (0) \otimes d(0, \dots, n).$$

Ainsi, il s'agit de résoudre l'équation

$$(\varepsilon) \otimes d(0, \dots, n) + (1) \otimes x - (0) \otimes x - (01) \otimes dx = (0) \otimes d(0, \dots, n).$$

Si $\varepsilon = 1$, alors $x = -d(0, \dots, n)$ qui n'est pas positif. Si $\varepsilon = 0$, alors $x = 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

A.10. Soient $u, v : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs et α une transformation oplax de u vers v . On définit une homotopie simpliciale $N(\alpha) : \Delta_1 \times N(C) \rightarrow N(D)$ de $N(u)$ vers $N(v)$ en composant

$$\Delta_1 \times N(C) \xrightarrow{s} N(D_1 \otimes C) \xrightarrow{N(\alpha)} N(D).$$

Théorème A.11. *Le morphisme $N(\alpha) : \Delta_1 \times N(C) \rightarrow N(D)$ est bien une homotopie simpliciale de $N(u)$ vers $N(v)$.*

Démonstration. Il nous suffit vérifier que l'homotopie simpliciale $N(\alpha)$ a bien pour source $N(u)$ et pour but $N(v)$. Cela résulte de la compatibilité de la section s aux extrémités et plus précisément de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 \times N(C) & \xrightarrow{s} & N(D_1 \otimes C) \xrightarrow{N(\alpha)} D \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{\varepsilon\} \times N(C) & \xrightarrow{\sim} & N(\{\varepsilon\} \otimes C) \end{array}$$

pour $\varepsilon = 0, 1$. $\square$

Remarque A.12. On prendra garde au fait que si $\alpha : D_1 \otimes C \rightarrow D$ est une transformation oplax, alors $N(\alpha)$ désigne *a priori* deux objets distincts : d'une part, l'homotopie simpliciale du théorème précédent et, d'autre part, le nerf du ∞ -foncteur α qui est un morphisme simplicial de $N(D_1 \otimes C)$ vers $N(D)$. Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, c'est toujours le premier objet, à savoir l'homotopie simpliciale, qui sera désigné par la notation $N(\alpha)$.

Corollaire A.13. *Soit $u : C \rightarrow D$ un ∞ -foncteur. On suppose qu'il existe un ∞ -foncteur $v : D \rightarrow C$ et des transformations oplax entre, d'une part, vu et 1_C et, d'autre part, uv et 1_D . Alors $N(u)$ est une équivalence d'homotopie et, en particulier, u est une équivalence de Thomason.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente. $\square$

Proposition A.14. *Soient u, v deux ∞ -foncteurs, $h : D_1 \times C \rightarrow D$ une transformation stricte de u vers v et α_h la transformation oplax associée à h (voir le paragraphe 4.19). Alors les homotopies simpliciales $N(\alpha_h)$ et $N(h)$ coïncident.*

Démonstration. Par définition, l'homotopie simpliciale $N(\alpha_h)$ est donnée par le composé

$$\Delta_1 \times N(C) \xrightarrow{s} N(D_1 \otimes C) \xrightarrow{N(q)} N(D_1 \times C) \xrightarrow{N(h)} N(D).$$

Puisque s est une section de $N(q)$, ce composé n'est autre que $N(h)$, ce qu'on voulait démontrer. $\square$

Proposition A.15. *Soient $v_0, v_1 : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs et α une transformation oplax de v_0 vers v_1 .*

(a) *Si $u : B \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur, alors on a*

$$N(\alpha * u) = N(\alpha)(\Delta_1 \times N(u)).$$

(b) *Si $w : D \rightarrow E$ est un ∞ -foncteur, alors on a*

$$N(w * \alpha) = N(w)N(\alpha).$$

Démonstration. Ces égalités résultent des formules définissant $\alpha * u$ et $w * \alpha$ (voir le paragraphe 4.12) et de la naturalité de s pour la première. $\square$

Proposition A.16. *Considérons un diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & C & \xleftarrow{g} & B \\ u \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \Downarrow \end{array} \right) u' & & w \left(\begin{array}{c} \gamma \\ \Downarrow \end{array} \right) w' & & v \left(\begin{array}{c} \beta \\ \Downarrow \end{array} \right) v' \\ A' & \xrightarrow{f'} & C' & \xleftarrow{g'} & B' \end{array}$$

de ∞ -catégories, où α, β et γ sont de transformations oplax de u vers u' , de v vers v' et de w vers w' respectivement, commutatif au sens où

$$\gamma * f = f' * \alpha \quad \text{et} \quad \gamma * g = g' * \beta.$$

Alors on a

$$N(\alpha \times_\gamma \beta) = N(\alpha) \times_{N(\gamma)} N(\beta),$$

où $\alpha \times_\gamma \beta$ est la transformation oplax du paragraphe 4.13.

Démonstration. Notons tout d'abord qu'en vertu de la proposition précédente, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 \times N(A) & \xrightarrow{\Delta_1 \times N(f)} & \Delta_1 \times N(C) & \xleftarrow{\Delta_1 \times N(g)} & \Delta_1 \times N(B) \\ N(\alpha) \downarrow & & N(\gamma) \downarrow & & \downarrow N(\beta) \\ N(A') & \xrightarrow{N(f')} & N(C') & \xleftarrow{N(g')} & N(B') \end{array}$$

est commutatif et le produit fibré $N(\alpha) \times_{N(\gamma)} N(\beta)$ est donc bien défini. Soit (φ, z) un n -simplexe de $\Delta_1 \times N(A \times_C B)$. Notons $x : \mathcal{O}_n \rightarrow A$ et $y : \mathcal{O}_n \rightarrow B$ les composantes de z de sorte qu'on a $z = (x, y) : \mathcal{O}_n \rightarrow A \times_C B$. L'assertion résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & D_1 \otimes A & \xlongequal{\quad} & D_1 \otimes A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ & \nearrow D_1 \otimes x & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ D_1 \otimes \mathcal{O}_n & \xrightarrow{D_1 \otimes z} & D_1 \otimes (A \times_C B) & \longrightarrow & (D_1 \otimes A) \times_{D_1 \otimes C} (D_1 \otimes B) & \xrightarrow{\alpha \times_{\gamma} \beta} & A' \times_{C'} B' \\ & \searrow D_1 \otimes y & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & D_1 \otimes B & \xlongequal{\quad} & D_1 \otimes B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array},$$

où les flèches non nommées sont les flèches canoniques. □

Corollaire A.17. *Considérons un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ & \downarrow \alpha & \\ & u' & \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & f & \\ & \searrow & \\ & & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & f' & \\ & \nearrow & \\ & & C \end{array}$$

de ∞ -catégories, commutatif au sens où $f' * \alpha = 1_f$. Alors on a

$$N(\alpha \times_C B) = N(\alpha) \times_C B.$$

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, on a

$$N(\alpha \times_C B) = N(\alpha) \times_{N(1_{1_C})} N(1_{1_B}).$$

Or, il résulte de la proposition A.14 que, si D est une ∞ -catégorie, alors $N(1_D)$ est la projection canonique $\Delta_1 \times D \rightarrow D$, d'où le résultat. □

A.18. Soient $u, v : C \rightarrow D$ deux ∞ -foncteurs et α une transformation *lax* de u vers v . On va associer à α une homotopie simpliciale $N(\alpha)$ de $N(u)$ vers $N(v)$. Considérons la transformation *oplax* α^{op} de v^{op} vers u^{op} et $N(\alpha^{\text{op}}) : \Delta_1 \times N(C^{\text{op}}) \rightarrow N(D^{\text{op}})$ l'homotopie simpliciale de $N(v^{\text{op}})$ vers $N(u^{\text{op}})$ associée. En appliquant la dualité simpliciale $X \mapsto X^{\text{op}}$, on obtient un morphisme $N(\alpha^{\text{op}})^{\text{op}} : \Delta_1^{\text{op}} \times N(C^{\text{op}})^{\text{op}} \rightarrow N(D^{\text{op}})^{\text{op}}$ qui définit une homotopie simpliciale de $N(u^{\text{op}})^{\text{op}}$ vers $N(v^{\text{op}})^{\text{op}}$. Or, en vertu de la proposition 5.2, ces deux morphismes s'identifient respectivement à $N(u)$ et $N(v)$. Ainsi, $N(\alpha^{\text{op}})^{\text{op}}$ est bien une homotopie simpliciale de $N(u)$ vers $N(v)$ et c'est cette homotopie simpliciale qu'on notera $N(\alpha)$.

Tous les résultats obtenus dans le cas *oplax* s'adaptent immédiatement au cas *lax*.

Remarque A.19. On peut également définir directement $N(\alpha)$, pour α une transformation lax, comme on l'a fait dans le cas oplax. Pour ce faire, il suffit de remplacer le morphisme

$$g_\varphi : \mathbf{c}(\Delta_n) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_1) \otimes \mathbf{c}(\Delta_n)$$

du paragraphe A.8 par le morphisme

$$g'_\varphi : \mathbf{c}(\Delta_n) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_n) \otimes \mathbf{c}(\Delta_1)$$

défini par le composé

$$\mathbf{c}(\Delta_n) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{c}(\Delta_n) \otimes \mathbf{c}(\Delta_n) \xrightarrow{\mathbf{c}(\Delta_n) \otimes \mathbf{c}(\varphi)} \mathbf{c}(\Delta_n) \otimes \mathbf{c}(\Delta_1).$$

Explicitement, on a

$$g'_\varphi(i_0, \dots, i_p) = \begin{cases} (i_0, \dots, i_p) \otimes (0) & \text{si } r' = 0, \\ (i_0, \dots, i_p) \otimes (1) + (i_0, \dots, i_{p-1}) \otimes (01) & \text{si } r' = 1, \\ (i_0, \dots, i_p) \otimes (1) & \text{si } r' \geq 2, \end{cases}$$

où r' désigne le nombre de 1 parmi $\varphi(i_0), \dots, \varphi(i_p)$ et où on a convenu que $(i_0, \dots, i_{p-1}) = 0$ si $p = 0$.

Appendice B : Tranches sesquicatégoriques et ∞ -catégories comma

Le but de cet appendice est d'étudier les propriétés de 2-fonctorialité de la construction comma introduite dans la section 6 afin de démontrer la proposition 6.13 qu'on a admise dans le corps de ce texte. Dans la première sous-section, on construit des sesquicatégories $\mathbb{C}/c$ et $\mathbb{C}/c^{to}$ associées à une ∞ -catégorie de Gray $\mathbb{C}$ et un objet c de $\mathbb{C}$ et, dans la seconde, on montre que, pour toute ∞ -catégorie Z , la construction comma $-\downarrow_Z-$ définit un sesquifoncteur

$$\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z^{to} \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}},$$

où $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ désigne la ∞ -catégorie de Gray des ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et i -transformations oplax pour $i \geq 1$ et $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ la sesquicatégorie des ∞ -catégories, ∞ -foncteurs et transformations oplax.

B.1 Tranche sesquicatégorique d'une ∞ -catégorie de Gray

B.1. Une ∞ -catégorie de Gray est une catégorie enrichie dans la catégorie monoïdale des ∞ -catégories munie du produit tensoriel de Gray. Ainsi, si $\mathbb{C}$ est une ∞ -catégorie de Gray, on dispose d'un ensemble $\text{Ob}(\mathbb{C})$ appelé *ensemble des objets* ou des *0-cellules* de $\mathbb{C}$ et, pour tous objets x et y , d'une ∞ -catégorie $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y)$, qu'on notera parfois aussi $\mathbb{C}_{x,y}$. On dispose également, pour toute 0-cellule x , d'un objet *identité* 1_x de $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, x)$ et, pour tous objets x, y et z de $\mathbb{C}$, d'un ∞ -foncteur de *composition*

$$\circ_{z,y,x} : \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z).$$

Ces données sont soumises à des axiomes affirmant que les identités sont des neutres pour la composition et que la composition est associative.

Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray. Pour $i \geq 1$, on appellera i -cellule de $\mathbb{C}$ une $(i - 1)$ -cellule de $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y)$ pour x et y deux objets de $\mathbb{C}$. On dira que x est la 0-source et que y est le 0-but d'une telle cellule. Les cellules de $\mathbb{C}$ forment de manière évidente un ensemble globulaire. Soient α et β deux i -cellules de $\mathbb{C}$, pour $i > 1$, ayant même 0-source x et même 0-but y . On notera $\beta *_j \alpha$ le composé $\beta *_j \alpha$ de $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y)$, pour $1 \leq j < i$, si celui-ci est bien défini.

Exemple B.2. Le foncteur identité $\infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Cat}$ est un foncteur monoïdal lax de source $\infty\text{-Cat}$ munie du produit cartésien et de but $\infty\text{-Cat}$ munie du produit tensoriel de Gray, la contrainte tensorielle étant donnée par la transformation naturelle $q : A \otimes B \rightarrow A \times B$ du paragraphe 4.16. Une ∞ -catégorie stricte pouvant être considérée comme une catégorie enrichie dans la catégorie monoïdale des ∞ -catégories strictes munie du produit cartésien, on en déduit un foncteur des ∞ -catégories strictes vers les ∞ -catégories de Gray. Si C est une ∞ -catégorie stricte, pour tout $i \geq 0$, les i -cellules de la ∞ -catégorie de Gray associée à C coïncident avec les i -cellules de C , ce qui justifie notre terminologie pour les cellules des ∞ -catégories de Gray.

Exemple B.3. Les ∞ -catégories, ∞ -foncteurs, transformations oplax, 2-transformations oplax, etc. s'organisent naturellement en une ∞ -catégorie de Gray qu'on notera $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. Plus précisément, les objets de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ sont les ∞ -catégories et, si A et B sont deux ∞ -catégories, on pose

$$\underline{\text{Hom}}_{\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}}(A, B) = \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B).$$

Il résulte formellement de la relation d'adjonction entre le produit tensoriel $\otimes$ et $\underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}$ qu'on dispose de compositions et d'unités et que $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ est bien une ∞ -catégorie de Gray (voir [7, exemples C.10 et C.18]).

Nous allons maintenant expliciter une partie de la structure des ∞ -catégories de Gray. Nous commençons par des préliminaires sur les disques et les produits tensoriels de disques.

Proposition B.4 (Steiner). *Soit $i \geq 0$. Le complexe dirigé augmenté $\lambda(D_i)$ est de Steiner fort. Sa base est constituée des $[x]$, où x varie parmi les cellules de D_i qui ne sont pas des identités. De plus, le morphisme d'adjonction $D_i \rightarrow \nu\lambda(D_i)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Voir [27, section 3] ou [7, chapitre 4]. □

B.5. Soient $i \geq 0$ et $j \geq 0$ deux entiers. On définit un ∞ -foncteur

$$c : D_{i+j} \rightarrow D_i \otimes D_j$$

de la manière suivante. En vertu de la proposition précédente et de la compatibilité aux produits tensoriels du foncteur ν restreint aux complexes de Steiner forts (voir le théorème 4.4), on a un isomorphisme canonique

$$D_i \otimes D_j \simeq \nu(\lambda(D_i) \otimes \lambda(D_j)).$$

Ainsi, en notant c_k , pour $k \geq 0$, la cellule principale de D_k (voir le paragraphe 4.9), on dispose d'une $(i + j)$ -cellule

$$\langle [c_i] \otimes [c_j] \rangle$$

de $D_i \otimes D_j$. On appellera cette cellule la *cellule principale* de $D_i \otimes D_j$ et on la notera $c_{i,j}$. Elle définit un ∞ -foncteur $c : D_{i+j} \rightarrow D_i \otimes D_j$ comme annoncé.

Dans la suite, on identifiera c_k , pour $k \geq 0$, avec $[c_k]$ et on notera donc simplement $\langle c_i \otimes c_j \rangle$ la cellule principale de $D_i \otimes D_j$.

Remarque B.6. On peut montrer que $c_{i,j} = \langle c_i \otimes c_j \rangle$ est l'unique $(i+j)$ -cellule de $D_i \otimes D_j$ qui ne soit pas une identité.

B.7. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray et soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$ deux entiers. Si α est une i -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source x et 0-but y et β est une j -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source y et de 0-but z , on définit une $(i+j-1)$ -cellule $\beta \circ \alpha$ de $\mathbb{C}$ de 0-source x et de 0-but z de la manière suivante. Les cellules α et β correspondent à des ∞ -foncteurs

$$\alpha : D_{i-1} \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \quad \text{et} \quad \beta : D_{j-1} \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z)$$

et la cellule $\beta \circ \alpha$ est définie par le ∞ -foncteur

$$D_{i+j-2} \xrightarrow{c} D_{j-1} \otimes D_{i-1} \xrightarrow{\beta \otimes \alpha} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \xrightarrow{\circ_{z,y,x}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z),$$

où c désigne le ∞ -foncteur du paragraphe B.5.

Si α est une 1-cellule f , on notera $\beta *_0 f$ la j -cellule $\beta \circ f$. De même, si β est une 1-cellule f , on notera $f *_0 \alpha$ la i -cellule $f \circ \alpha$.

Proposition B.8. Soit f une 1-cellule d'une ∞ -catégorie de Gray $\mathbb{C}$ de source x et de but y .

- (a) Soit $i \geq 1$ et soit α une i -cellule de 0-source y et de 0-but z . Alors la i -cellule $\alpha *_0 f$ est l'image de α par le ∞ -foncteur

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \xrightarrow{1 \otimes f} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \xrightarrow{\circ_{z,y,x}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z),$$

où on a identifié $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z)$ à $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \otimes D_0$. En particulier, $- *_0 f$ est un ∞ -foncteur.

- (b) Soit $i \geq 1$ et soit α une i -cellule de 0-source t et de 0-but x . Alors la i -cellule $f *_0 \alpha$ est l'image de α par le ∞ -foncteur

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(t, x) \xrightarrow{f \otimes 1} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(t, x) \xrightarrow{\circ_{y,x,t}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(t, y).$$

En particulier, $f *_0 -$ est un ∞ -foncteur.

Démonstration. Démontrons la première assertion, la seconde se démontrant de manière analogue. Il s'agit de démontrer l'égalité des deux composés de D_{i-1} vers $\mathbb{C}_{x,z}$ du bord du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D_{i-1} & \xrightarrow{c} & D_{i-1} \otimes D_0 & & \\ \alpha \downarrow & & \alpha \otimes D_0 \downarrow & \searrow \alpha \otimes f & \\ \mathbb{C}_{y,z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}_{y,z} \otimes D_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y} \xrightarrow{\circ_{z,y,x}} \mathbb{C}_{x,z} \\ & & \nearrow \mathbb{C}_{y,z} \otimes f & & \end{array},$$

où la flèche horizontale du bas est la contrainte d'unité du produit tensoriel. Le triangle de ce diagramme étant commutatif par définition, il suffit de vérifier la commutativité du carré. Or, le morphisme $c : D_{i-1} \rightarrow D_{i-1} \otimes D_0$ n'est autre que la contrainte d'unité du produit tensoriel et le carré est donc commutatif par naturalité de celle-ci. $\square$

Remarque B.9. La proposition précédente entraîne que si f est une 1-cellule d'une ∞ -catégorie de Gray, on a

$$\begin{aligned} f *_0 1_\alpha &= 1_{f *_0 \alpha} & 1_\alpha *_0 f &= 1_{\alpha *_0 f} \\ f *_0 (\beta *_j \alpha) &= (f *_0 \beta) *_j (f *_0 \alpha) & (\beta *_j \alpha) *_j f &= (\beta *_0 f) *_j (\alpha *_0 f), \end{aligned}$$

où, dans les égalités du haut, α est une i -cellule avec $i \geq 1$ et, dans celles du bas, α et β sont des i -cellules et $i > j \geq 1$, dès que ces compositions ont un sens (voir le paragraphe B.1 pour la définition de $*_j$).

Proposition B.10. *L'opération $\circ$ d'une ∞ -catégorie de Gray $\mathbb{C}$ est associative. Autrement dit, pour $i \geq 1$, $j \geq 1$ et $k \geq 1$, si α est une i -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source x et de 0-but y , β est une j -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source y et de 0-but z , et γ est une k -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source z et de 0-but t , alors on a l'égalité*

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$$

de $(i + j + k - 2)$ -cellules de 0-source x et de 0-but t .

Démonstration. Posons $i' = i - 1$, $j' = j - 1$ et $k' = k - 1$. Il s'agit de montrer la commutativité du bord du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{c \otimes D_{i'}} & & \xrightarrow{(\gamma \otimes \beta) \otimes \alpha} & & \\ & \nearrow c & D_{j'+k'} \otimes D_{i'} & \longrightarrow & (D_{k'} \otimes D_{j'}) \otimes D_{i'} & \longrightarrow & (\mathbb{C}_{z,t} \otimes \mathbb{C}_{y,z}) \otimes \mathbb{C}_{x,y} \\ & & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & \searrow \\ D_{i'+j'+k'} & & & & & & \mathbb{C}_{x,t} \\ & \searrow c & D_{k'} \otimes D_{i'+j'} & \longrightarrow & D_{k'} \otimes (D_{j'} \otimes D_{i'}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_{z,t} \otimes (\mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y}) \\ & & \xrightarrow{D_{k'} \otimes c} & & \xrightarrow{\gamma \otimes (\beta \otimes \alpha)} & & \end{array},$$

où les isomorphismes verticaux sont la contrainte d'associativité du produit tensoriel et les flèches obliques de droite sont induites par la composition de $\mathbb{C}$. Le carré du diagramme est commutatif par naturalité de la contrainte d'associativité et le triangle de droite par associativité de la composition de $\mathbb{C}$. Il suffit donc de montrer la commutativité du pentagone. Par définition, et avec les notations du paragraphe B.5, la flèche oblique d'en haut à gauche correspond à la cellule $\langle c_{j'+k'} \otimes c_{i'} \rangle$. Puisque le ∞ -foncteur $c : D_{j'+k'} \rightarrow D_{k'} \otimes D_{j'}$ envoie $\langle c_{j'+k'} \rangle$ sur $\langle c_{k'} \otimes c_{j'} \rangle$, en vertu de la proposition 4.20, la flèche horizontale d'en haut à gauche envoie $\langle c_{j'+k'} \otimes c_{i'} \rangle$ sur $\langle (c_{k'} \otimes c_{j'}) \otimes c_{i'} \rangle$. Ainsi, le ∞ -foncteur $D_{i'+j'+k'} \rightarrow (D_{k'} \otimes D_{j'}) \otimes D_{i'}$ du diagramme correspond à la cellule $\langle (c_{k'} \otimes c_{j'}) \otimes c_{i'} \rangle$. De même, le ∞ -foncteur $D_{i'+j'+k'} \rightarrow D_{k'} \otimes (D_{j'} \otimes D_{i'})$ du diagramme correspond à la cellule $\langle c_{k'} \otimes (c_{j'} \otimes c_{i'}) \rangle$, ce qui prouve la commutativité du pentagone et donc du diagramme, d'où le résultat. $\square$

Proposition B.11. *L'opération $\circ$ d'une ∞ -catégorie de Gray $\mathbb{C}$ vérifie les compatibilités aux unités suivantes :*

(a) Soit $i \geq 1$ et soit α une i -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source x et de 0-but y . On a

$$1_y *_0 \alpha = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha *_0 1_x = \alpha.$$

(b) Soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$ deux entiers et soient α une i -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source x et de 0-but y , et β une j -cellule de $\mathbb{C}$ de 0-source y et de 0-but z . Alors on a

$$1_\beta \circ \alpha = 1_{\beta \circ \alpha} \quad \text{et} \quad \beta \circ 1_\alpha = 1_{\beta \circ \alpha}.$$

Démonstration. (a) Démontrons la première égalité, la seconde se démontrant de manière analogue. Posons $i' = i - 1$. Il s'agit de montrer que le ∞ -foncteur composé

$$D_{i'} \xrightarrow{c} D_0 \otimes D_{i'} \xrightarrow{1_y \otimes \alpha} \mathbb{C}_{y,y} \otimes \mathbb{C}_{x,y} \xrightarrow{\circ_{y,y,x}} \mathbb{C}_{x,y}$$

correspond à la cellule α . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D_{i'} & \xrightarrow{c} & D_0 \otimes D_{i'} & \xrightarrow{1_y \otimes \alpha} & \mathbb{C}_{y,y} \otimes \mathbb{C}_{x,y} & \xrightarrow{o_{y,y,x}} & \mathbb{C}_{x,y} \\ & & \searrow D_0 \otimes \alpha & & \uparrow 1_y \otimes \mathbb{C}_{x,y} & & \\ & & & & D_0 \otimes \mathbb{C}_{x,y} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}_{x,y} \end{array},$$

où la flèche oblique de droite est la contrainte d'unité du produit tensoriel. Le triangle de gauche est commutatif par définition et celui de droite par l'axiome d'unité des ∞ -catégories de Gray. Or, le morphisme $c : D_{i'} \rightarrow D_0 \otimes D_{i'}$ n'est autre que la contrainte d'unité du produit tensoriel et on conclut par naturalité de celle-ci.

(b) Démontrons la première égalité, la seconde se démontrant de manière analogue. Posons $i' = i - 1$ et $j' = j - 1$. Il s'agit de montrer l'égalité des deux composés de $D_{i'+j'+1}$ vers $\mathbb{C}_{x,z}$ du bord du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D_{i'+j'+1} & \xrightarrow{c} & D_{j'+1} \otimes D_{i'} & \xrightarrow{1_\beta \otimes \alpha} & \mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y} & \xrightarrow{o_{z,y,x}} & \mathbb{C}_{x,z} \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \otimes D_{i'} & & \uparrow \beta \otimes \alpha & & \\ D_{i'+j'} & \xrightarrow{c} & D_{j'} \otimes D_{i'} & \xrightarrow{\beta \otimes \alpha} & \mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y} & & \end{array},$$

où κ désigne le ∞ -foncteur du paragraphe 4.9. Le triangle du diagramme étant commutatif par définition, il suffit de montrer la commutativité du carré. Il s'agit donc de montrer que la flèche verticale de droite envoie $\langle c_{j'+1} \otimes c_{i'} \rangle$ sur $1_{\langle c_{j'} \otimes c_{i'} \rangle}$, ce qui résulte de la proposition 4.20. $\square$

Proposition B.12. *Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray provenant d'une ∞ -catégorie stricte (voir l'exemple B.2), soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$ deux entiers et soient α une i -cellule de 0-source x et de 0-but y , et β une j -cellule de 0-source y et de 0-but z . Alors la $(i + j - 1)$ -cellule $\beta \circ \alpha$ est l'identité itérée de la cellule $\beta *_0 \alpha$. En particulier, si $i = 1$ ou $j = 1$, les deux définitions de $\beta *_0 \alpha$ coïncident.*

Démonstration. Posons $i' = i - 1$ et $j' = j - 1$. Il s'agit de montrer la commutativité du bord du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & D_{j'} \otimes D_{i'} & \xrightarrow{\beta \otimes \alpha} & \mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y} & \xrightarrow{o_{z,y,x}} & \mathbb{C}_{x,z} \\ & \nearrow c & \downarrow q & & \downarrow q & & \\ D_{i'+j'} & & D_{j'} \times D_{i'} & \xrightarrow{\beta \times \alpha} & \mathbb{C}_{y,z} \times \mathbb{C}_{x,y} & \nearrow & \end{array},$$

où la flèche oblique d'en bas à gauche correspond à la $(i' + j')$ -cellule $(1_{c_{j'}}, 1_{c_{i'}})$ et celle d'en bas à droite est la composition de la ∞ -catégorie stricte de laquelle provient $\mathbb{C}$. Or, le triangle de droite est commutatif par définition et le carré central est commutatif par naturalité de q . Il s'agit donc de vérifier la commutativité du triangle de gauche, c'est-à-dire le fait que les « projections » $D_{j'} \otimes D_{i'} \rightarrow D_{j'}$ et $D_{j'} \otimes D_{i'} \rightarrow D_{i'}$ envoient $\langle c_{j'} \otimes c_{i'} \rangle$ sur $1_{\langle c_{j'} \rangle}$ et $1_{\langle c_{i'} \rangle}$ respectivement. Ceci résulte de la proposition 4.20 (qu'on applique en identifiant $D_{j'}$ à $D_{j'} \otimes D_0$ et $D_{i'}$ à $D_0 \otimes D_{i'}$), d'où le résultat. $\square$

On va maintenant décrire l'opération $\circ$ sur les 2-cellules d'une ∞ -catégorie de Gray.

B.13. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray et soient α une 2-cellule de 0-source x et de 0-but y , et β une 2-cellule de 0-source y et de 0-but z

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \alpha \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} y \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \beta \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} z \quad .$$

Si $\mathbb{C}$ était une ∞ -catégorie stricte, on disposerait d'une 2-cellule $\beta *_0 \alpha$ composée horizontale de β et α . Selon la règle de Godement, cette composée s'exprimerait en termes de la composition verticale des 2-cellules des deux manières suivantes :

$$(\beta *_0 t(\alpha)) *_1 (s(\beta) *_0 \alpha) \quad \text{et} \quad (t(\beta) *_0 \alpha) *_1 (\beta *_0 s(\alpha)).$$

En général, ces deux composés diffèrent dans une ∞ -catégorie de Gray. Néanmoins, la proposition suivante affirme que l'opération $\circ$ produit une 3-cellule de comparaison qu'on appellera *contrainte de Gray*.

Proposition B.14. *Soit*

$$x \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \alpha \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} y \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \beta \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} z$$

un diagramme dans une ∞ -catégorie de Gray. Le ∞ -foncteur composé

$$D_1 \otimes D_1 \xrightarrow{\beta \otimes \alpha} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(y, z) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y) \xrightarrow{\circ_{z, y, x}} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z)$$

correspond à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{s(\beta) *_0 \alpha} & \bullet \\ \beta *_0 s(\alpha) \downarrow & \beta \circ \alpha \swarrow & \downarrow \beta *_0 t(\alpha) \\ \bullet & \xrightarrow{t(\beta) *_0 \alpha} & \bullet \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$. En particulier, on a

$$(\beta *_0 t(\alpha)) *_1 (s(\beta) *_0 \alpha) \xrightarrow{\beta \circ \alpha} (t(\beta) *_0 \alpha) *_1 (\beta *_0 s(\alpha)).$$

Démonstration. En vertu de [7, proposition B.1.6], en notant a et b les cellules principales des copies de D_1 apparaissant de droite à gauche dans $D_1 \otimes D_1$, on a

$$D_1 \otimes D_1 \simeq \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\langle s(b) \otimes a \rangle} & \bullet \\ \langle b \otimes s(a) \rangle \downarrow & \langle b \otimes a \rangle \swarrow & \downarrow \langle b \otimes t(a) \rangle \\ \bullet & \xrightarrow{\langle t(b) \otimes a \rangle} & \bullet \end{array} .$$

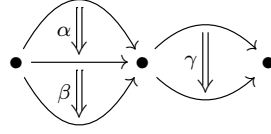
Par définition, le ∞ -foncteur $D_2 \rightarrow D_1 \otimes D_1$ du paragraphe B.5 correspond à la 2-cellule $\langle b \otimes a \rangle$. La composition $*_0$ étant un cas particulier de la composition $\circ$, on en déduit un carré

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{s(\beta) *_0 \alpha} & \bullet \\ \beta *_0 s(\alpha) \downarrow & \beta \circ \alpha \swarrow & \downarrow \beta *_0 t(\alpha) \\ \bullet & \xrightarrow{t(\beta) *_0 \alpha} & \bullet \end{array}$$

dans $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, z)$, ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition B.15. *Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray.*

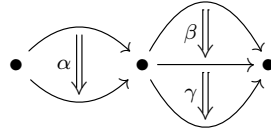
(a) *Si*



est un diagramme dans $\mathbb{C}$, alors on a

$$\gamma \circ (\beta *_1 \alpha) = ((t(\gamma) *_0 \beta) *_1 (\gamma \circ \alpha)) *_2 ((\gamma \circ \beta) *_1 (s(\gamma) *_0 \alpha)).$$

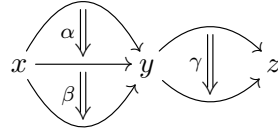
(b) *De même, si*



est un diagramme $\mathbb{C}$, alors on

$$(\gamma *_1 \beta) \circ \alpha = ((\gamma \circ \alpha) *_1 (\beta *_0 s(\alpha))) *_2 ((\gamma *_0 t(\alpha)) *_1 (\beta \circ \alpha)).$$

Démonstration. Démontrons la première assertion, la seconde se démontrant de manière analogue. Considérons donc un diagramme



dans $\mathbb{C}$. Notons $\nabla : D_1 \rightarrow D_1 \amalg_{D_0}^\sigma D_1$, où σ et τ désignent les ∞ -foncteurs du paragraphe 4.9, le ∞ -foncteur correspondant au composé des deux 1-cellules de

$$D_1 \amalg_{D_0} D_1 = \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \quad .$$

Par définition, la 2-cellule $\gamma \circ (\beta *_1 \alpha)$ correspond au ∞ -foncteur

$$D_2 \xrightarrow{c} D_1 \otimes D_1 \xrightarrow{D_1 \otimes \nabla} D_1 \otimes (D_1 \amalg_{D_0} D_1) \xrightarrow{\gamma \otimes (\beta, \alpha)} \mathbb{C}_{y,z} \otimes \mathbb{C}_{x,y} \xrightarrow{\circ_{z,y,x}} \mathbb{C}_{x,z} \quad .$$

Notons que, le produit tensoriel commutant aux limites inductives en chaque variable, on a un isomorphisme canonique

$$D_1 \otimes (D_1 \amalg_{D_0} D_1) \simeq (D_1 \otimes D_1) \amalg_{D_1} (D_1 \otimes D_1)$$

et le ∞ -foncteur $\gamma \otimes (\beta, \alpha)$ s'identifie, à travers cet isomorphisme, au ∞ -foncteur $(\gamma \otimes \beta, \gamma \otimes \alpha)$. En vertu de [7, proposition B.1.6], en notant a , b et c les cellules principales des copies de D_1 apparaissant de droite à gauche dans $D_1 \otimes (D_1 \amalg_{D_0} D_1)$, on a

$$D_1 \otimes (D_1 \amalg_{D_0} D_1) \simeq \begin{array}{ccccc} \bullet & \xrightarrow{\langle s(c) \otimes a \rangle} & \bullet & \xrightarrow{\langle s(c) \otimes b \rangle} & \bullet \\ \downarrow \langle c \otimes s(a) \rangle & \searrow \langle c \otimes a \rangle & \downarrow \langle c \otimes b \rangle & \searrow \langle c \otimes t(b) \rangle & \downarrow \langle c \otimes t(b) \rangle \\ \bullet & \xrightarrow{\langle t(c) \otimes a \rangle} & \bullet & \xrightarrow{\langle t(c) \otimes b \rangle} & \bullet \end{array} \quad ,$$

la flèche verticale du milieu étant $\langle c \otimes t(a) \rangle = \langle c \otimes s(b) \rangle$. L'image de ce diagramme par le ∞ -foncteur de $D_1 \otimes (D_1 \amalg_{D_0} D_1)$ vers $\mathbb{C}_{x,z}$ est le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \xrightarrow{s(\gamma)*_0\alpha} & \bullet & \xrightarrow{s(\gamma)*_0\beta} & \bullet \\
 \downarrow \gamma*_0s(\alpha) & \searrow \gamma \circ \alpha & \downarrow \gamma \circ \beta & \searrow \gamma*_0t(\beta) & \\
 \bullet & \xrightarrow{t(\gamma)*_0\alpha} & \bullet & \xrightarrow{t(\gamma)*_0\beta} & \bullet
 \end{array},$$

la flèche verticale du milieu étant $\gamma*_0t(\alpha) = \gamma*_0s(\beta)$. Puisque le ∞ -foncteur $D_1 \otimes \nabla$ correspond à la composition des carrés, la cellule $\gamma \circ (\beta, \alpha)$ est la 2-cellule du composé des deux carrés ci-dessus, ce qui donne la formule qu'on cherchait à établir. $\square$

Dans [7], nous conjecturons que si $\mathbb{C}$ est une ∞ -catégorie de Gray et c est un objet de $\mathbb{C}$, alors il existe une ∞ -catégorie de Gray tranche $\mathbb{C}/_c$ (voir la conjecture C.24). À défaut de prouver cette conjecture, nous allons maintenant prouver qu'il existe une sesquicatégorie tranche $\mathbb{C}/_c$.

B.16. Rappelons qu'une *sesquicatégorie* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$$

rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}} & \text{Cat} \\
 \searrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} & & \swarrow \text{Ob} \\
 & \mathcal{E}ns &
 \end{array}$$

commutatif. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est une sesquicatégorie, on dispose d'objets, aussi appelés 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules. Les objets et les 1-cellules ont des identités. On peut par ailleurs composer les 1-cellules et composer verticalement les 2-cellules. On notera ces deux compositions par la concaténation. On ne peut néanmoins pas composer horizontalement les 2-cellules mais on dispose d'une composition $*$ d'une 1-cellule suivie d'une 2-cellule ou d'une 2-cellule suivie d'une 1-cellule. En notant x, y des objets, f, g des 1-cellules et α, β des 2-cellules de $\mathcal{C}$, les axiomes vérifiés par cette composition $*$ sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 (g * \alpha) * f &= g * (\alpha * f) \\
 1_y * \alpha &= \alpha & \alpha * 1_x &= \alpha \\
 g * (f * \alpha) &= (gf) * \alpha & (\alpha * g) * f &= \alpha * (gf) \\
 g * 1_f &= 1_{gf} & 1_g * f &= 1_{gf} \\
 g * (\beta \alpha) &= (g * \beta)(g * \alpha) & (\beta \alpha) * f &= (\beta * f)(\alpha * f),
 \end{aligned}$$

lorsque ces compositions ont un sens.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux sesquicatégories, un *sesquifoncteur* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée d'un foncteur F de la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$ vers la catégorie sous-jacente à $\mathcal{D}$ et d'une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} & \xrightarrow{F^\circ \times F} & \mathcal{D}^\circ \times \mathcal{D} \\
 \searrow \text{Hom}_{\mathcal{C}} & \xRightarrow{\varphi} & \swarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}} \\
 & \text{Cat} &
 \end{array}$$

au-dessus de $\mathcal{E}ns$ au sens où, pour tous objets x et y de $\mathcal{C}$, l'application

$$\mathrm{Ob}(\varphi_{x,y}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$$

est celle induite par le foncteur F . Explicitement, un sesquifoncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ associe à toute i -cellule x de $\mathcal{C}$, pour $i = 0, 1, 2$, une i -cellule $F(x)$ de $\mathcal{D}$, ceci de manière compatible aux sources et aux buts, de sorte qu'on ait

$$\begin{array}{lll} F(1_x) = 1_{F(x)} & F(gf) = F(g)F(f) & F(\beta * f) = F(\beta) * F(f) \\ F(1_f) = 1_{F(f)} & F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha) & F(g * \alpha) = F(g) * F(\alpha), \end{array}$$

où x désigne un objet, f, g des 1-cellules et α, β des 2-cellules de $\mathcal{C}$, dès que ces compositions ont un sens.

Remarque B.17. Il découle des résultats de cette section qu'une ∞ -catégorie de Gray a une sesquicatégorie sous-jacente et même une ∞ -sesquicatégorie sous-jacente (la notion de ∞ -sesquicatégorie est obtenue en remplaçant $\mathcal{Cat}$ par $\infty\text{-}\mathcal{Cat}$ dans la définition de sesquicatégorie, voir [7, paragraphe C.3]). Cela résulte en fait de considérations purement formelles (voir [7, paragraphe C.9]).

B.18. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray et soit c un objet de $\mathbb{C}$. On va définir une sesquicatégorie $\mathbb{C}/c$. Commençons par définir ses cellules.

— Les objets de $\mathbb{C}/c$ sont les couples (x, f) , où x est un objet de $\mathbb{C}$ et $f : x \rightarrow c$ une 1-cellule, c'est-à-dire les diagrammes

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow f \\ c \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$.

— Les 1-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha \quad \nearrow f' & \\ & c & \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$, où

$$u : x \rightarrow x' \quad \text{et} \quad \alpha : f' * u \Rightarrow f.$$

On notera (u, α) une telle 1-cellule, sous-entendant ainsi f et f' . La source de (u, α) est (x, f) et son but est (x', f') .

— Les 2-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ x & \xrightarrow{\quad} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha \quad \nearrow f' & \\ & c & \end{array}$$

(Le diagramme ci-dessus est simplifié par rapport à l'image originale, qui contenait des flèches supplémentaires u', γ, Γ et des pointsillés. Ici, on se concentre sur la structure principale (u, α) et (f, f') .)

dans $\mathbb{C}$, où

$$\gamma : u \Rightarrow u' \quad \text{et} \quad \Gamma : \alpha' *_1 (f' * \gamma) \Rightarrow \alpha.$$

On notera (γ, Γ) une telle 2-cellule, sous-entendant ainsi, comme dans le cas des 1-cellules, les autres cellules du diagramme. La source de (γ, Γ) est (u, α) et son but est (u', α') .

Définissons maintenant les identités.

— L'identité d'un objet

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow f \\ c \end{array}$$

est la 1-cellule

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{1_x} & x \\ & \searrow f \quad \swarrow 1_f & \nearrow f \\ & c & \end{array} .$$

— L'identité d'une 1-cellule

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha & \nearrow f' \\ & c & \end{array}$$

est la 2-cellule

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha & \nearrow f' \\ & c & \end{array} .$$

Définissons enfin les compositions.

— Le composé de deux 1-cellules composables

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{u} & x' & \xrightarrow{u'} & x'' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha & \downarrow f' & \swarrow \alpha' & \nearrow f'' \\ & c & & & \end{array}$$

est la 1-cellule

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{v} & x'' \\ & \searrow f \quad \swarrow \beta & \nearrow f'' \\ & c & \end{array} ,$$

où

$$v = u' *_0 u \quad \text{et} \quad \beta = \alpha *_1 (\alpha' *_0 u).$$

— Le composé verticale de deux 2-cellules

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha & \nearrow f' \\ & c & \end{array}$$

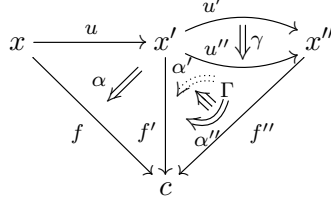
est la 2-cellule

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & x' \\ & \searrow f \quad \swarrow \alpha & \nearrow f' \\ & c & \end{array} ,$$

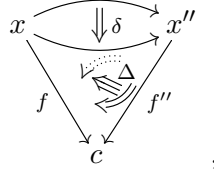
où

$$\delta = \gamma' *_1 \gamma \quad \text{et} \quad \Delta = \Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' *_0 \gamma)).$$

— Le composé horizontal d'une 1-cellule suivie d'une 2-cellule



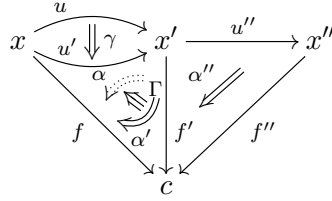
est la 2-cellule



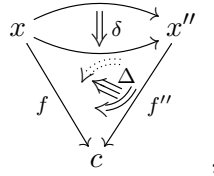
où

$$\delta = \gamma *_0 u \quad \text{et} \quad \Delta = \alpha *_1 (\Gamma *_0 u).$$

— Enfin, le composé horizontal d'une 2-cellule suivie d'une 1-cellule



est la 2-cellule



où

$$\delta = u'' *_0 \gamma \quad \text{et} \quad \Delta = (\Gamma *_1 (\alpha'' *_0 u)) *_2 (\alpha' *_1 (\alpha'' \circ \gamma)).$$

Notons que Δ a les source et but attendus. En effet, en vertu de la proposition B.14, on a

$$\alpha' *_1 (\alpha'' \circ \gamma) : \alpha' *_1 (\alpha'' *_0 u') *_1 (f'' *_0 u'' *_0 \gamma) \Rightarrow \alpha' *_1 (f' *_0 \gamma) *_1 (\alpha'' *_0 u)$$

et

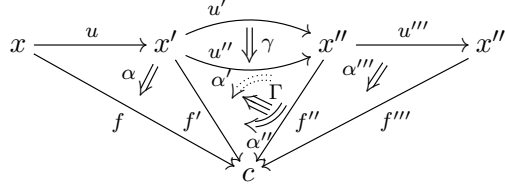
$$\Gamma *_1 (\alpha'' *_0 u) : \alpha' *_1 (f' *_0 \gamma) *_1 (\alpha'' *_0 u) \Rightarrow \alpha *_1 (\alpha'' *_0 u).$$

Théorème B.19. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray et soit c un objet de $\mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C}/_c$ est bien une sesquicatégorie.

Démonstration. Les formules définissant les cellules de $\mathbb{C}/_c$, ainsi que leurs identités et compositions, mis à part la composition horizontale d'une 2-cellule suivie d'une 1-cellule, sont les mêmes que pour les tranches $C/_c$ pour C une ∞ -catégorie stricte (voir [7, propositions 9.6 et 9.15] pour la tranche $_c C$). On vérifie par les mêmes calculs que tous les axiomes des sesquicatégories ne

faisant par intervenir la composition horizontale mentionnée ci-dessus sont vérifiés par $\mathbb{C}/c$. Il nous reste donc à vérifier le premier axiome et les axiomes de la colonne de gauche de la définition de sesquicatégorie donnée au paragraphe B.16.

Commençons par le premier axiome. Soit donc



un diagramme dans $\mathbb{C}$. Il s'agit de vérifier qu'on a

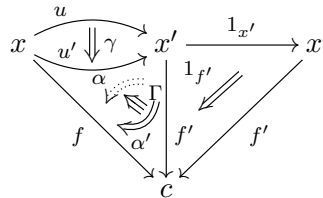
$$((u''', \alpha''') * (\gamma, \Gamma)) * (u, \alpha) = (u''', \alpha''') * ((\gamma, \Gamma) * (u, \alpha)).$$

Ces deux 2-cellules sont des « 3-cônes ». On vérifie facilement, en utilisant les propriétés de sesquicatégorie de $\mathbb{C}$, que ces cônes ont mêmes objets, 1-cellules et 2-cellules. Il reste à vérifier que leurs 3-cellules coïncident. Or, on a

$$\begin{aligned} & \alpha *_1 \left[\left[(\Gamma *_1 (\alpha''' * u')) *_2 (\alpha'' *_1 (\alpha''' \circ \gamma)) \right] *_0 u \right] \\ &= \alpha *_1 \left[((\Gamma * u) *_1 (\alpha''' * u' * u)) *_2 ((\alpha'' * u) *_1 ((\alpha''' \circ \gamma) * u)) \right] \\ &= (\alpha *_1 (\Gamma * u) *_1 (\alpha''' * u' * u)) *_2 (\alpha *_1 (\alpha'' * u) *_1 ((\alpha''' \circ \gamma) * u)) \\ &= (\alpha *_1 (\Gamma * u) *_1 (\alpha''' * u' * u)) *_2 (\alpha *_1 (\alpha'' * u) *_1 (\alpha''' \circ (\gamma * u))), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de l'associativité de l'opération $\circ$ (proposition B.10), ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons maintenant vérifier les quatre axiomes de la colonne de gauche, dans l'ordre. Considérons donc



un diagramme dans $\mathbb{C}$ et montrons qu'on a

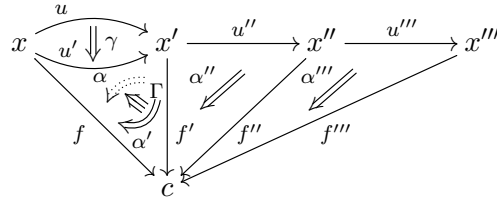
$$1_{(x', f')} * (\gamma, \Gamma) = (\gamma, \Gamma).$$

La seule vérification non triviale est celle de l'égalité des 3-cellules de ces deux 3-cônes mais, en utilisant les compatibilités des contraintes de Gray aux identités (proposition B.11), on a

$$\begin{aligned} & (\Gamma *_1 (1_{f'} * u)) *_2 (\alpha' *_1 (1_{f'} \circ \gamma)) \\ &= (\Gamma *_1 (f' * u)) *_2 (\alpha' *_1 (f' \circ \gamma)) \\ &= (\Gamma *_1 (f' * u)) *_2 (\alpha' *_1 (f' * \gamma)) \\ &= \Gamma *_2 (\alpha' *_1 (f' * \gamma)) \\ &= \Gamma, \end{aligned}$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

Soit maintenant



un diagramme dans $\mathbb{C}$. Montrons qu'on a

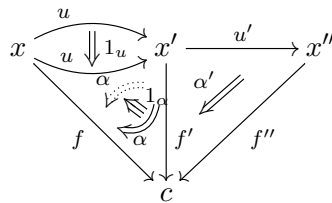
$$(u''', \alpha''') * ((u'', \alpha'') * (\gamma, \Gamma)) = ((u''', \alpha''') (u'', \alpha'')) * (\gamma, \Gamma).$$

Comme précédemment, nous allons uniquement vérifier l'égalité des deux 3-cellules des 3-cônes associés. On a, en utilisant l'associativité de l'opération $\circ$ (proposition B.10) pour la première égalité,

$$\begin{aligned} & \left[\left(\left(\Gamma * _1 (\alpha'' * _0 u) \right) * _2 (\alpha' * _1 (\alpha'' \circ \gamma)) \right) * _1 (\alpha''' * _0 u'' * _0 u) \right] \\ & * _2 \left[\alpha' * _1 (\alpha'' * _0 u') * _1 (\alpha''' \circ (u'' * _0 \gamma)) \right] \\ & = \left[\Gamma * _1 (\alpha'' * _0 u) * _1 (\alpha''' * _0 u'' * _0 u) \right] * _2 \left[\alpha' * _1 (\alpha'' \circ \gamma) * _1 (\alpha''' * _0 u'' * _0 u) \right] \\ & * _2 \left[\alpha' * _1 (\alpha'' * _0 u') * _1 ((\alpha''' * _0 u'') \circ \gamma) \right] \\ & = \left[\Gamma * _1 ((\alpha'' * _1 (\alpha''' * _0 u'')) * _0 u) \right] \\ & * _2 \left[\alpha' * _1 \left[((\alpha'' \circ \gamma) * _1 (\alpha''' * _0 u'' * _0 u)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. * _2 ((\alpha'' * _0 u') * _1 ((\alpha''' * _0 u'') \circ \gamma)) \right] \right] \\ & = \left[\Gamma * _1 ((\alpha'' * _1 (\alpha''' * _0 u'')) * _0 u) \right] * _2 \left[\alpha' * _1 \left[(\alpha'' * _1 (\alpha''' * _0 u'')) \circ \gamma \right] \right], \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la compatibilité des contraintes de Gray à la composition $*_1$ (proposition B.15), ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant



un diagramme dans $\mathbb{C}$ et montrons qu'on a

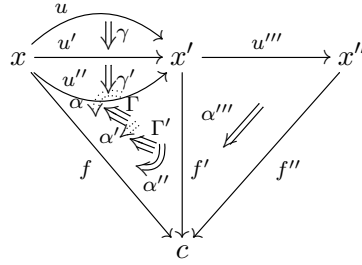
$$(u', \alpha') * 1_{(u, \alpha)} = 1_{(u', \alpha')(u, \alpha)}.$$

Vérifions l'égalité des 3-cellules associées. En utilisant la compatibilité des contraintes de Gray aux identités, on a

$$\begin{aligned} & (1_\alpha * _1 (\alpha' * _0 u)) * _2 (\alpha * _1 (\alpha' \circ 1_u)) \\ & = (1_\alpha * _1 (\alpha' * _0 u)) * _2 (\alpha * _1 1_{\alpha' * _0 u}) \\ & = 1_{\alpha * _1 (\alpha' * _0 u)} * _2 1_{\alpha * _1 (\alpha' * _0 u)} \\ & = 1_{\alpha * _1 (\alpha' * _0 u)}, \end{aligned}$$

ce qu'il s'agissait de vérifier.

Soit enfin



un diagramme dans $\mathbb{C}$. Montrons qu'on a

$$((u''', \alpha''') * (\gamma', \Gamma')) ((u''', \alpha''') * (\gamma, \Gamma)) = (u''', \alpha''') * ((\gamma', \Gamma') (\gamma, \Gamma)).$$

On a

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma *_1 (\alpha''' * u) \right] *_2 \left[\alpha' *_1 (\alpha''' \circ \gamma) \right] \\ & *_2 \left[\left[\left(\Gamma' *_1 (\alpha''' * u') \right) *_2 \left(\alpha'' *_1 (\alpha''' \circ \gamma') \right) \right] *_1 \left[f'' * u''' * \gamma \right] \right] \\ & = \left[\Gamma *_1 (\alpha''' * u) \right] *_2 \left[\alpha' *_1 (\alpha''' \circ \gamma) \right] \\ & \quad *_2 \left[\Gamma' *_1 (\alpha''' * u') *_1 (f'' * u''' * \gamma) \right] \\ & \quad *_2 \left[\alpha'' *_1 (\alpha''' \circ \gamma') *_1 (f'' * u''' * \gamma) \right] \\ & = \left[\Gamma *_1 (\alpha''' * u) \right] *_2 \left[\Gamma' *_1 (f' * \gamma) *_1 (\alpha''' * u) \right] \\ & \quad *_2 \left[\alpha'' *_1 (f' * \gamma') *_1 (\alpha''' \circ \gamma) \right] \\ & \quad *_2 \left[\alpha'' *_1 (\alpha''' \circ \gamma') *_1 (f'' * u''' * \gamma) \right] \\ & \quad \text{(en appliquant la loi d'échange aux termes centraux)} \\ & = \left[\left(\Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' * \gamma)) \right) *_1 (\alpha''' * u) \right] \\ & \quad *_2 \left[\alpha'' *_1 \left[\left((f' * \gamma') *_1 (\alpha''' \circ \gamma) \right) *_2 \left((\alpha''' \circ \gamma') *_1 (f'' * u''' * \gamma) \right) \right] \right] \\ & = \left[\left(\Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' * \gamma)) \right) *_1 (\alpha''' * u) \right] *_2 \left[\alpha'' *_1 (\alpha''' \circ (\gamma' * \gamma)) \right], \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la compatibilité des contraintes de Gray à la composition $*_1$ (proposition B.15), ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

Remarque B.20. On peut vérifier que si C est une ∞ -catégorie et c est un objet de C , alors la sesquicatégorie sous-jacente à la ∞ -catégorie C/c est la sesquicatégorie $\mathbb{C}/c$, où $\mathbb{C}$ est la ∞ -catégorie de Gray associée à C . Cela résulte des formules explicites définissant C/c évoquées au début de la preuve de la proposition précédente et de la description des contraintes de Gray dans le cas strict donnée par la proposition B.12.

B.21. Si $\mathbb{C}$ est une ∞ -catégorie de Gray de sesquicatégorie sous-jacente $\mathcal{C}$ et c est un objet de $\mathbb{C}$, on définit un sesquifoncteur

$$\mathbb{C}/c \rightarrow \mathcal{C}$$

par

$$\begin{aligned}(x, f) &\mapsto x \\ (u, \alpha) &\mapsto u \\ (\gamma, \Gamma) &\mapsto \gamma,\end{aligned}$$

où les cellules de $\mathbb{C}/c$ sont désignées selon les notations du paragraphe B.18. Les formules décrivant la structure de $\mathbb{C}/c$ données dans ce même paragraphe rendent évident le fait qu'on obtient bien ainsi un sesquifoncteur. On appellera ce sesquifoncteur le *sesquifoncteur d'oubli* de $\mathbb{C}/c$ vers $\mathcal{C}$.

B.22. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray. On définit une ∞ -catégorie de Gray ${}^t\mathbb{C}^\circ$ de la manière suivante : les objets de ${}^t\mathbb{C}^\circ$ sont les mêmes que ceux de $\mathbb{C}$ et, si x et y sont deux objets de ${}^t\mathbb{C}^\circ$, on pose $\underline{\text{Hom}}_{{}^t\mathbb{C}^\circ}(x, y) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(x, y)^\circ$. Il résulte immédiatement de la compatibilité du dual total au produit tensoriel (voir la proposition 4.8) qu'on obtient bien ainsi une ∞ -catégorie de Gray. (La notation ${}^t\mathbb{C}^\circ$ provient du fait que cette opération sur les ∞ -catégories de Gray se décompose naturellement en deux opérations, voir [7, paragraphe C.21].) Lorsque $\mathbb{C}$ provient d'une ∞ -catégorie stricte C , la ∞ -catégorie de Gray ${}^t\mathbb{C}^\circ$ provient de la ∞ -catégorie stricte ${}^tC^\circ$ obtenue à partir de C en inversant le sens des i -cellules pour $i \geq 2$. Notons également que si $\mathcal{C}$ est la sesquicatégorie sous-jacente à $\mathbb{C}$, alors la sesquicatégorie sous-jacente à la ∞ -catégorie de Gray ${}^t\mathbb{C}^\circ$ est la sesquicatégorie ${}^t\mathcal{C}^\circ$ obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en inversant le sens des 2-cellules.

B.23. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray. On définit une sesquicatégorie $\mathbb{C}/c^{to}$ en posant

$$\mathbb{C}/c^{to} = {}^t({}^t\mathbb{C}^\circ/c)^\circ.$$

Cette sesquicatégorie admet une description semblable à celle de $\mathbb{C}/c$, l'orientation de certaines cellules étant renversée. Plus précisément, ses cellules se décrivent ainsi :

- Les objets de $\mathbb{C}/c^{to}$ sont les diagrammes

$$\begin{array}{c} y \\ \downarrow g \\ c \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$. On notera (y, g) un tel objet.

- Les 1-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{v} & y' \\ & \searrow g \quad \nearrow g' & \\ & c & \end{array} \quad \beta$$

dans $\mathbb{C}$. On notera (v, β) une telle 1-cellule. La source de (v, β) est (y, g) et son but est (y', g') .

- Les 2-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & v & \\ y & \xrightarrow{v'} & y' \\ & \searrow g \quad \nearrow g' & \\ & c & \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta \\ \beta \\ \beta' \end{array}$$

dans $\mathbb{C}$, où

$$\delta : v \Rightarrow v' \quad \text{et} \quad \Delta : \beta' \Rightarrow (g' *_0 \delta) *_1 \beta.$$

On notera (δ, Δ) une telle 2-cellule. La source de (δ, Δ) est (v, β) et son but est (v', β') .

Notons $\mathcal{C}$ la sesquicatégorie sous-jacente à $\mathbb{C}$. Le sesquifoncteur d'oubli de ${}^t\mathbb{C}^\circ/c$ vers la sesquicatégorie sous-jacente à ${}^t\mathbb{C}^\circ$, qui n'est autre que ${}^t\mathbb{C}^\circ$, induit un sesquifoncteur de ${}^t({}^t\mathbb{C}^\circ/c)^\circ$ vers ${}^t({}^t\mathbb{C}^\circ)^\circ = \mathcal{C}$. On dispose donc d'un sesquifoncteur

$$\mathbb{C}/c \rightarrow \mathcal{C}$$

qu'on appellera *sesquifoncteur d'oubli*.

B.24. Soit $\mathbb{C}$ une ∞ -catégorie de Gray. Considérons la sesquicatégorie produit

$$\mathbb{C}/c \times \mathbb{C}/c^{to}.$$

Si $f : x \rightarrow c$ est une 1-cellule de $\mathbb{C}$, on définit un *sesquifoncteur d'inclusion*

$$f^\iota : \mathbb{C}/c \rightarrow \mathbb{C}/c \times \mathbb{C}/c^{to}$$

par le produit

$$(x, f) \times 1 : D_0 \times \mathbb{C}/c^{to} \rightarrow \mathbb{C}/c \times \mathbb{C}/c^{to},$$

où D_0 désigne la sesquicatégorie terminale et (x, f) le sesquifoncteur correspondant à l'objet (x, f) de $\mathbb{C}/c$. De même, si $g : y \rightarrow c$ est une 1-cellule de $\mathbb{C}$, on définit un *sesquifoncteur d'inclusion*

$$\iota_g : \mathbb{C}/c \rightarrow \mathbb{C}/c \times \mathbb{C}/c^{to}$$

par le produit

$$1 \times (y, g) : \mathbb{C}/c \times D_0 \rightarrow \mathbb{C}/c \times \mathbb{C}/c^{to}.$$

B.2 ∞ -catégories comma : sesquifonctorialités

Dans cette sous-section, on fixe une ∞ -catégorie Z .

B.25. On a défini dans la section 6 un foncteur

$$-\downarrow_Z- : \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z^{to} \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{Cat}.$$

Le but de cette sous-section est d'étendre ce foncteur en un sesquifoncteur

$$-\downarrow_Z- : \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z^{to} \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}},$$

où $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z$ et $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z^{to}$ désignent les sesquicatégories décrites dans la sous-section précédente (et plus précisément aux paragraphes B.18 et B.23) dans le cas $\mathbb{C} = \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}$ (voir l'exemple B.3).

B.26. Explicitons la sesquicatégorie $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z^{to}$. Commençons par décrire ses cellules.

— Les objets sont les diagrammes

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

dans $\infty\text{-Cat}$. On notera (X, f, g, Y) un tel objet.

— Les 1-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array} \quad \begin{array}{c} u \downarrow \\ \alpha \nearrow \\ f' \nearrow \\ \beta \searrow \\ g' \searrow \\ v \downarrow \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, où

$$\alpha : f' *_0 u \Rightarrow f \quad \text{et} \quad \beta : g \Rightarrow g' *_0 v$$

sont donc des transformations oplax. On notera (u, α, β, v) un tel morphisme. La source de (u, α, β, v) est (X, f, g, Y) et son but est (X', f', g', Y') .

— Les 2-cellules sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array} \quad \begin{array}{c} \gamma \Rightarrow u' \\ \alpha \nearrow \Gamma \nearrow \alpha' \\ \beta \searrow \Delta \searrow \beta' \\ \delta \Rightarrow v' \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, où

$$\gamma : u \Rightarrow u' \quad \text{et} \quad \delta : v \Rightarrow v'$$

sont des transformations oplax et

$$\Gamma : \alpha' *_1 (f' *_0 \gamma) \Rightarrow \alpha \quad \Delta : \beta' \Rightarrow (g' *_0 \delta) *_1 \beta$$

sont des 2-transformations oplax. On notera $(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)$ une telle 2-cellule. La source de $(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)$ est (u, α, β, v) et son but est $(u', \alpha', \beta', v')$.

Définissons maintenant les identités.

— L'identité d'un objet

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

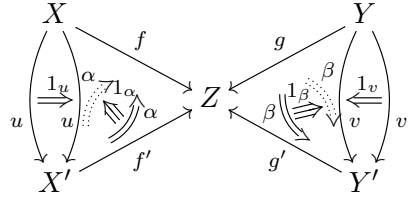
est la 1-cellule

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f & & \nwarrow g & \\ X & & & & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} 1_X \downarrow \\ 1_f \nearrow \\ 1_g \searrow \\ 1_Y \downarrow \end{array}$$

— L'identité d'une 1-cellule

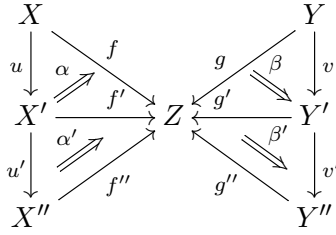
$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \nearrow f' & & \nwarrow g' & \\ X' & & & & Y' \end{array} \quad \begin{array}{c} u \downarrow \\ \alpha \nearrow \\ f' \nearrow \\ \beta \searrow \\ g' \searrow \\ v \downarrow \end{array}$$

est la 2-cellule

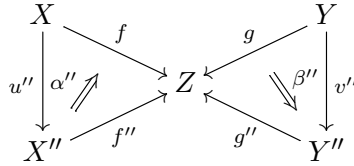


Enfin, définissons les compositions.

— Le composé de deux 1-cellules composables



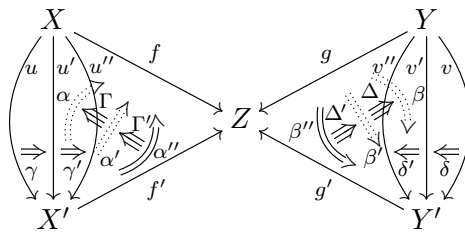
est la 1-cellule



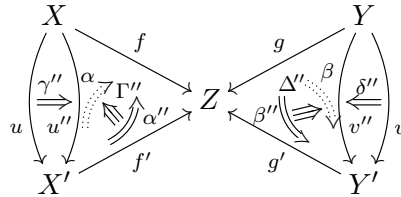
où

$$u'' = u' *_0 u, \quad \alpha'' = \alpha *_1 (\alpha' *_0 u), \quad \beta'' = (\beta' *_0 v) *_1 \beta \quad \text{et} \quad v'' = v' *_0 v.$$

— Le composé vertical de deux 2-cellules



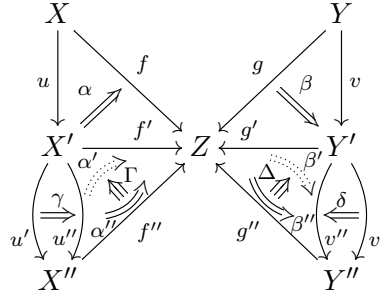
est la 2-cellule



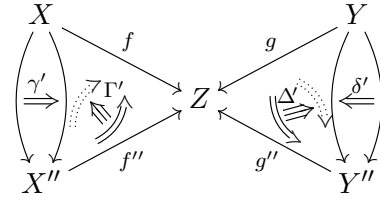
où

$$\gamma'' = \gamma' *_1 \gamma, \quad \Gamma'' = \Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' *_0 \gamma)), \quad \Delta'' = ((g' *_0 \delta') *_1 \Delta) *_2 \Delta' \quad \text{et} \quad \delta'' = \delta' *_1 \delta.$$

— Le composé horizontal d'une 1-cellule suivie d'une 2-cellule



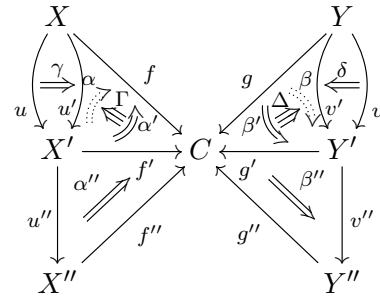
est la 2-cellule



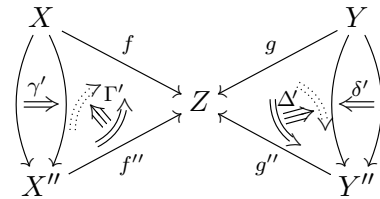
où

$$\gamma' = \gamma *_0 u, \quad \Gamma' = \alpha *_1 (\Gamma *_0 u), \quad \Delta' = (\Delta *_0 v) *_1 \beta \quad \text{et} \quad \delta' = \delta *_0 v.$$

— Enfin, le composé horizontal d'une 2-cellule suivie d'une 1-cellule



est la 2-cellule



où

$$\begin{aligned} \gamma' &= u'' *_0 \gamma, & \Gamma' &= (\Gamma *_1 (\alpha'' *_0 u)) *_2 (\alpha' *_1 (\alpha'' \circ \gamma)), \\ \Delta' &= ((\beta'' \circ \delta) *_1 \beta) *_2 ((\beta'' *_0 v') *_1 \Delta), & \delta' &= v'' *_0 \delta, \end{aligned}$$

le symbole $\circ$ désignant la contrainte de Gray qui associe à deux transformations oplax composables horizontalement une 2-transformation oplax (voir le paragraphe B.13 et la proposition B.14).

B.27. La description donnée au paragraphe précédent de la sesquicatégorie

$$\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z} \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}/Z}^{\text{to}}$$

montre que, comme annoncé, sa catégorie sous-jacente est la catégorie

$$\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z$$

décrite au paragraphe 6.6. En particulier, le sesquifoncteur

$$-\downarrow_Z - : \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}/Z \rightarrow \infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}},$$

qu'on cherche à définir est déjà défini sur les objets et les 1-cellules (voir les paragraphes 6.1 et 6.7).

B.28. Soit

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

un diagramme dans $\infty\text{-}\mathcal{Cat}$ et soit T une ∞ -catégorie. En vertu du paragraphe 6.2, la donnée d'une transformation oplax entre ∞ -foncteurs de T vers $f \downarrow g$, c'est-à-dire d'un ∞ -foncteur $D_1 \otimes T \rightarrow f \downarrow g$, correspond à celle d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & D_1 \otimes T & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \delta \\ X & \xRightarrow{\Upsilon} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

dans $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}$. La transformation oplax Υ correspond à un ∞ -foncteur $D_1 \otimes D_1 \otimes T \rightarrow Z$ qui, à son tour, par adjonction, correspond à un ∞ -foncteur $D_1 \otimes D_1 \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(T, Z)$, ou encore à un « carré oplax » dans la ∞ -catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}_{\text{oplax}}(T, Z)$, c'est-à-dire à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f*\gamma} & \\ \alpha \downarrow & \Lambda & \downarrow \beta \\ & \xrightarrow{g*\delta} & \end{array},$$

où α et β sont des transformations oplax et Λ est une 2-transformation oplax. La donnée d'une transformation oplax entre ∞ -foncteurs de T vers $f \downarrow g$ correspond donc exactement à celle d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} T \\ \left(\begin{array}{c} \gamma \\ \xRightarrow{\quad} \end{array} \right) \\ \downarrow \\ X \end{array} & \xRightarrow{\beta} & \begin{array}{c} T \\ \left(\begin{array}{c} \delta \\ \xRightarrow{\quad} \end{array} \right) \\ \downarrow \\ Y \end{array} \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ Z & & Z \end{array} \quad \xRightarrow{\Lambda} \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} T \\ \left(\begin{array}{c} \delta \\ \xRightarrow{\quad} \end{array} \right) \\ \downarrow \\ Y \end{array} & \xRightarrow{\alpha} & \begin{array}{c} T \\ \left(\begin{array}{c} \gamma \\ \xRightarrow{\quad} \end{array} \right) \\ \downarrow \\ X \end{array} \\ g \downarrow & & f \downarrow \\ Z & & Z \end{array}$$

dans $\infty\text{-}\mathcal{Cat}_{\text{oplax}}$. On notera $(\gamma, \alpha, \Lambda, \beta, \delta)$ la transformation oplax $D_1 \otimes T \rightarrow f \downarrow g$ correspondant à un tel diagramme. La source et le but de cette transformation sont les ∞ -foncteurs $T \rightarrow f \downarrow g$ correspondant respectivement aux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ s(\gamma) \swarrow & & \searrow s(\delta) \\ X & \xRightarrow{\alpha} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & T & \\ t(\gamma) \swarrow & & \searrow t(\delta) \\ X & \xRightarrow{\beta} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}.$$

B.29. Considérons

$$(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta) = \begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Z & \\ & \swarrow f' & \searrow g' \\ X' & & Y' \end{array}$$

(The diagram shows a 2-cell structure with nodes X, Y, Z, X', Y'. Arrows: X to Z (f), Y to Z (g), X' to Z (f'), Y' to Z (g'). 2-cells: $\gamma: X \rightarrow X'$, $\Gamma: f \rightarrow f'$, $\Delta: g \rightarrow g'$, $\delta: Y \rightarrow Y'$. Natural transformations: $\alpha: \gamma \rightarrow \Gamma$, $\beta: \Delta \rightarrow \delta$, $\alpha': \Gamma \rightarrow f'$, $\beta': \Delta \rightarrow g'$. Dotted lines indicate compositions.)

une 2-cellule de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. On lui associe une transformation oplax

$$\begin{array}{ccc} & (u, \alpha) \downarrow (\beta, v) & \\ f \downarrow g & \xrightarrow{(\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta)} & f' \downarrow g' \\ & (u', \alpha') \downarrow (\beta', v') & \end{array} \quad ,$$

qu'on notera parfois également $(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_*$, de la manière suivante. Soit T une ∞ -catégorie et soit $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur (voir le paragraphe 6.2). En composant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Z & \\ & \swarrow f' & \searrow g' \\ X' & & Y' \end{array}$$

(The diagram shows the composition of the 2-cell from the previous block with the ∞ -functor (x, λ, y) . The 2-cells $\gamma, \Gamma, \Delta, \delta$ are now part of the structure between X, Y, Z, X', Y' .)

on obtient une 2-transformation oplax

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Z & \\ & \swarrow f' & \searrow g' \\ X' & & Y' \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Z & \\ & \swarrow f' & \searrow g' \\ X' & & Y' \end{array}$$

(The diagram shows the 2-transformation oplax, where the 2-cells $\gamma, \Gamma, \Delta, \delta$ are now part of the structure between X, Y, Z, X', Y' .)

donnée par la formule $(\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x)$. Ainsi, en vertu du paragraphe précédent,

$$(\gamma *_0 x, (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x), (\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x), (\beta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha' *_0 x), \delta *_0 y)$$

définit une transformation oplax qui, par adjonction, peut se représenter comme un ∞ -foncteur $T \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, f' \downarrow g')$. Par ailleurs, en vertu de ce même paragraphe, la source et le but de cette transformation oplax sont les ∞ -foncteurs $T \rightarrow f' \downarrow g'$

$$(u *_0 x, (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x), v *_0 y) \quad \text{et} \quad (u' *_0 x, (\beta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha' *_0 x), v' *_0 y),$$

selon la notation du paragraphe 6.2. Il résulte de la functorialité de la composition horizontale par une 1-cellule que l'application

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T, f \downarrow g) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(T, \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, f' \downarrow g'))$$

que l'on vient de décrire est naturelle en T et, en vertu du lemme de Yoneda, on a donc bien défini une transformation oplax $(\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta)$ entre ∞ -foncteurs de $f \downarrow g$ vers $f' \downarrow g'$. Par ailleurs, les formules donnant la source et le but de la transformation oplax $T \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, f' \downarrow g')$ montrent que les source et but de la transformation oplax $(\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta)$ sont bien respectivement $(u, \alpha) \downarrow (\beta, v)$ et $(u', \alpha') \downarrow (\beta', v')$ (voir le paragraphe 6.7).

Théorème B.30. *Soit Z une ∞ -catégorie. Les applications*

$$\begin{aligned} (f, g) &\mapsto f \downarrow g \\ (u, \alpha, \beta, v) &\mapsto (u, \alpha) \downarrow (\beta, v) \\ (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta) &\mapsto (\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta) \end{aligned}$$

définissent un sesquifoncteur

$$-\downarrow_Z - : \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \xrightarrow{\text{to}} \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}.$$

Démonstration. On a déjà montré la 1-fonctorialité de la construction comma (proposition 6.8) et il s'agit de montrer la compatibilité aux opérations mettant en jeu des 2-cellules. Fixons

$$(X, f, g, Y) = X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

un objet de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$, T une ∞ -catégorie et $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur, c'est-à-dire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xRightarrow{\lambda} & Y \\ f \searrow & & \swarrow g \\ & Z & \end{array}$$

dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$. On va vérifier la sesquifonctorialité de $-\downarrow_Z -$ en utilisant le lemme de Yoneda, c'est-à-dire en précomposant les égalités que l'on veut montrer par (x, λ, y) . Dans cette démonstration, on considérera toute transformation oplax entre ∞ -foncteurs d'une ∞ -catégorie A vers une ∞ -catégorie B comme un ∞ -foncteur de A vers $\underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, B)$.

Considérons

$$(u, \alpha, \beta, v) = \begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow f & & \swarrow g & \\ & & Z & & \\ & \swarrow f' & & \searrow g' & \\ X' & & & & Y' \\ u \downarrow & \nearrow \alpha & & \nwarrow \beta & v \\ & & & & \end{array}$$

une 1-cellule de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Vérifions la compatibilité de $-\downarrow_Z -$ à l'identité de (f, α, β, g) . Il suffit donc de vérifier l'égalité

$$(1_{(f, \alpha, \beta, g)})_*(x, \lambda, y) = 1_{(f, \alpha, \beta, g)}(x, \lambda, y),$$

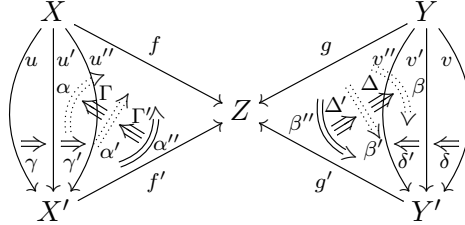
où on considère les transformations oplax $(1_{(f, \alpha, \beta, g)})_*$ et $1_{(f, \alpha, \beta, g)}$ comme des ∞ -foncteurs de $f \downarrow g$ vers $\underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, f \downarrow g)$, comme mentionné précédemment. En vertu du paragraphe B.29, il s'agit donc de vérifier l'égalité entre deux 5-uplets. Toutes les composantes de ces 5-uplets à l'exception de la troisième étant déterminées par la source et le but de ces transformations oplax, par

compatibilité de $-\downarrow_Z-$ aux sources et aux buts, il suffit de vérifier l'égalité des troisièmes composantes. Or ces composantes sont respectivement

$$(1_\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (1_\alpha *_0 x) \quad \text{et} \quad 1_{(\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x)}$$

et sont donc bien égales.

Soient maintenant



deux 2-cellules composables verticalement de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$ to $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Vérifions la compatibilité de $-\downarrow_Z-$ à leur composition. Il s'agit de vérifier l'égalité

$$((\gamma', \Gamma', \Delta', \delta') * (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta))_*(x, \lambda, y) = ((\gamma', \Gamma', \Delta', \delta')(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta))_*(x, \lambda, y).$$

Pour les mêmes raisons que dans la vérification précédente (et le fait qu'on a déjà vérifié la 1-fonctorialité), il suffit de vérifier l'égalité des troisièmes composantes des 5-uplets décrivant les deux membres. Or, la troisième composante du membre de gauche est la 2-transformation oplax composée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{f' *_0 \gamma *_0 x} & \xrightarrow{f' *_0 \gamma' *_0 x} & \\ \parallel \Lambda & \parallel \Lambda' & \parallel \\ \xrightarrow{g' *_0 \delta *_0 y} & \xrightarrow{g' *_0 \delta' *_0 y} & \end{array},$$

où les flèches verticales, qui ne joueront aucun rôle dans ce calcul, sont données par les formules du paragraphe B.29 et où

$$\Lambda = (\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x) \quad \text{et} \quad \Lambda' = (\Delta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma' *_0 x),$$

c'est-à-dire la 2-transformation oplax

$$[(g' *_0 \delta' *_0 y) *_1 (\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x)] *_2 [(\Delta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma' *_0 x) *_1 (f' *_0 \gamma *_0 x)].$$

Par ailleurs, la troisième composante du membre de droite est

$$(\Delta'' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma'' *_0 x),$$

où

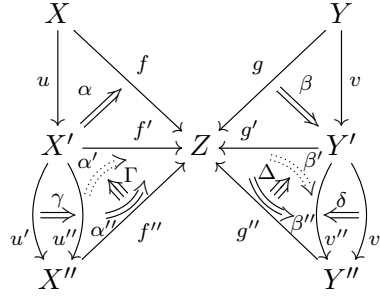
$$\Gamma'' = \Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' *_0 \gamma)) \quad \text{et} \quad \Delta'' = ((g' *_0 \delta') *_1 \Delta) *_2 \Delta',$$

c'est-à-dire

$$[(((g' *_0 \delta') *_1 \Delta) *_2 \Delta') *_0 y] *_1 \lambda *_1 [(\Gamma *_2 (\Gamma' *_1 (f' *_0 \gamma))) *_0 x].$$

Or, la fonctorialité de la composition par une 1-cellule dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ et la loi de l'échange (dans $\underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(T, f' \downarrow g')$) entraînent que ces deux expressions sont égales, ce qui achève de montrer la compatibilité de $-\downarrow_Z-$ à la composition verticale des 2-cellules.

Considérons maintenant



une 1-cellule suivie d'une 2-cellule composables dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Montrons la compatibilité de $-\downarrow_Z-$ à la composition de ces cellules. Il s'agit de montrer, comme dans les vérifications précédentes, l'égalité entre les troisièmes composantes des 5-uplets

$$((\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_* * (u, \alpha, \beta, v)_*)(x, \lambda, y) \quad \text{et} \quad ((\gamma, \Gamma, \Delta, \delta) * (u, \alpha, \beta, v))_*(x, \lambda, y).$$

Or

$$\begin{aligned} & ((\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_* * (u, \alpha, \beta, v)_*)(x, \lambda, y) \\ &= (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_*(u, \alpha, \beta, v)_*(x, \lambda, y) \\ &= (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_*(u *_0 x, (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x), v *_0 y) \end{aligned}$$

et la troisième composante de ce 5-uplet est donc

$$(\Delta *_0 v *_0 y) *_1 (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x) *_1 (\Gamma *_0 u *_0 x).$$

D'autre part, la troisième composante de $((\gamma, \Gamma, \Delta, \delta) * (u, \alpha, \beta, v))_*(x, \lambda, y)$ est

$$(\Delta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma' *_0 x)$$

où

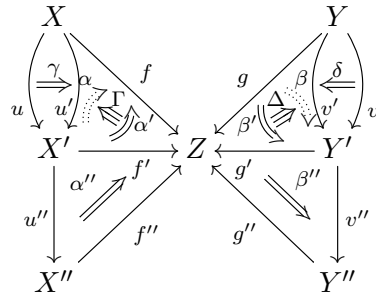
$$\Gamma' = \alpha *_1 (\Gamma *_0 u) \quad \text{et} \quad \Delta' = (\Delta *_0 v) *_1 \beta,$$

c'est-à-dire

$$(((\Delta *_0 v) *_1 \beta) *_0 y) *_1 \lambda *_1 ((\alpha *_1 (\Gamma *_0 u)) *_0 x).$$

Or ces deux expressions sont bien égales en vertu de la fonctorialité de la composition par une 1-cellule dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$.

Enfin, soient



une 2-cellule suivie d'une 1-cellule composables dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Vérifions la compatibilité de $-\downarrow_Z-$ à la composition de ces cellules. Comme précédemment, il s'agit de montrer l'égalité entre les troisièmes composantes des 5-uplets

$$((u'', \alpha'', \beta'', v'')_* * (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_*)(x, \lambda, y) \quad \text{et} \quad ((u'', \alpha'', \beta'', v'') * (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta))_*(x, \lambda, y).$$

Déterminons la troisième composante du 5-uplet du membre de gauche. Par définition, ce 5-uplet correspond au composé du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_1 \otimes T & & \\
 & \swarrow \gamma *_0 x & & \searrow \delta *_0 y & \\
 X' & & \xrightarrow{\Lambda} & & Y' \\
 & \searrow f' & & \swarrow g' & \\
 & & Z & & \\
 & \swarrow f'' & & \searrow g'' & \\
 X'' & & & & Y'' \\
 & \swarrow u'' & & \searrow v'' & \\
 & & & &
 \end{array} ,$$

où

$$\Lambda = (\gamma, \Gamma, \Delta, \delta)_*(x, \lambda, y).$$

On vérifie que si

$$D_1 \otimes A \xrightarrow{\varphi} B \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \psi \downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} C$$

est un diagramme dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$, alors le composé

$$D_1 \otimes A \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \\ \curvearrowleft \end{array} C$$

correspond, par adjonction, au carré commutatif à transformation oplax près donné par le ∞ -foncteur

$$D_1 \otimes D_1 \xrightarrow{\psi \otimes \varphi} \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(B, C) \otimes \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, B) \xrightarrow{\circ_{C, B, A}} \underline{\text{Hom}}_{\text{oplax}}(A, C)$$

qui est décrit explicitement dans la proposition B.14 et dont la 2-cellule correspond à la contrainte de Gray $\psi \circ \varphi$. Ainsi, le composé qu'on cherche à déterminer correspond au composé

$$\begin{array}{ccc}
 f'' *_0 u'' *_0 \gamma *_0 x & \xrightarrow{\quad} & \\
 \downarrow \alpha'' *_0 u *_0 x & \begin{array}{c} \swarrow \alpha'' \circ (\gamma *_0 x) \\ \searrow \end{array} & \downarrow \alpha'' *_0 u' *_0 x \\
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 \downarrow (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x) & \begin{array}{c} \swarrow \Lambda' \\ \searrow \end{array} & \downarrow (\beta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha' *_0 x) \\
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 \downarrow \beta'' *_0 v *_0 y & \begin{array}{c} \swarrow \beta'' \circ (\delta *_0 y) \\ \searrow \end{array} & \downarrow \beta'' *_0 v' *_0 y \\
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 g'' *_0 v'' *_0 \delta *_0 y & &
 \end{array} ,$$

où les deux flèches horizontales non décorées sont, de haut en bas,

$$f' *_0 \gamma *_0 x \quad \text{et} \quad g' *_0 \delta *_0 y,$$

et où

$$\Lambda' = (\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x).$$

Ainsi, la troisième composante recherchée est la 2-transformation oplax

$$\begin{aligned} & [(\beta'' \circ (\delta *_0 y)) *_1 (\beta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha *_0 x) *_1 (\alpha'' *_0 u *_0 x)] \\ & *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\Delta *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma *_0 x) *_1 (\alpha'' *_0 u *_0 x)] \\ & *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\beta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\alpha' *_0 x) *_1 (\alpha'' \circ (\gamma *_0 x))]. \end{aligned}$$

En vertu de la loi de l'échange pour les compositions $*_1$ et $*_2$, cette 2-transformation oplax est égale à

$$\Delta'' *_1 \lambda *_1 \Gamma''$$

où Δ'' est

$$[(\beta'' \circ (\delta *_0 y)) *_1 (\beta *_0 y)] *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\Delta *_0 y)] *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\beta' *_0 y)]$$

et Γ'' est

$$[(\alpha *_0 x) *_1 (\alpha'' *_0 u *_0 x)] *_2 [(\Gamma *_0 x) *_1 (\alpha'' *_0 u *_0 x)] *_2 [(\alpha' *_0 x) *_1 (\alpha'' \circ (\gamma *_0 x))].$$

Or, il résulte du fait que $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$ est une ∞ -catégorie de Gray (et plus précisément des propositions B.10 et B.8) qu'on a

$$\begin{aligned} \Delta'' &= [(\beta'' \circ (\delta *_0 y)) *_1 (\beta *_0 y)] *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\Delta *_0 y)] \\ &= [((\beta'' \circ \delta) *_0 y) *_1 (\beta *_0 y)] *_2 [(\beta'' *_0 v' *_0 y) *_1 (\Delta *_0 y)] \\ &= [((\beta'' \circ \delta) *_1 \beta) *_2 ((\beta'' *_0 v') *_1 \Delta)] *_0 y \end{aligned}$$

et, de même,

$$\Gamma'' = [(\Gamma *_1 (\alpha'' *_0 u)) *_2 (\alpha' *_1 (\alpha'' \circ \gamma))] *_0 x.$$

Ainsi, la troisième composante du membre de gauche de l'égalité qu'on cherche à établir est égale à

$$(\Delta' *_0 y) *_1 \lambda *_1 (\Gamma' *_0 x),$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma' &= (\Gamma *_1 (\alpha'' *_0 u)) *_2 (\alpha' *_1 (\alpha'' \circ \gamma)), \\ \Delta' &= ((\beta'' \circ \delta) *_1 \beta) *_2 ((\beta'' *_0 v') *_1 \Delta). \end{aligned}$$

Or, c'est précisément la définition de la troisième composante du membre de droite. On obtient donc l'égalité recherchée, ce qui achève la démonstration. $\square$

B.31. Fixons $f : X \rightarrow Z$ un ∞ -foncteur. En vertu du paragraphe B.24, on dispose d'un sesqui-foncteur d'inclusion

$$f^\iota : (\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}})^{\text{to}}/Z \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}^{\text{to}}/Z$$

et on notera

$$f \downarrow - : (\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}})^{\text{to}}/Z \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$$

le sesquifoncteur composé

$$(\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}})^{\text{to}}/Z \xrightarrow{f^\iota} \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}^{\text{to}}/Z \xrightarrow{-\downarrow_Z-} \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}.$$

De même, si on fixe un ∞ -foncteur $g : Y \rightarrow Z$, on dispose d'un sesquifoncteur d'inclusion

$$\iota_g : (\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}})/Z \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \xrightarrow{\text{to}}$$

et on notera

$$-\downarrow g : (\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}})/Z \rightarrow \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}$$

le sesquifoncteur obtenu par composition avec le sesquifoncteur $-\downarrow_Z -$.

Corollaire B.32. *Soient*

$$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$$

deux ∞ -foncteurs.

- (a) *Si $i : X' \rightarrow X$ est un rétracte par transformation oplax à gauche fort, alors il en est de même de*

$$(i, 1_{fi}) \downarrow g : (fi) \downarrow g \rightarrow f \downarrow g.$$

- (b) *Si $j : Y' \rightarrow Y$ est un rétracte par transformation oplax à droite fort, alors il en est de même de*

$$f \downarrow (1_{gj}, j) : f \downarrow (gj) \rightarrow f \downarrow g.$$

Démonstration. Démontrons la première assertion, la seconde se démontrant de manière analogue. Soit (r, α) une structure de rétracte par transformation oplax à gauche fort sur i . Rappelons que cela signifie que $r : X \rightarrow X'$ est un ∞ -foncteur vérifiant $ri = 1_{X'}$ et que $\alpha : ir \Rightarrow 1_X$ est une transformation oplax vérifiant $\alpha * i = 1_i$. Par définition, $(i, 1_{fi}) \downarrow g$ est l'image par le sesquifoncteur $-\downarrow g$ du triangle commutatif

$$(i, 1_{fi}) = \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow f_i & \swarrow f \\ & Z & \end{array}.$$

Considérons le triangle

$$(r, f * \alpha) = \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r} & X' \\ & \searrow f & \swarrow f_i \\ & Z & \end{array}.$$

Le composé

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & X' \\ & \searrow f_i & \downarrow f & \swarrow f_i & \\ & & Z & & \end{array}$$

est égal à

$$(r, f * \alpha)(i, 1_{fi}) = (ri, f * \alpha * i) = (ri, f * 1_i) = (1_{X'}, 1_{fi}) = 1_{(X', fi)}.$$

Ainsi, par functorialité de $-\downarrow g$, le ∞ -foncteur $(r, f * \alpha) \downarrow g$ est une rétraction de $(i, 1_{fi}) \downarrow g$. Par ailleurs, le composé

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{r} & X' & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow f & \downarrow f_i & \swarrow f & \\ & & Z & & \end{array}$$

est égal à

$$(i, 1_i)(r, f * \alpha) = (ir, f * \alpha)$$

et le cône commutatif

$$(\alpha, 1_{f*\alpha}) = \begin{array}{ccc} & X & \\ \begin{array}{c} \text{ir} \\ \alpha \Downarrow \\ f * \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & X \\ f \swarrow & \text{cône} & \searrow f \\ & Z & \end{array}$$

définit une 2-cellule de ce composé vers $1_{(X,f)}$ dans $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Ainsi, par sesquifonctorialité de $-\downarrow g$, on dispose d'une transformation oplax

$$(\alpha, 1_{f*\alpha}) \downarrow g : ((i, 1_{fi}) \downarrow g)((r, f * \alpha) \downarrow g) \Rightarrow 1_{(X,f)} \downarrow g.$$

Enfin, le composé

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow f i & \downarrow f \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & X & \\ \begin{array}{c} \text{ir} \\ \alpha \Downarrow \\ f * \alpha \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & X \\ f \swarrow & \text{cône} & \searrow f \\ & Z & \end{array}$$

étant égal à

$$(\alpha, 1_{f*\alpha}) * (i, 1_{fi}) = (\alpha * i, 1_{f*\alpha*i}) = (1_i, 1_{1_{fi}}) = 1_{(i, 1_{fi})},$$

on a, par sesquifonctorialité de $-\downarrow g$,

$$((\alpha, 1_{f*\alpha}) \downarrow g) * ((i, 1_{fi}) \downarrow g) = 1_{(i, 1_{fi})} \downarrow g,$$

ce qui achève de montrer que $((r, \alpha) \downarrow g, (\alpha, 1_{f*\alpha}) \downarrow g)$ est une structure de rétracte par transformation oplax à gauche fort sur $(i, 1_{fi}) \downarrow g$. $\square$

Proposition B.33. *Soit*

$$(\gamma, \Gamma, \Delta, \delta) = \begin{array}{ccc} X & & Y \\ \begin{array}{c} \gamma \\ \Downarrow \\ u' \end{array} & \begin{array}{c} f \\ \searrow \\ f' \end{array} & \begin{array}{c} g \\ \searrow \\ g' \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \Downarrow \\ \alpha' \end{array} & Z & \begin{array}{c} \beta \\ \Downarrow \\ \beta' \end{array} \\ X' & & Y' \end{array}$$

une 2-cellule de $\infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z \times \infty\text{-Cat}_{\text{oplax}}/Z$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & (u, \alpha) \downarrow (\beta, v) & \\ f \downarrow g & \begin{array}{c} (\gamma, \Gamma) \Downarrow (\Delta, \delta) \\ \downarrow \end{array} & f' \downarrow g' \\ p \downarrow & (u', \alpha') \downarrow (\beta', v') & p \downarrow \\ X \times Y & \begin{array}{c} u \times v \\ \gamma \times \delta \Downarrow \\ u' \times v' \end{array} & X' \times Y' \end{array}$$

est commutatif au sens où on a l'égalité

$$p * ((\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta)) = (\gamma \times \delta) * p.$$

Démonstration. Démontrons l'égalité par le lemme de Yoneda. Soient donc T une ∞ -catégorie et $(x, \lambda, y) : T \rightarrow f \downarrow g$ un ∞ -foncteur. En vertu des paragraphes B.28 et B.29, la transformation oplax $(\gamma, \Gamma) \downarrow (\Delta, \delta)$ associe à (x, λ, y) le ∞ -foncteur $(\gamma *_0 x, \Upsilon, \delta *_0 y) : D_1 \otimes T \rightarrow f' \downarrow g'$, pour Υ une certaine transformation oplax. En postcomposant par la projection $p : f' \downarrow g' \rightarrow X' \times Y'$, on obtient donc le ∞ -foncteur $(\gamma *_0 x, \delta *_0 y) : D_1 \otimes T \rightarrow X \times Y$ qui est bien le ∞ -foncteur associé à (x, λ, y) par la transformation oplax $(\gamma \times \delta) * p$, d'où le résultat. $\square$

Appendice C : Comparaison avec la preuve simpliciale

C.1. Dans [6], nous donnons une preuve alternative, de nature simpliciale, de notre théorème A ∞ -catégorique. Le point central des deux démonstrations est le même : il s'agit de montrer que si $v : A \rightarrow C$ est un ∞ -foncteur et c est un m -simplexe de $N(C)$, alors le morphisme simplicial $r : c \backslash N(A) \rightarrow c_m \backslash N(A)$ du paragraphe 2.1 est une équivalence faible, c'est-à-dire, dans la terminologie du présent texte, que l'objet cosimplicial $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ donné par les orientaux permet un théorème A. Pour ce faire, dans [6], nous définissons par des formules explicites une section $s : c_m \backslash N(A) \rightarrow c \backslash N(A)$ de r (au paragraphe 6.2) et une homotopie simpliciale h de sr vers $1_{c \backslash N(A)}$ (au paragraphe 6.6).

Le but de cet appendice est de montrer que le rétracte par déformation simplicial s , la rétraction r et l'homotopie simpliciale h sont les nerfs respectifs du rétracte par transformation oplax de la proposition 5.17 du présent texte, et de la rétraction et de la transformation oplax produite par cette même proposition.

On a déjà observé, dans la preuve de la proposition 2.12, que le morphisme r est bien le nerf du ∞ -foncteur $m^* : c \backslash A \rightarrow c_m \backslash A$ de la proposition 5.17. Rappelons que par définition ce ∞ -foncteur est égal à $m^* \times_C A$, où cette fois $m^* : c \backslash C \rightarrow c_m \backslash C$ désigne le ∞ -foncteur associé en vertu du paragraphe 2.5 au triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_0 & \xrightarrow{m} & \mathcal{O}_m \\ & \searrow c_m & \swarrow c \\ & C & \end{array} .$$

Il nous reste donc à traiter les cas de s et h .

Remarque C.2. Nous avons choisi de rendre cet appendice, dont le but n'est pas d'établir un résultat mais de justifier les formules *ad hoc* de [6, section 6], raisonnablement concise. C'est pourquoi on ne rappellera pas les définitions de s et h (le lecteur devra donc parfois se référer à [6, section 6]) et on laissera plus de vérifications au lecteur que dans le reste du texte.

C.3. La section du ∞ -foncteur $m^* \times_C A : c \backslash A \rightarrow c_m \backslash A$ produite par la proposition 5.17 est le ∞ -foncteur $(r', h', c)^* \times_C A : c_m \backslash A \rightarrow c \backslash A$, où $(r', h', c)^* : c_m \backslash C \rightarrow c \backslash C$ est le ∞ -foncteur associé par le paragraphe 4.31 au triangle

$$\begin{array}{ccc} c(\Delta_m) & \xrightarrow{r'} & c(\Delta_0) \\ & \searrow h' & \swarrow m \\ & c(\Delta_m) & \end{array} ,$$

où r' et h' sont le morphisme r et l'antihomotopie h de la preuve de la proposition 5.16 (qu'on a décorés d'un « ' » pour ne pas les confondre avec les morphismes simpliciaux en jeu dans

cette appendice). Rappelons que cette antihomotopie h' est définie sur la base de $\mathbf{c}(\Delta_m)$ (voir le paragraphe 5.15) par

$$h'(i_0, \dots, i_p) = (i_0, \dots, i_p, m),$$

en convenant que cette expression est nulle lorsque $i_p = m$.

Nous allons montrer qu'on a $N((r', h', c)^* \times_C A) = s$. Pour cela, nous avons besoin de compléments sur la construction du paragraphe 4.31.

C.4. Soit

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & K' \\ & \searrow g \quad \nearrow k & \\ & L & \end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ \\ g' \end{array}$$

un diagramme de complexes de Steiner forts, avec g' une inclusion rigide ordonnée et k une antihomotopie de g vers $g'f$, et soit C une ∞ -catégorie munie d'un ∞ -foncteur $b : \nu(L) \rightarrow C$. Posons $c = b\nu(g)$ et $c' = b\nu(g')$ et considérons le ∞ -foncteur

$$(f, k, b)^* : c' \backslash C \rightarrow c \backslash C$$

du paragraphe 4.31. Soit T un complexe de Steiner fort. D'après [7, remarque 11.2.3], on peut décrire l'application

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \backslash C) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c \backslash C)$$

induite par $(f, k, b)^*$ de la manière suivante. On a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \backslash C) &\simeq \mathrm{Hom}_{\nu(L) \backslash \infty\text{-Cat}}((\nu(L \amalg_{K'} (K' \star T)), \nu(j_1)), (C, b)) \\ &\subset \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(L \amalg_{K'} (K' \star T)), C), \\ \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c \backslash C) &\simeq \mathrm{Hom}_{\nu(K) \backslash \infty\text{-Cat}}((\nu(K \star T), \nu(\iota_1)), (C, c)) \\ &\subset \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(K \star T), C), \end{aligned}$$

où j_1 désigne la première inclusion canonique, et l'application

$$\mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \backslash C) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c \backslash C)$$

est induite par le morphisme

$$\psi : K \star T \rightarrow L \amalg_{K'} (K' \star T)$$

défini par

$$\psi(x \star y) = \begin{cases} g(x) & \text{si } y = \emptyset, \\ f(x) \star y + e(y)k(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on convient que $f(\emptyset) = \emptyset$, $k(\emptyset) = 0$ et $e(y) = 0$ si y n'est pas de degré 0.

Notons que lorsque $T = \mathbf{c}(\Delta_n)$, de sorte qu'on a $\nu(T) = \mathcal{O}_n$, l'application que l'on vient de décrire n'est autre que

$$N((f, k, b)^*)_n : N(c' \backslash C)_n \rightarrow N(c \backslash C)_n.$$

C.5. Explicitons le morphisme ψ du paragraphe précédent dans le cas qui nous intéresse, à savoir celui du triangle

$$\begin{array}{ccc} c(\Delta_m) & \xrightarrow{r'} & c(\Delta_0) \\ & \searrow h' & \nearrow m \\ & c(\Delta_m) & \end{array}$$

du paragraphe C.3 et de $T = c(\Delta_n)$. Le morphisme

$$\psi : c(\Delta_m) \star c(\Delta_n) \rightarrow c(\Delta_m) \amalg_{c(\Delta_0)} (c(\Delta_0) \star c(\Delta_n))$$

est donné sur la base de $c(\Delta_m) \star c(\Delta_n)$ (voir le paragraphe 5.15 et la proposition 4.22) par

$$\psi((i_0, \dots, i_p) \star (j_0, \dots, j_q)) = \begin{cases} (i_0, \dots, i_p) & \text{si } q = -1, \\ \emptyset \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } p = -1, \\ (m) \star (j_0) + (i_0, m) & \text{si } p = 0 \text{ et } q = 0, \\ (m) \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } p = 0 \text{ et } q > 0, \\ (i_0, \dots, i_p, m) & \text{si } p > 0 \text{ et } q = 0, \\ 0 & \text{si } p > 0 \text{ et } q > 0, \end{cases}$$

où, d'une part, on a convenu que $(i_0, \dots, i_p)$ et $(j_0, \dots, j_q)$ sont égaux à $\emptyset$ pour $p = -1$ et $q = -1$ respectivement et, d'autre part, on a noté (m) la base de $c(\Delta_0)$ de sorte qu'on puisse considérer le morphisme $m : c(\Delta_0) \rightarrow c(\Delta_n)$ comme une inclusion.

Ainsi, pour $n \geq 0$, l'application

$$N((r', h', c)^*)_n : \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c_m \setminus C) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c \setminus C)$$

est induite par le morphisme ψ décrit ci-dessus. Or, ce morphisme ψ coïncide avec le morphisme f_n défini au paragraphe 6.2 de [6] pour construire le morphisme simplicial s . On en déduit que $N((r', h', c)^*) = s$ dans le cas où $A = C$ et $v = 1_C$ et donc que $N((r', h', c)^* \times_C A) = s$ dans le cas général puisque le nerf commute aux produits fibrés et que s est défini comme un produit fibré.

C.6. La transformation oplax de $((r', h', c)^* m^*) \times_C A$ vers $1_{c \setminus A}$ produite par la proposition 5.17 est le changement de base le long de $v : A \rightarrow C$ de la transformation oplax

$$(h', 1_{h'}, c)^* : (r', h', c)^* m^* \rightarrow 1_{c \setminus C}$$

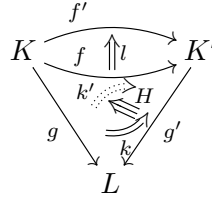
associée par le paragraphe 4.36 au cône

$$\begin{array}{ccc} c(\Delta_m) & \xrightarrow{mr'} & c(\Delta_m) \\ & \uparrow h' & \\ & c(\Delta_m) & \end{array},$$

où r' et h' sont le morphisme et l'antihomotopie du paragraphe C.3.

Nous allons montrer qu'on a $N((h', 1_{h'}, c)^* \times_C A) = h$. Pour cela, nous avons besoin de compléments sur la construction du paragraphe 4.36.

C.7. Soit



un diagramme de complexes de Steiner forts, avec g' une inclusion rigide ordonnée, k , k' et l des antihomotopies de g vers $g'f$, de g vers $g'f'$ et de f vers f' respectivement et H une 2-antihomotopie de $g'l+k$ vers k' , et soit C une ∞ -catégorie munie d'un ∞ -foncteur $b : \nu(L) \rightarrow C$. Posons $c = b\nu(g)$ et $c' = b\nu(g')$ et considérons la transformation oplax

$$(l, H, b)^* : (f', k', b)^* \rightarrow (f, k, b)^*$$

du paragraphe 4.36. Par adjonction, cette transformation correspond à un ∞ -foncteur

$$c' \setminus C \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, c \setminus C).$$

Soit T un complexe de Steiner fort. D'après [7, remarque 11.4.3], on peut décrire l'application induite

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \setminus C) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, c \setminus C))$$

de la manière suivante. On a des bijections naturelles

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \setminus C) \simeq \text{Hom}_{\nu(L) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(L \amalg_{K'} (K' \star T)), \nu(j_1)), (C, b)),$$

où j_1 désigne la première inclusion canonique, et

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, c \setminus C)) \\ & \simeq \text{Hom}_{\nu(K) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(K \star (c(\Delta_1) \otimes T)), \nu(\iota_1)), (C, c)), \end{aligned}$$

et l'application

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), c' \setminus C) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\nu(T), \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, c \setminus C))$$

est induite par le morphisme

$$\chi : K \star (c(\Delta_1) \otimes T) \rightarrow L \amalg_{K'} (K' \star T)$$

défini par

$$\begin{aligned} \chi(x \star \emptyset) &= g(x) \\ \chi(x \star ((0) \otimes y)) &= f'(x) \star y + e(y)k'(x) \\ \chi(x \star ((1) \otimes y)) &= f(x) \star y + e(y)k(x) \\ \chi(x \star ((01) \otimes y)) &= l(x) \star y + e(y)H(x), \end{aligned}$$

où on ajoute aux conventions utilisées dans la définition de ψ au paragraphe C.4 les conventions $l(\emptyset) = 0$ et $H(\emptyset) = 0$.

On va voir que l'application χ , pour $T = c(\Delta_n)$, permet de décrire $N((l, H, b)^*)$ en termes de complexes dirigés augmentés. Pour ce faire, nous avons besoin d'une description alternative du nerf d'une transformation oplax.

C.8. Soit α une transformation oplax entre ∞ -foncteurs de source C et de but D . Par adjonction, la transformation oplax α correspond à un ∞ -foncteur $C \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, D)$ qu'on notera k_α . L'homotopie simpliciale $N(\alpha)$ peut se décrire à partir de k_α de la manière suivante. Soit $(\varphi, x) : \Delta_n \rightarrow \Delta_1 \times N(C)$ un n -simplexe de $\Delta_1 \times N(C)$. Le n -simplexe $N(\alpha)(\varphi, x)$ de $N(D)$ est l'image de $x : \mathcal{O}_n \rightarrow C$ par le composé

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, \underline{\text{Hom}}_{\text{lax}}(D_1, D)) \\ & & \downarrow \wr \\ & & \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(D_1 \otimes \mathcal{O}_n, D) \longrightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, D) \end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales du haut et du bas sont induites respectivement par k_α et le ∞ -foncteur $\nu(g_\varphi)$ du paragraphe A.8.

C.9. Explicitons le paragraphe précédent dans le cas où $\alpha = (k, H, b)^*$ est la transformation du paragraphe C.7. On a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c' \setminus C) &\simeq \text{Hom}_{\nu(L) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(L \amalg_{K'} (K' \star c(\Delta_n))), \nu(j_1)), (C, b)) \\ \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c \setminus C) &\simeq \text{Hom}_{\nu(K) \setminus \infty\text{-Cat}}((\nu(K \star c(\Delta_n)), \nu(\iota_1)), (C, c)), \end{aligned}$$

et, si $\varphi : \Delta_n \rightarrow \Delta_1$ est un n -simplexe de Δ_1 , l'application

$$\text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c' \setminus C) \rightarrow \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}_n, c \setminus C)$$

du paragraphe précédent est induite par le composé

$$K \star c(\Delta_n) \xrightarrow{K \star g_\varphi} K \star (c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)) \xrightarrow{\chi} L \amalg_{K'} (K' \star c(\Delta_n)),$$

où χ est le morphisme du paragraphe C.7 pour $T = c(\Delta_n)$. On notera χ_φ ce composé.

C.10. Explicitons les morphismes χ et χ_φ du paragraphe C.7 et du paragraphe précédent dans le cas qui nous intéresse, à savoir celui du cône

et de $T = c(\Delta_n)$. Le but de χ est $c(\Delta_m) \amalg_{c(\Delta_m)} (c(\Delta_m) \star c(\Delta_n))$ qui est canoniquement isomorphe à $c(\Delta_m) \star c(\Delta_n)$ et on considérera χ comme un morphisme

$$\chi : c(\Delta_m) \star (c(\Delta_1) \otimes c(\Delta_n)) \rightarrow c(\Delta_m) \star c(\Delta_n).$$

De même, on considérera χ_φ comme un morphisme

$$\chi_\varphi : c(\Delta_m) \star c(\Delta_n) \rightarrow c(\Delta_m) \star c(\Delta_n).$$

En explicitant les formules du paragraphe C.7 pour le cône ci-dessus, on obtient que χ est donné par

$$\begin{aligned}
 (i_0, \dots, i_p) \star \emptyset &\mapsto (i_0, \dots, i_p) \star \emptyset \\
 (i_0, \dots, i_p) \star ((0) \otimes (j_0, \dots, j_q)) &\mapsto \begin{cases} \emptyset \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } p = -1, \\ (m) \star (j_0) + (i_0, m) \star \emptyset & \text{si } p = 0 \text{ et } q = 0, \\ (m) \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } p = 0 \text{ et } q > 0, \\ (i_0, \dots, i_p, m) \star \emptyset & \text{si } p > 0 \text{ et } q = 0, \\ 0 & \text{si } p > 0 \text{ et } q > 0, \end{cases} \\
 (i_0, \dots, i_p) \star ((1) \otimes (j_0, \dots, j_q)) &\mapsto (i_0, \dots, i_p) \star (j_0, \dots, j_q) \\
 (i_0, \dots, i_p) \star ((01) \otimes (j_0, \dots, j_q)) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } p = -1, \\ (i_0, \dots, i_p, m) \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } p \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Décrivons maintenant l'endomorphisme

$$\chi_\varphi : \mathbf{c}(\Delta_m) \star \mathbf{c}(\Delta_n) \rightarrow \mathbf{c}(\Delta_m) \star \mathbf{c}(\Delta_n).$$

Soit $(i_0, \dots, i_p) \star (j_0, \dots, j_q)$ un élément de la base de $\mathbf{c}(\Delta_m) \star \mathbf{c}(\Delta_n)$. Notons r le nombre de 0 parmi $\varphi(j_0), \dots, \varphi(j_q)$. Alors l'endomorphisme χ_φ envoie l'élément $(i_0, \dots, i_p) \star (j_0, \dots, j_q)$ sur

$$\begin{cases} (i_0, \dots, i_p) \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } r = 0, \\ \emptyset \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } r = 1 \text{ et } p = -1, \\ (m) \star (j_0) + (i_0, m) \star \emptyset & \text{si } r = 1, p = 0 \text{ et } q = 0, \\ (m) \star (j_0, \dots, j_q) + (i_0, m) \star (j_1, \dots, j_q) & \text{si } r = 1, p = 0 \text{ et } q > 0, \\ (i_0, \dots, i_p, m) \star \emptyset & \text{si } r = 1, p > 0 \text{ et } q = 0, \\ (i_0, \dots, i_p, m) \star (j_1, \dots, j_q) & \text{si } r = 1, p > 0 \text{ et } q > 0, \\ \emptyset \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } r \geq 2 \text{ et } p = -1, \\ (m) \star (j_0) + (i_0, m) \star \emptyset & \text{si } r \geq 2, p = 0 \text{ et } q = 0, \\ (m) \star (j_0, \dots, j_q) & \text{si } r \geq 2, p = 0 \text{ et } q > 0, \\ (i_0, \dots, i_p, m) \star \emptyset & \text{si } r = 2, p > 0 \text{ et } q = 0, \\ 0 & \text{si } r \geq 2, p > 0 \text{ et } q > 0. \end{cases}$$

On vérifie que ce morphisme χ_φ s'identifie à travers l'isomorphisme canonique entre $\mathbf{c}(\Delta_m) \star \mathbf{c}(\Delta_n)$ et $\mathbf{c}(\Delta_{m+1+n})$ au morphisme f_φ défini au paragraphe 6.6 de [6] pour construire l'homotopie simpliciale h . On en déduit que $N(\alpha) = h$ dans le cas où $A = C$ et $v = 1_C$ et donc que $N(\alpha \times_C A) = h$ dans le cas général puisque le nerf est compatible aux changements de base des transformations oplax (voir le corollaire A.17) et que h est définie par un changement de base. Ceci achève de montrer que

$$s = N((r', h', c)^* \times_C A), \quad r = N(m^* \times_C A) \quad \text{et} \quad h = N((h', 1_{h'}, c)^* \times_C A).$$

Remerciements

Les auteurs remercient vivement le rapporteur anonyme pour sa relecture attentive et ses nombreuses remarques qui ont grandement amélioré la qualité de ce texte. En particulier, c'est lui qui a suggéré l'utilisation de la diagonale d'Alexander-Whitney dans l'appendice A.

Références

- [1] F. A. AL-AGL & R. STEINER – « Nerves of multiple categories », *Proc. London Math. Soc.* (3) **66** (1993), no. 1, p. 92–128.
- [2] D. ARA – « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 2, p. 83–108.
- [3] —, « A Quillen Theorem B for strict ∞ -categories », *J. Lond. Math. Soc.* (2) **100** (2019), no. 2, p. 470–497.
- [4] D. ARA & G. MALTSINIOTIS – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n -catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.
- [5] —, « Le type d’homotopie de la ∞ -catégorie associée à un complexe simplicial », Prépublication, [ArXiv:1503.02720v1](https://arxiv.org/abs/1503.02720v1), 2015.
- [6] —, « Un théorème A de Quillen pour les ∞ -catégories strictes I : la preuve simpliciale », *Adv. Math.* **328** (2018), p. 446–500.
- [7] —, « Joint et tranches pour les ∞ -catégories strictes », à paraître dans *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*.
- [8] —, « Comparaison des nerfs n -catégoriques », en préparation.
- [9] A. K. BOUSFIELD & D. M. KAN – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer-Verlag, 1972.
- [10] M. BULLEJOS & A. M. CEGARRA – « On the geometry of 2-categories and their classifying spaces », *K-Theory* **29** (2003), no. 3, p. 211–229.
- [11] J. CHICHE – « La théorie de l’homotopie des 2-catégories », Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7, 2014, sous la direction de G. Maltsiniotis.
- [12] —, « Un théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015), p. 49–85.
- [13] D.-C. CISINSKI – « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.
- [14] —, « Les préfaisceaux comme modèles des types d’homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.
- [15] A. GAGNA – « Strict n -categories and augmented directed complexes model homotopy types », *Adv. Math.* **331** (2018), p. 542–564.
- [16] J. W. GRAY – *Formal category theory: adjointness for 2-categories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 391, Springer-Verlag, 1974.
- [17] A. GROTHENDIECK – « Pursuing stacks », Manuscript, 1983, édité par G. Maltsiniotis et B. Toën, à paraître dans *Documents Mathématiques*.
- [18] M. L. DEL HOYO – « The rectification of lax functors and Quillen’s Theorem A », Communication privée à J. Chiche, 2011.
- [19] —, « On the loop space of a 2-category », *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 1, p. 28–40.
- [20] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations I et II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239 et 283, Springer-Verlag, 1972.
- [21] A. JOYAL – « Quasi-categories and Kan complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **175** (2002), no. 1-3, p. 207–222, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly.

- [22] — , « The theory of quasi-categories and its applications », Prépublication, 2008.
- [23] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, seconde éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1998.
- [24] G. MALTSINIOTIS – « La théorie de l’homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.
- [25] D. G. QUILLEN – « Higher algebraic K -theory. I », in *Algebraic K-theory I: Higher K-theories* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.
- [26] R. STEINER – « Omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, p. 175–200.
- [27] — , « Simple omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **9** (2007), no. 1, p. 451–465.
- [28] R. STREET – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.
- [29] R. W. THOMASON – « Cat as a closed model category », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.