14·13. Když f je konečná funkce druhé třídy v oboru P, pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ konečných funkcí prvé třídy v oboru P taková, že $f_n(x) \to f(x)$ pro každý $x \in P$.

14·14. Nechť f je konečná funkce. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konečných funkcí druhé třídy. Nechť f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{f_n\}$. Pak f je funkce druhé třídy.

14·15. Nechť f je funkce v oboru P. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f byla druhé třídy, jest, aby pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) > c]$ a $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ byly $\mathbf{G}_{\delta\sigma}(P)$.

KAPITOLA III.

Speciální metrické prostory.

§ 15. Úplné prostory.

15·1. Nechť P je metrický prostor. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z P. Pravíme, že $\{x_n\}$ je *cauchyovská posloupnost*, když lze každému $\varepsilon > 0$ přiřaditi index $p(\varepsilon)$ tak, že

$$m > p(\varepsilon),\ n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Tento pojem je metrický, ne však topologický.

15·1·1. *Konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak $m > p(\varepsilon)$, $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) \leqq$

$$\leqq \varrho(x_m, x) + \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pravíme, že P je *úplný prostor* (*vollständiger Raum, espace complet, complete space*), když P je metrický prostor takový, že každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní v P. Zřejmě každý konečný metrický prostor (na př. $\emptyset$) je úplný. Úplnost je zase metrický, ne však topologický pojem.

15·1·2. *Když P a Q jsou úplné prostory, pak $P \times Q$ jest úplný prostor.*

Důkaz. Nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je cauchyovská posloupnost bodů z $P \times Q$. Ježto

$$\varrho(x_m, x_n) \leqq \varrho[(x_m, y_m), (x_n, y_n)],$$

zřejmě také $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Ježto prostor P je úplný, existuje $\lim x_n = x \in P$. Podobně existuje $\lim y_n = y \in Q$. Zřejmě $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

15·1·3. *Euklidovský prostor* E_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *je úplný.*

Důkaz. I. Že prostor E_1 jest úplný, je známá *Bolzano-Cauchyova věta* elementární analysy (v. na př. Petr, *Počet diferenciální*, str. 28).

II. Když E_m jest úplný, pak $\mathsf{E}_{m+1} = \mathsf{E}_m \times \mathsf{E}_1$ jest úplný podle **15·1·2.**

15·1·4. *Hilbertův prostor* H *je úplný.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost bodů $x_n = \{x_{ni}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathsf{H}$. Ježto $\varrho(x_{mi}, x_{ni}) \leqq \varrho(x_m, x_n)$, také $\{x_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost pro každé i. Ježto prostor E_1 je úplný, pro každé i existuje $\lim\limits_{n \to \infty} x_{ni} = y_i$. Nechť $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost, existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že

$$m > p(\varepsilon),\ n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$\sum_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} (x_{mi} - x_{ni})^2 = [\varrho(x_m, x_n)]^2,$$

tedy

$$m > p(\varepsilon),\ n > p(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (x_{mi} - x_{ni})^2 < \varepsilon^2.$$

Avšak

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_{ni})^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2,$$

takže

$$n > p(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_{ni})^2 \leqq \varepsilon^2.$$

Tedy konverguje řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (y_i - x_{ni})^2$, takže podle formule (2) v odst. **6·1** konverguje také řada $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$, t. j. $y \in \mathsf{H}$. Mimo to

$$[\varrho(y, x_n)]^2 = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_{ni})^2,$$

takže: $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho(y, x_n) \leqq \varepsilon$. Tedy $y = \lim x_n$.

15·2. Nechť Q je bodová množina vnořená do metrického prostoru P, takže také Q je metrický prostor. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z Q, pak $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru Q tehdy a jen tehdy, když je to cauchyovská posloupnost v prostoru P. Naproti tomu ovšem posloupnost $\{x_n\}$ může býti konvergentní v prostoru P a při tom nemusí býti konvergentní v prostoru Q.

15·2·1. *Nechť* $Q \subset P$. *Nechť* Q *je úplný prostor. Pak* Q *je uzavřená v* P.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost bodů z Q; nechť existuje $x =$

$= \lim x_n \in P$. Podle **8·3·3** stačí ukázati, že $x \in Q$. Avšak $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost podle **15·1·1**. Ježto prostor Q je úplný, existuje $\lim x_n \in Q$. Tedy $x \in Q$.

15·2·2. *Nechť P je úplný prostor. Nechť množina $Q \subset P$ je uzavřená. Pak Q je úplný prostor.*

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost bodů z Q. Ježto $P \supset Q$ je úplný prostor, existuje $x = \lim x_n \in P$. Ježto množina Q je uzavřená, podle **8·3·3** je $x \in Q$. Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je konvergentní v Q.

15·3. Nechť P je *libovolný* metrický prostor. Nechť $\mathbf{C}$ je množina všech těch *cauchyovských* posloupností bodů z P, které v prostoru P *nejsou konvergentní*. Jsou-li $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ dvě posloupnosti z $\mathbf{C}$, nazveme je (pouze v tomto odst.) *ekvivalentní*, je-li $\varrho(x_n, y_n) \to 0$ (ϱ znamená ovšem metriku v P). Snadno se dokáže, že můžeme množinu $\mathbf{C}$ rozděliti ve třídy tak, že: [1] každá posloupnost $\{x_n\} \in \mathbf{C}$ náleží právě do jedné třídy; [2] dvě posloupnosti $\{x_n\} \in \mathbf{C}$ a $\{y_n\} \in \mathbf{C}$ jsou ekvivalentní, když a jen když náležejí obě do stejné třídy. Zvolme takovou podmnožinu Q množiny $\mathbf{C}$, která z každé třídy obsahuje právě jeden prvek. (Je-li prostor P úplný, je ovšem $\mathbf{C} = Q = \emptyset$.)

V následujícím pro přehlednost malá latinská písmena znamenají prvky množiny P, malá řecká písmena prvky množiny Q.

Definujme funkci ϱ_0 v oboru $(P + Q) \times (P + Q)$ takto:

[1] když $a \in P$, $b \in P$, pak $\varrho_0(a, b) = \varrho(a, b)$;

[2] když $\alpha = \{a_n\} \in Q$, $b \in P$, pak nechť $\varrho_0(\alpha, b) = \varrho_0(b, \alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, b)$. Musíme ovšem dokázati, že posloupnost $\{\varrho(a_n, b)\}$ je v $\mathbf{E}_1$ konvergentní. Ježto prostor $\mathbf{E}_1$ je úplný, stačí dokázati, že posloupnost $\{\varrho(a_n, b)\}$ je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. Ježto $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost, existuje index p takový, že: $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \varepsilon$. Nechť $m > p$, $n > p$; pak $\varrho(a_m, b) \leqq \varrho(a_m, a_n) + \varrho(a_n, b) < \varrho(a_n, b) + \varepsilon$ a podobně $\varrho(a_n, b) < \varrho(a_m, b) + \varepsilon$. Tedy $m > p$, $n > p \Rightarrow | \varrho(a_m, b) - \varrho(a_n, b) | < \varepsilon$, takže $\{\varrho(a_n, b)\}$ je vskutku cauchyovská posloupnost;

[3] když $\alpha = \{a_n\} \in Q$, $\beta = \{b_n\} \in Q$, pak nechť $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, b_n)$. Zase musíme dokázati, že posloupnost $\{\varrho(a_n, b_n)\}$ je konvergentní v $\mathbf{E}_1$; opět stačí ukázati, že je to cauchyovská posloupnost. Nechť $\varepsilon > 0$. Ježto $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti, existuje index p takový, že: $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\varrho(b_m, b_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $m > p$, $n > p$; pak $\varrho(a_m, b_m) \leqq \varrho(a_m, a_n) + \varrho(a_n, b_n) + \varrho(b_n, b_m) < \varrho(a_n, b_n) + \varepsilon$ a podobně $\varrho(a_n, b_n) < \varrho(a_m, b_m) + \varepsilon$. Tedy $m > p$, $n > p \Rightarrow |\varrho(a_m, b_m) - \varrho(a_n, b_n)| < \varepsilon$, takže $\{\varrho(a_n, b_n)\}$ je vskutku cauchyovská posloupnost.

Dokážeme, že funkce ϱ_0 je metrika v $P + Q$, t. j. že má vlastnosti [1], [2], [3] vyslovené v odst. **6·1.**

I. $\varrho_0(a, a) = 0$, $\varrho_0(\alpha, \alpha) = 0$ je zřejmé; rovněž $\varrho_0(a, b) > 0$ pro $a \neq b$. Když $\alpha \neq \beta$, pak $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim \varrho(a_n, b_n) \neq 0$ (tedy > 0), neboť podle definice množiny Q posloupnosti $\alpha = \{a_n\}$ a $\beta = \{b_n\}$ nejsou ekvivalentní. Také $\varrho_0(\alpha, b) = \varrho_0(b, \alpha) = \lim \varrho(a_n, b) \neq 0$ (tedy > 0), neboť není $\lim a_n = b$, ježto posloupnost $\alpha = \{a_n\} \in Q \subset \mathbf{C}$ není konvergentní v P.

II. $\varrho_0(a, b) = \varrho_0(b, a)$, $\varrho_0(\alpha, b) = \varrho_0(b, \alpha)$, $\varrho_0(\alpha, \beta) = \varrho_0(\beta, \alpha)$ je zřejmé.

III. Nechť jsou α, β a γ tři prvky množiny $P + Q$. Když $\alpha \in Q$, existuje posloupnost $\{a_n\}$ bodů z P taková, že $\alpha = \{a_n\}$; když $\alpha \in P$, volím $a_n = \alpha$ pro všecka n. Stejně zavedu posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$. Pak jest $\varrho_0(\alpha, \beta) = \lim \varrho(a_n, b_n)$ a stejně pro $\varrho_0(\alpha, \gamma)$ a $\varrho_0(\beta, \gamma)$. Avšak $\varrho(a_n, c_n) \leqq \varrho(a_n, b_n) + \varrho(b_n, c_n)$, tedy $\lim \varrho(a_n, c_n) \leqq \lim \varrho(a_n, b_n) + \lim \varrho(b_n, c_n)$, t. j. $\varrho_0(\alpha, \gamma) \leqq \varrho_0(\alpha, \beta) + \varrho_0(\beta, \gamma)$.

Tedy množina $P + Q$ s metrikou ϱ_0 je metrický prostor. Ježto parciální metrika $(\varrho_0)_{P \times P}$ jest identická s ϱ, prostor $P = (P, \varrho)$ je bodová množina vnořená do prostoru $P + Q = (P + Q, \varrho_0)$.

Když $\alpha = \{a_n\} \in Q$, pak $\varrho_0(\alpha, a_n) = \lim\limits_{k \to \infty} \varrho(a_k, a_n)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje index p takový, že: $k > p$, $n > p \Rightarrow \varrho(a_k, a_n) < \varepsilon$, tedy: $n > p \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} \varrho(a_k, a_n) \leqq \varepsilon$, t. j.: $n > p \Rightarrow \varrho_0(\alpha, a_n) \leqq \varepsilon$. Tedy $\varrho_0(\alpha, a_n) \to 0$, t. j. $a_n \to \alpha$. Tedy podle cvič. *12·2* množina P je hustá v prostoru $P + Q$.

Prostor $P + Q$ je úplný. Nechť $\{\alpha_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $P + Q$. Ježto množina P je hustá v $P + Q$, existují body $a_n \in P$ takové, že $\varrho_0(\alpha_n, a_n) < \frac{1}{n}$. Každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi index $p(\varepsilon)$ tak, že: $m > p(\varepsilon)$, $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho_0(\alpha_m, \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{3}$; zřejmě můžeme předpokládati, že $p(\varepsilon) > \frac{3}{\varepsilon}$. Pro $m > p(\varepsilon)$, $n > p(\varepsilon)$ jest $\varrho(a_m, a_n) = \varrho_0(a_m, a_n) \leqq \varrho_0(a_m, \alpha_m) + \varrho_0(\alpha_m, \alpha_n) + \varrho_0(\alpha_n, a_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon$. Tedy $\{a_n\}$ je cauchyovská posloupnost bodů z P. Stačí dokázati, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní v $P + Q$. Neboť, když $a_n \to \beta$, ježto $\varrho_0(\alpha_n, \beta) \leqq \varrho_0(\alpha_n, a_n) + \varrho_0(a_n, \beta) < \varrho_0(a_n, \beta) + \frac{1}{n}$, je také $\alpha_n \to \beta$. Když posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní v P, jsme hotovi. V opačném případě je $\{a_n\} \in \mathbf{C}$, takže existuje posloupnost $\beta = \{b_n\} \in Q$ ekvivalentní s posloupností $\{a_n\}$. Víme (v. výše ř. 18—21), že $\varrho_0(b_n, \beta) \to 0$; ježto posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou ekvivalentní, je $\varrho_0(a_n, b_n) = \varrho(a_n, b_n) \to 0$; ježto $\varrho_0(a_n, \beta) \leqq \varrho_0(a_n, b_n) + \varrho_0(b_n, \beta)$, je také $\varrho_0(a_n, \beta) \to 0$, t. j. $a_n \to \beta$, takže vskutku posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní v $P + Q$.

15·4. Metrický prostor P_0 nazveme *úplným obalem* (*vollständige*

Hülle) metrického prostoru P, když: [1] P je bodová množina vnořená do P_0, [2] P_0 je úplný prostor, [3] P je hustá v P_0. Když $P = P_0$, pak prostor P je úplný. Obráceně, když prostor P jest úplný, podle **15·2·1** je $P = \overline{P}$ (což ovšem znamená uzávěr množiny P v prostoru P_0); avšak podle [3] je $\overline{P} = P_0$, takže $P = P_0$.

15·4·1. *Každý metrický prostor má úplný obal. Jsou-li P_1 a P_2 dva úplné obaly metrického prostoru P, pak existuje isometrické zobrazení f prostoru P_1 na prostor P_2 takové, že $f(x) = x$ pro každý bod $x \in P$.*

Důkaz. V odst. **15·3** jsme sestrojili metrický prostor $P + Q$, který je zřejmě úplným obalem metrického prostoru P. Nechť P_1 a P_2 jsou dva úplné obaly metrického prostoru P; nechť ϱ, ϱ_1 a ϱ_2 znamená metriku v P, v P_1 a v P_2, takže $\varrho = (\varrho_1)_{P\times P} = (\varrho_2)_{P\times P}$. Když $x \in P_1$, podle cvič. *12·2* existuje posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in P$, $\varrho_1(a_n, x) \to 0$. Posloupnost $\{a_n\}$ podle **15·1·1** je cauchyovská; ježto prostor $P_2 \supset P$ jest úplný, existuje bod $y \in P_2$ takový, že $\varrho_2(a_n, y) \to 0$. Ponechávajíce bod $x \in P_1$ beze změny, nahraďme posloupnost $\{a_n\}$ jinou posloupností $\{b_n\}$ se stejnými vlastnostmi, t. j. $b_n \in P$, $\varrho_1(b_n, x) \to 0$. Místo bodu y máme pak bod $z \in P_2$ takový, že $\varrho_2(b_n, z) \to 0$. Jest $\varrho_2(y, z) \leqq \varrho_2(y, a_n) + \varrho_2(a_n, b_n) + \varrho_2(b_n, z)$. Avšak $\varrho_2(a_n, b_n) = \varrho(a_n, b_n) = \varrho_1(a_n, b_n) \leqq \varrho_1(a_n, x) + \varrho_1(b_n, x)$. Ježto $\varrho_2(y, a_n) \to 0$, $\varrho_2(b_n, z) \to 0$, $\varrho_1(a_n, x) \to 0$, $\varrho_1(b_n, x) \to 0$, jest $\varrho_2(y, z) = 0$, tedy $y = z$, t. j. bod $y \in P_2$ je jednoznačně určen bodem $x \in P_1$, takže, klademe-li $y = f(x)$, f jest zobrazení prostoru P_1 *do* prostoru P_2. Je-li $x \in P$, můžeme voliti $a_n = x$ pro všecka n, takže $x \in P \Rightarrow f(x) = x$. Když $x \in P_1$, $x' \in P_1$, zvolme posloupnosti $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ tak, že $a_n \in P$, $a'_n \in P$, $\varrho_1(a_n, x) \to 0$, $\varrho_1(a'_n, x') \to 0$; podle definice zobrazení f je $\varrho_2[a_n, f(x)] \to 0$, $\varrho_2[a'_n, f(x')] \to 0$. Tedy v prostoru P_1 jest $a_n \to x$, $a'_n \to x'$ a v prostoru P_2 jest $a_n \to f(x)$, $a'_n \to f(x')$ takže podle cvič. *9·12* jest $\varrho_1(a_n, a'_n) \to \varrho_1(x, x')$, $\varrho_2(a_n, a'_n) \to \varrho_2[f(x), f(x')]$. Avšak $\varrho_1(a_n, a'_n) = \varrho(a_n, a'_n) = \varrho_2(a_n, a'_n)$. Tedy $\varrho_1(x, x') = \varrho_2[f(x), f(x')]$. Tedy zobrazení f jest isometrické. Zbývá ukázati, že f je zobrazení prostoru P_1 *na* prostor P_2, t. j. že ke každému $y \in P_2$ existuje $x \in P_1$ takový, že $f(x) = y$. Nechť $y \in P_2$. Podle cvič. *12·2* existuje posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in P$, $\varrho_2(a_n, y) \to 0$. Posloupnost $\{a_n\}$ podle **15·1·1** je cauchyovská; ježto prostor $P_1 \supset P$ je úplný, existuje bod $x \in P_1$ takový, že $\varrho_1(a_n, x) \to 0$. Zřejmě $f(x) = y$.

15·5. Metrický prostor P nazveme *absolutně uzavřený*, když má tuto vlastnost: je-li P vnořen do jakéhokoli metrického prostoru P_0, vždy P je množina uzavřená v P_0.

15·5·1. *Metrický prostor P je absolutně uzavřený, když a jen když je úplný.*

Důkaz. I. Nechť P je absolutně uzavřený. Nechť P_0 jest jeho úplný obal (v. **15·4·1**). Podle **15·2·2** P je úplný prostor.

II. Nechť prostor P je úplný. Podle **15·2·1** P je absolutně uzavřený.

Metrický prostor P nazveme *absolutní* $\mathbf{G}_\delta$, když má tuto vlastnost: je-li P vnořen do jakéhokoli metrického prostoru P_0, vždy P je $\mathbf{G}_\delta(P_0)$.

Z důvodu, který v brzku bude zřejmý (v. **15·6·3**), budeme místo absolutní $\mathbf{G}_\delta$ říkati *topologicky úplný prostor.*

15·5·2. *Metrický prostor P je topologicky úplný, když a jen když existuje úplný prostor Q takový, že P je $\mathbf{G}_\delta(Q)$.*

Důkaz. I. Nechť P je absolutní $\mathbf{G}_\delta$. Nechť P_0 jest jeho úplný obal (v. **15·4·1**). Zřejmě P je $\mathbf{G}_\delta(P_0)$ a P_0 jest úplný prostor.

II. Nechť existuje úplný prostor Q takový, že P je $\mathbf{G}_\delta(Q)$. Nechť R je metrický prostor, do něhož je P vnořen. Máme dokázati, že P je $\mathbf{G}_\delta(R)$. Nechť R_0 jest úplný obal prostoru R (v. **15·4·1**). Tedy Q a R_0 jsou úplné prostory a P je vnořen do obou z nich. Nechť $\overline{P}(Q)$ a $\overline{P}(R_0)$ jsou uzávěry množiny P resp. v prostoru Q a v prostoru R_0. Podle **15·2·2** $\overline{P}(Q)$ a $\overline{P}(R_0)$ jsou úplné prostory a P je vnořen do obou z nich. Zřejmě množina P je hustá i v $\overline{P}(Q)$ i v $\overline{P}(R_0)$, takže $\overline{P}(Q)$ a $\overline{P}(R_0)$ jsou dva úplné obaly prostoru P. Tedy podle **15·4·1** existuje isometrické zobrazení f prostoru $\overline{P}(Q)$ na prostor $\overline{P}(R_0)$ takové, že $x \in P \Rightarrow f(x) = x$. Ježto P je $\mathbf{G}_\delta(Q)$ a $P \subset \overline{P}(Q) \subset Q$, podle **13·6·1** P je $\mathbf{G}_\delta[\overline{P}(Q)]$. Ježto $\mathbf{G}_\delta$ je metrický (dokonce topologický) pojem, z existence zobrazení f soudíme, že P je také $\mathbf{G}_\delta[\overline{P}(R_0)]$. Podle **13·2** $\overline{P}(R_0)$ je $\mathbf{G}_\delta(R_0)$, takže podle cvič. *13·10* P je $\mathbf{G}_\delta(R_0)$. Ježto $P \subset R \subset R_0$, podle **13·6·1** P je $\mathbf{G}_\delta(R)$.

15·5·3. *Nechť P je topologicky úplný prostor. Nechť A je $\mathbf{G}_\delta(P)$. Pak A je topologicky úplný prostor.*

Důkaz. Podle **15·5·2** existuje úplný prostor Q takový, že P je $\mathbf{G}_\delta(Q)$. Podle cvič. *13·10* A je $\mathbf{G}_\delta(Q)$, takže A je topologicky úplný prostor podle **15·5·2**.

15·6. 15·6·1. *Nechť f je homeomorfní zobrazení metrického prostoru P na metrický prostor Q. Pak existují topologicky úplné prostory P_0 a Q_0 takové, že:* [1] *P je vnořen do P_0,* [2] *Q je vnořen do Q_0,* [3] *existuje homeomorfní zobrazení φ prostoru P_0 na prostor Q_0 takové, že $x \in P \Rightarrow \varphi(x) = f(x)$.*

Důkaz. Nechť P_1 a Q_1 jsou úplné obaly resp. prostoru P a prostoru Q (v. **15·4·1**). Označme P_2 množinu těch $x \in P_1$, pro něž platí, že každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že

$$a \in P, \quad a' \in P, \quad \varrho(a, x) < \delta, \quad \varrho(a', x) < \delta \Rightarrow \varrho[f(a), f(a')] \leqq \varepsilon. \quad (1)$$

Označme Q_2 množinu těch $y \in Q_1$, pro něž platí, že každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že

$$b \in Q, \; b' \in Q, \; \varrho(b, y) < \delta, \; \varrho(b', y) < \delta \Rightarrow \varrho[f_{-1}(b), \; f_{-1}(b')] \leqq \varepsilon.$$

Jsou-li m, n přirozená čísla, nechť A_{mn} znamená množinu těch $x \in P_1$, pro něž platí, že

$$a \in P, \; a' \in P, \; \varrho(a, x) < \frac{1}{n}, \; \varrho(a', x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \varrho[f(a), f(a')] \leqq \frac{1}{m}.$$

Lehko se nahlédne, že

$$P_2 = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}. \quad (2)$$

Když $x \in \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$, existuje index n takový, že $x \in A_{mn}$; je-li $x' \in P_1$, $\varrho(x, x') < \frac{1}{2n}$, vidíme snadno, že $x' \in A_{m,2n}$, tedy $x' \in \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$. Tedy každému $x \in \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že $\Omega_{P_1}(x, \delta) \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}$, takže podle (2) množina P_2 je $\mathbf{G}_\delta(P_1)$. Podobně množina Q_2 je $\mathbf{G}_\delta(Q_1)$.

Ježto zobrazení f je homeomorfní, je spojité. Tedy, je-li dán bod $x \in P$, lze každému $\varepsilon > 0$ přiřaditi $\delta > 0$ takové, že

$$a \in P,\ \varrho(a, x) < \delta \Rightarrow \varrho[f(a), f(x)] \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Avšak ze (3) následuje (1), t. j. $x \in P_2$. Tedy $P \subset P_2$. Ježto také inversní zobrazení f_{-1} je spojité, dokáže se stejně, že $Q \subset Q_2$.

Zvolme bod $x \in P_2$. Ježto P_1 je úplný obal prostoru P, množina P je hustá v $P_1 \supset P_2$, takže podle cvič. *12·2* existuje posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in P$, $a_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ježto $x \in P_2$, existuje $\delta > 0$ takové, že platí (1). Ježto $a_n \to x$, existuje index p takový, že $n > p \Rightarrow \varrho(a_n, x) < \delta$. Podle (1) platí: $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho[f(a_m), f(a_n)] \leqq \varepsilon$. Tedy $\{f(a_n)\}$ je cauchyovská posloupnost. Ježto $f(a_n) \in Q \subset Q_1$ a Q_1 je úplný prostor, existuje bod $y \in Q_1$ takový, že $f(a_n) \to y$. Ponechávajíce bod $x \in P_2$, nahraďme posloupnost $\{a_n\}$ jinou posloupností $\{a'_n\}$ se stejnými vlastnostmi, tedy $a'_n \in P$, $a'_n \to x$. Klademe-li $a''_{2n-1} = a_n$, $a''_{2n} = a'_n$, jest $a''_n \in P$, $a''_n \to x \in P_2$, takže existuje $\lim f(a''_n) \in Q_1$. Podle **7·1·2** je $\lim f(a_n) = \lim f(a''_n)$, $\lim f(a'_n) = \lim f(a''_n)$, tedy $\lim f(a_n) = \lim f(a'_n)$. Tedy bod $y = \lim f(a_n)$ závisí pouze na bodu $x \in P_2$ a nikoli na volbě posloupnosti $\{a_n\}$. Můžeme tedy položiti $y = \varphi_1(x)$. Je-li $x \in P$, mohu voliti $a_n = x$ pro všecka n, tedy $\varphi_1(x) = f(x)$. Tedy φ_1 je zobrazení množiny P_2 do množiny Q_1 a jest: $x \in P \Rightarrow \varphi_1(x) = f(x)$. Podobně se sestrojí zobrazení φ_2 množiny Q_2 do množiny P_1 takové, že: $y \in Q \Rightarrow \varphi_2(y) = f_{-1}(y)$.

Nechť $x_n \in P_2$, $x \in P_2$, $x_n \to x$. Pro každé n existuje posloupnost $\{a_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ taková, že $a_{ni} \in P$, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ni} = x_n$, tedy $\lim\limits_{i\to\infty} f(a_{ni}) = \varphi_1(x_n)$. Každému n lze přiřaditi index $i(n)$ takový, že, když $b_n = a_{n,i(n)}$, jest $\varrho(b_n, x_n) < \frac{1}{n}$, $\varrho[f(b_n), \varphi_1(x_n)] < \frac{1}{n}$. Jest $b_n \in P$, $b_n \to x$, tedy $f(b_n) \to \varphi_1(x)$. Ježto $\varrho[f(b_n), \varphi_1(x_n)] < \frac{1}{n}$, je také $\varphi_1(x_n) \to \varphi_1(x)$. Tím je dokázáno, že zobrazení φ_1 množiny P_2 do množiny Q_1 je spojité. Podobně se dokáže, že zobrazení φ_2 množiny Q_2 do množiny P_1 je spojité.

Položme $P_0 = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in P_2, \varphi_1(x) \in Q_2]$, $Q_0 = \underset{y}{\mathrm{E}}[y \in Q_2, \varphi_2(y) \in P_2]$. Zřejmě $P \subset P_0$, $Q \subset Q_0$. Ježto množina Q_2 je $\mathbf{G}_\delta(Q_1)$ a ježto φ_1 je spojité zobrazení prostoru P_2 do prostoru Q_1, podle cvič. *13·7* množina P_0 je $\mathbf{G}_\delta(P_2)$. Ježto množina P_2 je $\mathbf{G}_\delta(P_1)$, podle cvič. *13·10* množina P_0 je $\mathbf{G}_\delta(P_1)$. Ježto P_1 jest úplný prostor, podle **15·5·2** P_0 je topologicky úplný prostor. Podobně Q_0 je topologicky úplný prostor.

Položme $\varphi = (\varphi_1)_{P_0}$, $\psi = (\varphi_2)_{Q_0}$ (v. **2·4**). Když $x \in P_0$, pak existuje posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in P$, $a_n \to x$, $f(a_n) \to \varphi_1(x) = \varphi(x)$. Ježto $x \in P_0$, je $\varphi(x) \in Q_2$. Ježto $f(a_n) \in Q$, $f(a_n) \to \varphi(x)$, jest $a_n = f_{-1}[f(a_n)] \to$ $\to \varphi_2[\varphi(x)]$, tedy $\varphi_2[\varphi(x)] = x$. Ježto $\varphi(x) \in Q_2$, $x \in P_2$, je $\varphi(x) \in Q_0$. Tedy $\varphi(P_0) \subset Q_0$. Ježto $\varphi(x) \in Q_0$, je $\varphi_2[\varphi(x)] = \psi[\varphi(x)]$, tedy $\psi[\varphi(x)] = x$, takže $\psi(Q_0) \supset P_0$. Podobně se dokáží relace $\psi(Q_0) \subset P_0$, $\varphi(P_0) \supset Q_0$. Tedy $\varphi(P_0) = Q_0$, $\psi(Q_0) = P_0$, t. j. φ je spojité zobrazení množiny P_0 na množinu Q_0 a ψ je spojité zobrazení množiny Q_0 na množinu P_0. Mimo to jsme viděli, že $x \in P_0 \Rightarrow \psi[\varphi(x)] = x$, takže $\psi = \varphi_{-1}$ a φ je homeomorfní zobrazení množiny P_0 na množinu Q_0. Ovšem $x \in P \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(x) = f(x)$.

15·6·2. *Nechť metrické prostory P a Q jsou homeomorfní. Když P je topologicky úplný, také Q je topologicky úplný.*

Tedy topologická úplnost je netoliko vlastnost metrická, což je z její definice zřejmé, nýbrž je to (na rozdíl od úplnosti) dokonce vlastnost topologická.

Důkaz. Nechť f je homeomorfní zobrazení topologicky úplného prostoru P na metrický prostor Q. Podle **15·6·1** existují topologicky úplné prostory $P_0 \supset P$ a $Q_0 \supset Q$ a homeomorfní zobrazení φ prostoru Q_0 na prostor P_0 takové, že $\varphi(Q) = P$. Ježto P je topologicky úplný a $P \subset P_0$, P je $\mathbf{G}_\delta(P_0)$. Ježto φ_{-1} je spojité zobrazení prostoru Q_0 na prostor P_0 a ježto $Q = \varphi_{-1}(P)$, podle cvič. *13·7* Q je $\mathbf{G}_\delta(Q_0)$. Nechť Q_1 je úplný obal prostoru Q_0 (v. **15·4·1**). Ježto Q_0 je topologicky úplný, Q_0 je $\mathbf{G}_\delta(Q_1)$. Tedy podle cvič. *13·10* Q je $\mathbf{G}_\delta(Q_1)$, takže podle **15·5·2** Q je topologicky úplný.

15·6·3. *Metrický prostor P je topologicky úplný, když a jen když existuje úplný prostor homeomorfní s P.*

Důkaz. I. Podle **13·2** a **15·5·1** a podle definice topologicky úplného prostoru úplný prostor je topologicky úplný, takže podle **15·6·2** prostor homeomorfní s úplným prostorem je topologicky úplný.

II. Nechť $P = (P, \varrho)$ je topologicky úplný prostor s metrikou ϱ. Stačí (v. **9·3**) ukázati, že v P existuje metrika ϱ_0 ekvivalentní s metrikou ϱ a taková, že prostor (P, ϱ_0) jest úplný. Podle **15·4·1** můžeme prostor $P = (P, \varrho)$ vnořiti do úplného prostoru Q. Metriku v Q můžeme bez obavy značiti ϱ, stejně jako původně danou parciální metriku v P. Ježto P je topologicky úplný, existují množiny G_n otevřené v Q a takové, že $P = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Je-li $P = Q$, jest prostor (P, ϱ) úplný a nemáme co dokazovati. Můžeme tedy předpokládati, že $P \neq Q$, načež ovšem můžeme předpokládati, že $G_n \neq Q$ pro všecka n.*) Pro $x \in P$, $y \in P$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ položme

$$f_n(x, y) = \varrho(x, y) + \varrho(x, Q - G_n) + \varrho(y, Q - G_n), \tag{1}$$

$$g_n(x, y) = \frac{\varrho(x, y)}{f_n(x, y)}, \tag{2}$$

$$\varrho_0(x, y) = \varrho(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot g_n(x, y). \tag{3}$$

Ježto $x \in P \subset G_n$, $Q - G_n = \overline{Q - G_n}$ (kde pravá strana značí ovšem uzávěr v Q), jest $\varrho(x, Q - G_n) > 0$ a podobně $\varrho(y, Q - G_n) > 0$. Tedy $0 \leqq \varrho(x, y) < f_n(x, y)$, tedy

$$0 \leqq g_n(x, y) < 1, \tag{4}$$

takže nekonečná řada napravo ve (3) je konvergentní. Mimo to

$$0 \leqq \varrho(x, y) \leqq \varrho_0(x, y). \tag{5}$$

Pro $x = y$ zřejmě $\varrho_0(x, y) = 0$. Pro $x \neq y$ zřejmě $\varrho_0(x, y) > 0$. Zřejmě $\varrho_0(x, y) = \varrho_0(y, x)$.

Ježto pro čísla $c > 0$, $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq t_1$ zřejmě platí

$$\frac{t_1}{c + t_1} \leqq \frac{t_2}{c + t_2}$$

a ježto pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ jest $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$, jest

$$g_n(x, z) \leqq \frac{\varrho(x, y) + \varrho(y, z)}{\varrho(x, y) + \varrho(x, Q - G_n) + \varrho(y, z) + \varrho(z, Q - G_n)}. \tag{6}$$

Podle cvič. *6·6* je však

$$\varrho(y, Q - G_n) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(x, Q - G_n),$$
$$\varrho(y, Q - G_n) \leqq \varrho(y, z) + \varrho(z, Q - G_n),$$

takže jmenovatel napravo v (6) není menší než žádné z obou čísel

$$\varrho(x, y) + \varrho(x, Q - G_n) + \varrho(y, Q - G_n),$$
$$\varrho(y, z) + \varrho(y, Q - G_n) + \varrho(z, Q - G_n).$$

Tedy z (6) následuje, že

$$g_n(x, z) \leqq g_n(x, y) + g_n(y, z),$$

takže podle (3) je $\varrho_0(x, z) \leqq \varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z)$.

Tím je dokázáno, že ϱ_0 je metrika v P. Dokažme, že obě metriky ϱ_0 a ϱ v P jsou ekvivalentní, t. j. že pro $x_n \in P$, $x \in P$ platí

---

*) Existuje totiž $a \in Q - P$, takže jest též $P = \prod_{n=1}^{\infty} [G_n - (a)]$ s otevřenými $G_n - (a) \neq Q$, takže stačí místo G_n vzíti $G_n - (a)$.

$$\varrho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \varrho_0(x_n, x) \to 0.$$

Když $\varrho_0(x_n, x) \to 0$, jest $\varrho(x_n, x) \to 0$ podle (5). Nechť tedy $\varrho(x_n, x) \to 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Určeme index k tak, že $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Podle (4) je pro všecka n

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} g_i(x_n, x) \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy

$$\varrho_0(x_n, x) < \varrho(x_n, x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} g_i(x_n, x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy podle (1) a (2)

$$\varrho_0(x_n, x) < \varrho(x_n, x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho(x_n, x)}{\varrho(x_n, x) + \varrho(x, Q - G_i)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avšak položíme-li $f(t) = t + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{t}{t + \varrho(x, Q - G_i)}$, pak f je spojitá funkce v oboru $\underset{t}{\mathrm{E}}[t \geqq 0]$, a jest $f(0) = 0$. Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $0 \leqq t < \delta \Rightarrow f(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ježto $\varrho(x_n, x) \to 0$, existuje index p takový, že: $n > p \Rightarrow 0 \leqq \varrho(x_n, x) < \delta \Rightarrow f[\varrho(x_n, x)] < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varrho_0(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy vskutku $\varrho_0(x_n, x) \to 0$.

Zbývá dokázati, že prostor (P, ϱ_0) je úplný. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v tomto prostoru. Máme ukázati, že existuje bod $x \in P$ takový, že $\varrho_0(x_n, x) \to 0$; stačí ovšem dokázati, že $\varrho(x_n, x) \to 0$, neboť metriky ϱ_0 a ϱ v P jsou ekvivalentní. Ježto posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská vzhledem k metrice ϱ_0, podle (5) je tím spíše cauchyovská vzhledem k metrice ϱ. Ježto prostor $Q \supset P$ s metrikou ϱ jest úplný, existuje bod $x \in Q$ takový, že $\varrho(x_n, x) \to 0$. Máme dokázati, že $x \in P$. Nechť naopak $x \in Q - P$. Ježto $P = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, existuje index k takový, že $x \in Q - G_k$. Tedy $\varrho(x_n, Q - G_k) \leqq \varrho(x_n, x)$; ježto $\varrho(x_n, x) \to 0$, jest

$$\varrho(x_n, Q - G_k) \to 0. \tag{7}$$

Podle (3) jest $\varrho_0(x_m, x_n) \geqq \frac{1}{2^k} g_k(x_m, x_n)$, tedy podle (1) a (2)

$$\varrho_0(x_m, x_n) \geqq \frac{1}{2^k} \frac{\varrho(x_m, x_n)}{\varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_m, Q - G_k) + \varrho(x_n, Q - G_k)}.$$

Podle cvič. *6·6* jest

$$\varrho(x_m, Q - G_k) \leqq \varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_n, Q - G_k);$$

tedy

$$\varrho_0(x_m, x_n) \geqq \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\varrho(x_m, x_n)}{\varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_n, Q - G_k)}.$$

Ježto $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost vzhledem k metrice ϱ_0, existuje index p takový, že: $m > p$, $n > p \Rightarrow \varrho_0(x_m, x_n) < \frac{1}{2^{k+2}}$.

Tedy

$$m > p,\ n > p \Rightarrow \frac{\varrho(x_m, x_n)}{\varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_n, Q - G_k)} < \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varrho(x_n, Q - G_k).$$

Tedy

$$m > p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varrho(x_m, x_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, Q - G_k),$$

tedy podle (7) a podle cvič. *9·10*: $m > p \Rightarrow \varrho(x_m, x) \leqq 0 \Rightarrow \varrho(x_m, x) = 0 \Rightarrow x_m = x$, což je spor, ježto $x_m \in P$, $x \in Q - P$.

15·7. 15·7·1. *Nechť P je úplný prostor. Nechť jsou A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) bodové množiny vnořené do P a takové, že $A_n \neq \emptyset$, $d(A_n) \to 0$, $A_n \supset \overline{A}_{n+1}$. Pak množina $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ obsahuje právě jeden bod.*

Důkaz. Zvolme $a_n \in A_n$. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje index p takový, že $d(A_p) < \varepsilon$. Když $n \geqq p$, jest $a_n \in A_n \subset A_p$, tedy: $m > p$, $n > p \Rightarrow \Rightarrow \varrho(a_m, a_n) \leqq d(A_p) < \varepsilon$. Tedy posloupnost $\{a_n\}$ jest cauchyovská. Ježto prostor P je úplný, existuje bod x_0 takový, že $a_n \to x_0$. Při daném n pro $i \geqq n + 1$ jest $a_i \in A_{n+1}$, takže podle **8·2·1** jest $x_0 \in \overline{A}_{n+1} \subset \subset A_n$. Tedy $x_0 \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Nechť $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Pro každé n jest $\varrho(x, x_0) \leqq \leqq d(A_n) \to 0$, tedy $\varrho(x, x_0) = 0$, tedy $x = x_0$.

Právě dokázaná věta je (zejména důležitý) zvláštní případ následující obecnější věty:

15·7·2. *Nechť P je úplný prostor. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ nechť $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, $A_n \subset P$, $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset \overline{A}_{n+1}$ a nechť existuje konečná množina $K_n \subset P$, $K_n \neq \emptyset$ taková, že $x \in A_n \Rightarrow \varrho(x, K_n) < \delta_n$. Pak je $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Důkaz. I. Zvolme $a_n \in A_n$ a dokažme, že z posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrati konvergentní posloupnost. Pro každé n je $a_n \in A_n \subset A_1$, takže ke každému n existuje bod x množiny K_1 takový, že $\varrho(a_n, x) < \delta_1$. Ježto množina K_1 je konečná, existuje bod $x_1 \in K_1$ takový, že z posloupnosti $\{a_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{a_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\varrho(a_{1n}, x) < \delta_1$ pro všecka n; ježto $A_n \supset A_{n+1}$, zřejmě $a_{1n} \in A_n$ pro všecka n.

Předpokládejme nyní, že při určitém i ($= 1, 2, 3, \dots$) bylo provedeno to, co jsme právě provedli pro $i = 1$: že jsme totiž určili bod

$x_i \in K_i$ a posloupnost $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že pro všecka n jest $a_{in} \in A_n$, $\varrho(a_{in}, x_i) < \delta_i$. Pro $n > i$ jest $a_{in} \in A_n \subset A_{i+1}$, takže ke každému $n > i$ existuje bod x množiny K_{i+1} takový, že $\varrho(a_{in}, x) < \delta_{i+1}$. Ježto množina K_{i+1} je konečná, existuje bod $x_{i+1} \in K_{i+1}$ takový, že z posloupnosti $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ lze vybrati posloupnost $\{a_{i+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\varrho(a_{i+1,n}, x_{i+1}) < \delta_{i+1}$ pro všecka n; zřejmě $a_{i+1,n} \in A_n$. Tedy lze posloupnosti $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ sestrojiti rekurentně pro $i = 1, 2, 3, \ldots$

Položme $b_n = a_{nn}$, takže posloupnost $\{b_n\}$ je vybrána z posloupnosti $\{a_n\}$. Máme dokázati, že posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní; ježto prostor P je úplný, stačí dokázati, že posloupnost $\{b_n\}$ je cauchyovská. Při každém i je posloupnost $\{b_n\}_{n=i}^{\infty}$ vybrána z posloupnosti $\{a_{in}\}_{n=1}^{\infty}$. Tedy: $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_n, x_i) < \delta_i$, tedy: $m \geqq i$, $n \geqq i \Rightarrow \varrho(b_m, b_n) < 2\delta_i$. Ježto $\delta_i \to 0$, posloupnost $\{b_n\}$ je cauchyovská. Ježto P_n je úplný, $\{b_n\}$ je konvergentní.

II. Podle I existuje konvergentní posloupnost $\{a_n\}$ taková, že $a_n \in A_n$. Nechť $a_n \to x_0$. Při daném n pro $i \geqq n + 1$ jest $a_i \in A_{n+1}$, takže podle **8·2·1** jest $x_0 \in \overline{A}_{n+1} \subset A_n$. Tedy $x_0 \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, takže $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

15·8. 15·8·1. *Nechť $P \neq \emptyset$ je topologicky úplný prostor. Nechť množiny $G_n \subset P$ jsou otevřené a husté v P. Pak $\prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$; dokonce množina $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v P.*

Důkaz. I. Dokažme, že $\prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. Z **15·6·3** následuje snadno, že stačí dokazovati za předpokladu, že prostor P jest úplný. Zvolme bod $a_1 \in G_1$. Ježto množina G_1 jest otevřená, existuje číslo δ_1 takové, že $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$ a že $\mathrm{E}_x[\varrho(a_1, x) \leqq \delta_1] \subset G_1$. Nechť obecněji při určitém n ($= 1, 2, 3, \ldots$) byl nalezen bod a_n a číslo δ_n tak, že $a_n \in G_n$, $0 < \delta_n < \frac{1}{2^n}$, $\mathrm{E}_x[\varrho(a_n, x) \leqq \delta_n] \subset G_n$. Ježto množina G_{n+1} je hustá, existuje bod $a_{n+1} \in G_{n+1}$ takový, že $\varrho(a_n, a_{n+1}) < \delta_n$. Ježto množiny G_{n+1} a $\mathrm{E}_x[\varrho(a_n, x) < \delta_n]$ jsou otevřené, existuje číslo δ_{n+1} takové, že $0 < \delta_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$, $\mathrm{E}_x[\varrho(a_{n+1}, x) \leqq \delta_{n+1}] \subset G_{n+1} \cdot \mathrm{E}_x[\varrho(a_n, x) \leqq \delta_n]$. Tedy lze body a_n a čísla δ_n sestrojovati rekurentně. Položme $S_n = \mathrm{E}_x[\varrho(a_n, x) \leqq \delta_n]$. Pak jest $S_n \subset G_n$, $S_n \supset S_{n+1}$, $d(S_n) \leqq 2\delta_n \to 0$, $S_n \neq \emptyset$. Mimo to $S_n = \overline{S}_n$ (na př. podle **9·5** a cvič. *9·10*). Tedy podle **15·7·1** jest $\prod_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$. Ježto $S_n \subset G_n$, jest $\prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

II. Nechť $\Gamma \neq \emptyset$ jest otevřená. Podle **12·1·2** stačí ukázati, že $\Gamma \cdot \prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. Podle **13·1·1** a **15·5·3** Γ je topologicky úplný prostor. Množiny ΓG_n jsou podle **8·7·5** otevřené a podle cvič. *12·3* husté v Γ. Tedy podle I je $\prod_{n=1}^{\infty} \Gamma G_n \neq \emptyset$, t. j. $\Gamma \cdot \prod_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

15·8·2. *Nechť $P \neq \emptyset$ je topologicky úplný prostor. Nechť množina A je prvé kategorie v P. Pak je $P - A \neq \emptyset$; dokonce množina $P - A$ je hustá v P.*

Důkaz. Jest $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde množiny A_n jsou řídké, tedy (otevřené) množiny $G_n = P - \overline{A}_n$ jsou husté. Tedy podle **15·8·1** množina $\prod_{n=1}^{\infty} G_n = P - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ je hustá. Podle **12·1·1** také množina $P - A \supset$ $\supset P - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ je hustá.

15·8·3. *Nechť $P \neq \emptyset$ je topologicky úplný prostor. Nechť f je funkce prvé třídy v oboru P. Nechť C je množina těch $x \in P$, ve kterých f je spojitá. Množina C je hustá v P.*

Důkaz. Podle **14·5·2** množina $P - C$ je prvé kategorie. Tedy podle **15·8·2** množina C je hustá.

15·8·4. *Množina R všech racionálních čísel není* $\mathbf{G}_\delta(\mathbf{E}_1)$.

Důkaz. Když $a \in R$, pak množina (a) je řídká v R podle cvič. *12·5*. Tedy množina R je prvé kategorie v R podle cvič. *3·1*. Tedy prostor R není topologicky úplný podle **15·8·2.** Tedy R není $\mathbf{G}_\delta(\mathbf{E}_1)$ podle **15·1·3** a **15·5·2.**

Cvičení.

15·1. Nechť $P = A + B$. Nechť A a B jsou úplné prostory. Pak P jest úplný prostor.

15·2. Nechť $P = A + B$. Nechť A a B jsou topologicky úplné prostory. Pak P je topologicky úplný prostor.

15·3. Nechť množina $\mathbf{C}$ je $\neq \emptyset$. Nechť P je metrický prostor. Pro každý $z \in \mathbf{C}$ nechť $A(z)$ jest úplný prostor vnořený do P. Pak $\prod_{z \in \mathbf{C}} A(z)$ jest úplný prostor.

15·4. Nechť P je metrický prostor. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť A_n je topologicky úplný prostor vnořený do P. Pak $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ je topologicky úplný prostor.

15·5. Nechť P a Q jsou topologicky úplné prostory. Pak $P \times Q$ je topologicky úplný prostor.

15·6. Absolutně otevřený prostor (srov. obdobné definice v odst. **15·5**) je prázdný.

15·7. Nechť P je úplný prostor. Nechť $Q \subset P$. Pak $\overline{Q}$ jest úplný obal prostoru Q.

15·8. Nechť P je topologicky úplný prostor. Nechť množina A jest uzavřená a prvé kategorie v P. Pak A je řídká v P.

15·9. Nechť P je topologicky úplný prostor. Nechť množiny A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou $\mathbf{G}_\delta(P)$ a husté v P. Pak množina $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ je hustá v P.

15·10. Prostory ve cvičeních *6·5*, *7·2* a *7·4* jsou úplné.

15·11. V důkaze věty **15·6·1** jest $P_0 = P_2 \,.\, \varphi_2(Q_2)$, $Q_0 = Q_2 \,.\, \varphi_1(P_2)$.

15·12. Ve větě **15·6·1** můžeme voliti: $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[0 < t < 1] + \underset{t}{\mathrm{E}}[1 < t < 2] + \underset{t}{\mathrm{E}}[2 < t < 3] = Q$, $f(t) = 1 - t$ pro $0 < t < 1$, $f(t) = 3 - t$ pro $1 < t < 2$, $f(t) = t$ pro $2 < t < 3$, $P_1 = Q_1 = P + (0) + (1) + (2) + (3)$. Pak je v důkaze cit. věty: $P_2 = P + (0) + (3) = Q_2$, $P_0 = P + (3) = Q_0$.

15·13. Nechť P je topologicky úplný prostor. Nechť f je funkce první třídy v oboru P. Nechť $Q \neq \emptyset$ je $\mathbf{G}_\delta(P)$. Pak existuje bod $x \in Q$, ve kterém parciální funkce f_Q je spojitá.

15·14. Nechť f je funkce v oboru $\mathbf{E}_1$. Nechť C je množina všech $x \in \mathbf{E}_1$, ve kterých f je spojitá. Pak C není množina všech racionálních čísel. (Dokáže se podle **13·4**; porovnejme dokazovanou větu s výsledkem cvič. *9·2*.)

15·15. Pro $x \in \mathbf{E}_1$ položme $f(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} \cos^{2n} m!\, \pi x$. Funkce f je všude nespojitá. Tedy není prvé třídy.

*15·16.** Množina všech členů cauchyovské posloupnosti je omezená.

§ 16. Separabilní prostory.

16·1. *Otevřenou basí* metrického prostoru P nazveme systém $\mathfrak{B}$ otevřených podmnožin prostoru P takový, že ke každému okolí U kteréhokoli bodu $x \in P$ existuje okolí V bodu x takové, že $V \in \mathfrak{B}$, $V \subset U$.

16·1·1. *Nechť $\mathfrak{B}$ je systém podmnožin metrického prostoru P. $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru P, když a jen když:* [1] *každá množina systému $\mathfrak{B}$ jest otevřená;* [2] *ke každé otevřené množině $G \subset P$, $G \neq \emptyset$ existuje systém* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ takový, že $G = \sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X$.

Důkaz. I. Nechť systém $\mathfrak{B}$ má vlastnosti [1] a [2]. Nechť U jest okolí bodu $x \in P$. Pak existuje systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ takový, že $U = \sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X$. Ježto $x \in U$, existuje množina $V \in \mathfrak{A}$ taková, že $x \in V$. Množina V jest okolí bodu x a jest $V \subset U$.

II. Nechť $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru P. Nechť $G \subset P$ jest otevřená množina $\neq \emptyset$. Ježto $G \neq \emptyset$, existuje bod $a \in G$. G jest okolí bodu a, takže existuje množina $H \in \mathfrak{B}$ taková, že $a \in H \subset G$. Tedy $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, je-li $\mathfrak{A}$ systém všech $X \in \mathfrak{B}$ takových, že $X \subset G$. Zřejmě $\sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X \subset G$. Nechť $x \in G$. G jest okolí bodu a, takže existuje množina $U \in \mathfrak{B}$ taková, že $x \in U \in \mathfrak{B}$. Jest $U \in \mathfrak{A}$, tedy $x \in \sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X$, t. j. $G \subset \sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X$. Tedy $G = \sum\limits_{X \in \mathfrak{A}} X$.

Separabilní (*separabel*, *séparable*, *separable*) prostor je metrický prostor mající (aspoň jednu) spočetnou otevřenou basi. To je zřejmě topologická vlastnost.

16·1·2. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť $Q \subset P$. Pak Q je separabilní.*

Důkaz. Když $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru P a když každou množinu $X \in \mathfrak{B}$ nahradíme množinou $Q . X$, obdržíme systém $\mathfrak{B}_0$. Z **8·7·5** následuje snadno, že $\mathfrak{B}_0$ jest otevřená base prostoru Q. Je-li systém $\mathfrak{B}$ spočetný, zřejmě také systém $\mathfrak{B}_0$ je spočetný.

16·1·3. *Metrický prostor P je separabilní, když a jen když existuje spočetná množina A hustá v P.*

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{B}$ je spočetná otevřená base prostoru P. V každém neprázdném $X \in \mathfrak{B}$ zvolme po jednom bodě. Nechť A je množina všech zvolených bodů. Pak A je spočetná množina. Je-li $G \neq \emptyset$ a otevřená, zvolme $x \in G$. Ježto $\mathfrak{B}$ je base, existuje $U \in \mathfrak{B}$ taková, že $x \in U \subset G$. Je-li $a \in A$ bod zvolený v U, jest $a \in AU \subset AG$. Tedy $AG \neq \emptyset$ pro každou otevřenou $G \neq \emptyset$, takže množina A je hustá podle **12·1·2.**
II. Nechť A je spočetná množina hustá v P. Nechť $\mathfrak{B}$ je systém všech $\Omega(a, r)$, kde a probíhá všecky body množiny A a r probíhá všecka kladná racionální čísla. Z **3·5·2** a **3·6** soudíme snadno, že systém $\mathfrak{B}$ je spočetný. Z **8·6·1** soudíme snadno, že $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru P.

16·1·4. *Hilbertův prostor* H *je separabilní.*

Důkaz. Nechť A je množina všech $r = \{r_n\}_1^\infty$ takových, že: [1] každé r_n je racionální číslo; [2] existuje index p takový, že $r_n = 0$ pro všecka $n > p$. Zřejmě $A \subset \mathsf{H}$. Nechť $x = \{x_n\}_1^\infty \in \mathsf{H}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje index p takový, že $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} x_n{}^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Pro $1 \leqq n \leqq p$ existují racionální čísla r_n taková, že $\sum\limits_{n=1}^{p} (x_n - r_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$; pro $n > p$ položme $r_n = 0$. Je-li $r = \{r_n\}_1^\infty$, jest $r \in A$, $\varrho(x, r) < \varepsilon$. Tedy $\varrho(x, A) < \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, je $\varrho(x, A) = 0$, t. j. $x \in \overline{A}$. Tedy $\overline{A} = \mathsf{H}$, t. j. množina A je hustá v H. Avšak A je spočetná podle cvič. *3·1* a *3·14*.

16·1·5. *Euklidovský prostor* E_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *je separabilní.*

Důkaz. Nechť Q_m je množina těch bodů $x = \{x_n\}_1^\infty \in \mathsf{H}$, pro které: $n > m \Rightarrow x_n = 0$. Q_m je separabilní podle **16·1·2** a **16·1·4.** Zřejmě prostory E_m a Q_m jsou isometrické, takže také E_m je separabilní.

16·1·6. *Nechť P je metrický prostor. Nechť každému $\delta > 0$ lze přiřaditi spočetnou množinu $A(\delta) \subset P$ tak, že $\varrho[x, A(\delta)] < \delta$ pro každý $x \in P$. Pak P je separabilní.*

Důkaz. Nechť $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right)$. Podle **3·6** množina B je spočetná. Pro každý bod $x \in P$ je $\varrho(x, B) \leqq \varrho\left[x, A\left(\frac{1}{n}\right)\right] < \frac{1}{n}$, tedy $\varrho(x, B) = 0$, t. j. $x \in \overline{B}$. Tedy $\overline{B} = P$, t. j. množina B je hustá, takže P je separabilní podle **16·1·3.**

16·1·7. *Nechť P je metrický prostor. Nechť existuje číslo $\delta > 0$ a nespočetná množina $A \subset P$ taková, že*

$$x \in A,\ y \in A,\ x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) > \delta.$$

Pak prostor P není separabilní.

Poznámka. Tato věta jest užitečná jako kriterium, že daný prostor není separabilní. Její obrácení je správné, dá se však odvoditi pouze z věty (v této knize nedokázané, v. **4·3**), že množinu P lze dobře uspořádati.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{B}$ je otevřená base prostoru P. Pro každý $x \in A$ existuje množina $B(x) \in \mathfrak{B}$ taková, že $x \in B(x) \subset \Omega(x, \delta)$. Když $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$, jest $y \in B(y)$, ale nikoli $x \in B(y)$, tedy $B(x) \neq B(y)$. Ježto množina A je nespočetná, systém všech $B(x)$ je nespočetný. Tím spíše systém $\mathfrak{B}$ je nespočetný.

16·2. 16·2·1. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť $\mathfrak{A}$ je disjunktní systém množin otevřených v P. Pak systém $\mathfrak{A}$ je spočetný.*

Důkaz. Podle **16·1·3** existuje spočetná hustá množina A. Podle **12·1·2** v každé množině $G \in \mathfrak{A}$ — vyjma jedině množinu $G = \emptyset$, která také může patřiti do $\mathfrak{A}$ — můžeme zvoliti bod $\varphi(G) \in AG$. Množina všech bodů $\varphi(G)$ je spočetná podle **3·4·1**. Ježto systém $\mathfrak{A}$ je disjunktní, jest $\varphi(G_1) \neq \varphi(G_2)$ pro $G_1 \neq G_2$. Tedy také systém $\mathfrak{A}$ je spočetný.

16·2·2. *Nutná a postačující podmínka, aby metrický prostor P byl separabilní, jest: Ke každému systému $\mathfrak{A}$ otevřených množin takovému, že $\sum_{X \in \mathfrak{A}} X = P$, existuje spočetný systém $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ takový, že $\sum_{X \in \mathfrak{A}_0} X = P$.*

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $\mathfrak{S}_n$ je systém všech $\Omega\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$, kde $x \in P$. Existuje spočetný systém $\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{S}_n$ takový, že $\sum_{X \in \mathfrak{T}_n} X = P$. Položme $\mathfrak{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{T}_n$. Pak $\mathfrak{B}$ je spočetný (v. **3·6**) systém otevřených množin. Stačí dokázati, že $\mathfrak{B}$ jest otevřená base prostoru P, t. j. že k danému okolí U daného bodu $a \in P$ existuje množina $V \in \mathfrak{B}$ taková, že $a \in V \subset U$. Existuje číslo $r > 0$ takové, že $\Omega(a, r) \subset U$. Zvolme index $n > \dfrac{2}{r}$. Ježto $\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{S}_n$, $\sum_{X \in \mathfrak{T}_n} X = P$, existuje bod $b \in P$ takový, že $\Omega\left(b, \dfrac{1}{n}\right) \in \mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{B}$ a $a \in \Omega\left(b, \dfrac{1}{n}\right)$. Pak

$$x \in \Omega\left(b, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \varrho(b, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \varrho(a, x) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, x) \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{n} < r \Rightarrow x \in \Omega(a, r) \subset U,$$

tedy $\Omega\left(b, \dfrac{1}{n}\right) \subset U$. Avšak $\Omega\left(b, \dfrac{1}{n}\right) \in \mathfrak{B}$.

II. Nechť P je separabilní. Nechť $\mathfrak{A}$ je systém otevřených množin takový, že $\sum_{X \in \mathfrak{A}} X = P$. Nechť $\mathfrak{B}$ je spočetná base prostoru P. Každému $x \in P$ můžeme přiřaditi množinu $A_x \in \mathfrak{A}$ tak, že $x \in A_x$; na to lze zvoliti množinu $B_x \in \mathfrak{B}$ tak, že $x \in B_x \subset A_x$. Zřejmě $\sum_{x \in P} B_x = P$. Ježto systém $\mathfrak{B}$ je spočetný, existuje spočetná množina $C \subset P$ taková, že $\sum_{x \in C} B_x = \sum_{x \in P} B_x$, t. j. $\sum_{x \in C} B_x = P$. Ježto $A_x \supset B_x$, je také $\sum_{x \in C} A_x = P$. Tedy systém $\mathfrak{A}_0$ všech A_x, kde $x \in C$, je spočetný systém takový, že $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, $\sum_{X \in \mathfrak{A}_0} X = P$.

16·2·3. *Nutná a postačující podmínka, aby metrický prostor P byl separabilní, jest: Každá otevřená base obsahuje spočetnou otevřenou basi.*

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Ježto existuje aspoň jedna otevřená base (totiž systém všech otevřených množin), existuje spočetná otevřená base, t. j. P je separabilní.

II. Nechť P je separabilní. Nechť $\mathfrak{B}$ je spočetná otevřená base. Nechť $\mathfrak{A}$ je libovolně daná otevřená base. Je-li dán bod $x \in P$ a index $n = 1, 2, 3, \ldots$, existuje množina $A_n(x) \in \mathfrak{A}$ taková, že $x \in A_n(x) \subset \subset \Omega\left(x, \frac{1}{n}\right)$, dále množina $B_n(x) \in \mathfrak{B}$ taková, že $x \in B_n(x) \subset A_n(x)$. Ježto systém $\mathfrak{B}$ je spočetný, pro každé n existuje spočetná množina $C_n \subset P$ taková, že $\sum_{x \in C_n} B_n(x) = \sum_{x \in P} B_n(x)$, t. j. $\sum_{x \in C_n} B_n(x) = P$. Ježto $B_n(x) \subset A_n(x)$, je $\sum_{x \in C_n} A_n(x) = P$. Nechť $\mathfrak{A}_0$ je systém všech $A_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots;\ x \in C_n)$. Pak jest $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ a systém $\mathfrak{A}_0$ je spočetný podle **3·4·1** a **3·6.** Stačí dokázati, že systém $\mathfrak{A}_0$ jest otevřená base, t. j. že k danému okolí U daného bodu $a \in P$ existuje množina $V \in \mathfrak{A}_0$ taková, že $a \in V \subset U$. Existuje číslo $r > 0$ takové, že $\Omega(a, r) \subset U$. Zvolme index $n > \frac{2}{r}$. Ježto $\sum_{x \in C_n} A_n(x) = P$, existuje bod $b \in C_n$ takový, že $a \in A_n(b)$. Jest $A_n(b) \subset \Omega\left(b, \frac{1}{n}\right)$, tedy $\varrho(a, b) < \frac{1}{n}$,

$$x \in \Omega\left(b, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \varrho(b, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \varrho(a, x) \leqq \varrho(a, b) + \varrho(b, x) < \frac{2}{n} < r,$$

tedy $\Omega\left(b, \frac{1}{n}\right) \subset \Omega(a, r) \subset U$. Tedy $a \in A_n(b) \subset U$. Ježto $b \in C_n$, je $A_n(b) \in \mathfrak{A}_0$.

16·3. 16·3·1. *Nechť P je nespočetný separabilní prostor. Nechť Q je množina těch $x \in P$, jejichž každé okolí je nespočetné. Pak:* [1] *množina $P - Q$ je spočetná, tedy množina Q je nespočetná,* [2] *množina Q je hustě rozložená.*

Důkaz. I. Každému $x \in P - Q$ lze přiřaditi spočetné okolí $U(x)$. Množiny $U(x) - Q$ jsou (v. **8·7·5**) otevřené v $P - Q$ a jest $\sum_{x \in P - Q} [U(x) - Q] = P - Q$. Avšak $P - Q$ je separabilní prostor podle **16·1·2**. Tedy podle **16·2·2** existuje spočetná množina $A \subset P - Q$ taková, že $\sum_{x \in P - Q}[U(x) - Q] = \sum_{x \in A} [U(x) - Q]$, t. j. $\sum_{x \in A} [U(x) - Q] = P - Q$. Tedy množina $P - Q$ je spočetná podle **3·6**. Q je nespočetná, neboť jinak by i množina $P = (P - Q) + Q$ byla spočetná.

II. Když $x \in Q$ a $\varepsilon > 0$, pak množina $\Omega(x, \varepsilon)$ jest okolí bodu x a je tudíž nespočetná. Ježto množina $P - Q$ je spočetná, množina $Q \,.\, \Omega(x, \varepsilon) = \Omega(x, \varepsilon) - (P - Q)$ je nespočetná. Tedy existuje $y \in Q$, $y \neq x$, $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Tedy x není isolovaný bod množiny Q. Tedy Q je hustě rozložená.

16·3·2. *Řídce rozložený separabilní prostor P je spočetný.*

Důkaz. Kdyby P byl nespočetný, obsahoval by podle **16·3·1** hustě rozloženou množinu Q.

16·4. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť neprázdný systém $\mathfrak{A}$ množin uzavřených v P má následující vlastnost: Když pro $p = 1, 2, 3, \ldots$ je $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$, pak $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Pak existuje v systému $\mathfrak{A}$ aspoň jedna minimální množina M, t. j. taková, že $A \in \mathfrak{A}$, $A \subset M \Rightarrow A = M$.*

Důkaz. Nechť $\{B_n\}_1^{\infty}$ je posloupnost, jejíž členy tvoří (spočetnou) otevřenou basi $\mathfrak{B}$ prostoru P. Zvolme množinu $A_1 \in \mathfrak{A}$ libovolně. Když (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$) je již zvolena množina $A_n \in \mathfrak{A}$, zvolme množinu $A_{n+1} \in \mathfrak{A}$, *je-li to možné*, tak, že $A_{n+1} \subset A_n - B_n$; není-li to možné, zvolme $A_{n+1} = A_n$. Pak jest vždy $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_{n+1} \subset A_n$, tedy $M = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Dokažme, že M je minimální v $\mathfrak{A}$. Nechť naopak existuje množina $C \in \mathfrak{A}$ taková, že $C \subset M \neq C$. Zvolme bod $a \in M - C$. Množina $P - C$ jest okolí bodu a; ježto $\mathfrak{B}$ jest otevřená base, existuje index n takový, že $a \in B_n \subset P - C$. Jest $C \in \mathfrak{A}$, $C \subset M - B_n \subset A_n - B_n$; tedy $A_{n+1} \subset A_n - B_n$, takže: $a \in B_n \Rightarrow a \in P - A_{n+1}$. To je spor, neboť $a \in M \subset A_{n+1}$. (Dokázané větě se říká *Brouwerova redukční věta*).

16·5. *Metrický prostor P je separabilní, když a jen když existuje bodová množina Q vnořená do Urysohnova prostoru* $\mathbf{U}$ *a homeomorfní s P.*

Důkaz. I. Ježto $\mathbf{U} \subset \mathbf{H}$, podle **16·1·2** a **16·1·4** prostor Q vnořený do $\mathbf{U}$ je separabilní, tedy i prostor P homeomorfní s Q je separabilní.

II. Nechť P je separabilní. Mohu předpokládati, že $P \neq \emptyset$. Podle **16·1·3** existuje spočetná množina A hustá v P. Nechť T je množina všech trojic (a, r, s), kde $a \in A$ a r a s jsou racionální čísla taková, že $0 < r < s$. Zřejmě (v. **3·5·2** a **3·6**) T je spočetná množina $\neq \emptyset$, takže T můžeme sestaviti v posloupnost $\{(a_n, r_n, s_n)\}_1^{\infty}$. Pro $x \in P$ a $n = 1, 2, 3, \ldots$ položme

$$f_n(x) = \frac{\varrho[x, \Omega(a_n, r_n)]}{\varrho[x, \Omega(a_n, r_n)] + \varrho[x, P - \Omega(a_n, s_n)]}, \tag{1}$$

když $\Omega(a_n, s_n) \neq P$,

$$f_n(x) = 0, \text{ když } \Omega(a_n, s_n) = P.$$

Jmenovatel na pravo v (1) mohl by býti roven nule jen v případě $x \in \overline{\Omega(a_n, r_n)} - \Omega(a_n, s_n)$; tu by však bylo současně $\varrho(a_n, x) \leqq r_n$ a $\varrho(a_n, x) \geqq s_n$, což je nemožné, ježto $r_n < s_n$. Tedy f_n je konečná spojitá (v. cvič. *9·10*) funkce v oboru P. Zřejmě: [1] $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_n(x) \leqq 1$, takže $\left\{\frac{1}{n} f_n(x)\right\}_1^\infty \in \mathsf{U}$; [2] $\varrho(a_n, x) < r_n \Rightarrow f_n(x) = 0$; [3] $\varrho(a_n, x) > s_n \Rightarrow f_n(x) = 1$. Položme

$$F(x) = \left\{\frac{1}{n} f_n(x)\right\}_1^\infty \text{ a } F(P) = Q.$$

Pak F je zobrazení prostoru P na prostor $Q \subset \mathsf{U}$. Dokážeme, že F je homeomorfní, t. j. že: [1] F je prosté, [2] F je spojité, [3] F_{-1} je spojité.

Nechť $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$. Ježto množina A je hustá v P, existuje $a \in A$ takový, že $\varrho(a, x) < \frac{1}{2}\varrho(x, y)$. Ježto $\varrho(x, y) \leqq \varrho(a, x) + \varrho(a, y)$, jest $\varrho(a, y) > \varrho(a, x)$. Tedy existují racionální čísla r, s taková, že $0 \leqq \varrho(a, x) < r < s < \varrho(a, y)$. Existuje index n takový, že $a = a_n$, $r = r_n$, $s = s_n$. Jest $f_n(x) = 0$, $f_n(y) = 1$, tedy $f_n(x) \neq f_n(y)$, tedy $F(x) \neq F(y)$. Tedy zobrazení F je prosté.

Nechť $x_i \in P$, $x \in P$, $x_i \to x$. Ježto funkce f_n jsou spojité, pro každé n jest $\lim_{i \to \infty} f_n(x_i) = f_n(x)$, takže podle **7·3·1** jest $\lim_{i \to \infty} F(x_i) = F(x)$. Tedy zobrazení F je spojité.

Nechť $x_i \in P$, $x \in P$, $\lim_{i \to \infty} F(x_i) = F(x)$. Podle **7·3·1** pro každý index n jest $\lim_{i \to \infty} f_n(x_i) = f_n(x)$. Předpokládejme, že není $\lim_{i \to \infty} x_i = x$. Pak existuje číslo $\varepsilon > 0$ a nekonečná množina M indexů i taková, že: $i \in M \Rightarrow \varrho(x_i, x) > \varepsilon$. Ježto A je hustá v P, existuje $a \in A$ takový, že $\varrho(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ježto: $i \in M \Rightarrow \varepsilon < \varrho(x_i, x) \leqq \varrho(a, x_i) + \varrho(a, x)$, platí: $i \in M \Rightarrow \varrho(a, x_i) > \frac{\varepsilon}{2}$. Existují racionální čísla r, s taková, že $0 \leqq \varrho(a, x) < r < s < \frac{\varepsilon}{2}$. Existuje index n takový, že $a = a_n$, $r = r_n$, $s = s_n$. Pak je $\varrho(a_n, x) < r_n$ a pro $i \in M$ je $\varrho(a_n, x_i) > s_n$, takže je $f_n(x) = 0$ a pro $i \in M$ je $f_n(x_i) = 1$. Ježto množina M je nekonečná, není $\lim_{i \to \infty} f_n(x_i) = f_n(x)$, což je spor. Tedy jest $\lim_{i \to \infty} x_i = x$. Tedy zobrazení F_{-1} je spojité.

16·6. 16·6·1. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť ε je kladné číslo. Nechť f je konečná funkce v oboru P. Nechť lze každému bodu $a \in P$ přiřaditi číslo $\delta^{(a)} > 0$ a konečnou funkci první třídy $\varphi^{(a)}$ v oboru $\Omega(a, \delta^{(a)})$ tak, že $|\varphi^{(a)}(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všecky $x \in \Omega(a, \delta^{(a)})$. Pak existuje konečná funkce φ první třídy v oboru P taková, že $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všecky $x \in P$.*

Důkaz. Množiny $\Omega(a, \delta^{(a)})$ jsou otevřené a jest $\sum_{a \in P} \Omega(a, \delta^{(a)}) = P$. Tedy podle **16·2·2** existují (vyloučíme-li triviální případ $P = \emptyset$) posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ a $\{\delta_n\}_1^\infty$ takové, že $a_n \in P$, $\delta_n = \delta^{(a_n)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \Omega(a_n, \delta_n) = P$.

Položme $\varphi_n = \varphi^{(a_n)}$, $A_1 = \Omega(a_1, \delta_1)$, $A_{n+1} = \Omega(a_{n+1}, \delta_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \Omega(a_i, \delta_i)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Množiny A_n jsou F_σ (v. **13·3·2**, **13·3·4** a **13·3·5**) a jest $P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci. Tedy existuje konečná funkce φ v oboru P taková, že $x \in A_n \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_n(x)$. Zřejmě $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro všecky $x \in P$. Tedy stačí dokázati, že φ je funkce prvé třídy.

Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Jest

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > c] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in \Omega(a_n, \delta_n),\ \varphi_n(x) > c].$$

Ježto φ_n je funkce prvé třídy v oboru $\Omega(a_n, \delta_n)$, podle **14·3·1** množina $B_n = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in \Omega(a_n, \delta_n),\ \varphi_n(x) > c]$ jest $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a_n, \delta_n)]$. Množina $\Omega(a_n, \delta_n)$ jest otevřená v P, tedy je to $\mathsf{F}_\sigma(P)$ podle **13·3·5.** Tedy B_n je $\mathsf{F}_\sigma(P)$ podle cvič. *13·10.* Tedy $A_n B_n$ je $\mathsf{F}_\sigma(P)$ podle **13·3·4**, takže $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > c] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n$ je $\mathsf{F}_\sigma(P)$ podle **13·3·3.** Podobně se ukáže, že $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) < c]$ je $\mathsf{F}_\sigma(P)$. Tedy φ je funkce prvé třídy podle **14·3·1.**

16·6·2. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť f je funkce v oboru P s následující vlastností: v každé neprázdné uzavřené množině $A \subset P$ existuje aspoň jeden bod, ve kterém parciální funkce f_A je spojitá. Pak f je funkce prvé třídy.*

Důkaz. I. Předpokládejme nejprve, že funkce f je konečná. Stačí dokázati, že každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi konečnou funkci F_ε prvé třídy tak, aby bylo $|f(x) - F_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Neboť potom f je stejnoměrná limita posloupnosti $\{F_{\frac{1}{n}}\}$, takže podle **14·2·1** f je funkce prvé třídy.

Předpokládejme, že při určitém $\varepsilon > 0$ funkce F_ε neexistuje. Označme G množinu těch $a \in P$, k nimž existuje číslo $\delta^{(a)} > 0$ a konečná funkce $\varphi^{(a)}$ prvé třídy v oboru $\Omega(a, \delta^{(a)})$ taková, že $|f(x) - \varphi^{(a)}(x)| < \varepsilon$ pro každý $x \in \Omega(a, \delta^{(a)})$. Je-li $a \in G$, pak, jak se lehko odvodí, jest

$\Omega(a, \delta^{(a)}) \subset G$. Tedy $G = \sum_{a \in G} \Omega(a, \delta^{(a)})$, takže množina G jest otevřená. Ježto předpokládáme, že F_ε neexistuje, podle **16·6·1** jest $G \neq P$. Tedy $P - G$ je neprázdná uzavřená množina, takže podle předpokládané vlastnosti funkce f existuje bod $a \in P - G$, ve kterém parciální funkce $(f)_{P-Q}$ je spojitá. Ježto funkce $(f)_{P-Q}$ je konečná a spojitá v bodě a, existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro každý $x \in (P - G) . \Omega(a, \delta)$.

Podle **16·1·2** G je separabilní prostor. $(f)_G$ je konečná funkce v oboru G. Podle definice množiny G a podle věty **16·6·1**, ve které prostor P nahradíme prostorem G, existuje konečná funkce ψ prvé třídy v oboru G taková, že $|f(x) - \psi(x)| < \varepsilon$ pro každý $x \in G$.

Definujme konečnou funkci φ v oboru $\Omega(a, \delta)$ takto: Když $x \in G . \Omega(a, \delta)$, nechť $\varphi(x) = \psi(x)$; když $x \in (P - G) . \Omega(a, \delta)$, nechť $\varphi(x) = f(a)$; tedy $x \in \Omega(a, \delta) \Rightarrow |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$. Stačí dokázati, že φ je funkce prvé třídy v oboru $\Omega(a, \delta)$;; neboť pak z definice množiny G následuje, že $a \in G$, což je spor.

Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Ježto ψ je funkce prvé třídy v oboru G, parciální funkce $(\psi)_{G . \Omega(a, \delta)}$ je prvé třídy v oboru $G . \Omega(a, \delta)$, takže podle **14·3·1** množina

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in G . \Omega(a, \delta), \psi(x) > c] \tag{1}$$

je $\mathsf{F}_\sigma(G . \Omega(a, \delta))$. Avšak množina $G . \Omega(a, \delta)$ jest otevřená v $\Omega(a, \delta)$, tedy je to $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$ podle **13·3·5**, takže množina (1) je také $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$ podle cvič. *13·10*.

Když $c \geqq f(a)$, jest

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in \Omega(a, \delta), \varphi(x) > c] = \mathop{\mathrm{E}}_x[x \in G . \Omega(a, \delta), \psi(x) > c],$$

takže $\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in \Omega(a, \delta), \varphi(x) > c]$ je $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$. Když $c < f(a)$, jest

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in \Omega(a, \delta), \varphi(x) > c] = \mathop{\mathrm{E}}_x[x \in G . \Omega(a, \delta), \psi(x) > c] + \\ + (P - G) . \Omega(a, \delta) \tag{2}$$

a prvý sčítanec je $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$. Množina $(P - G) . \Omega(a, \delta)$ je uzavřená v $\Omega(a, \delta)$, tedy podle **13·3·2** je to $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$. Tedy podle (2) a **13·3·3** množina $\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in \Omega(a, \delta), \varphi(x) > c]$ je $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$.

Stejně se dokáže, že pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina $\mathop{\mathrm{E}}_x[x \in \Omega(a, \delta), \varphi(x) < c]$ je $\mathsf{F}_\sigma[\Omega(a, \delta)]$. Tedy podle **14·3·1** φ je funkce prvé třídy v oboru $\Omega(a, \delta)$.

II. Zbývá případ, kdy funkce f není konečná. Podle cvič. *9·18* existuje homeomorfní zobrazení φ množiny R na interval $\mathop{\mathrm{E}}_t[-1 \leqq t \leqq 1]$. Položme $F(x) = \varphi[f(x)]$. Pak F je konečná funkce v oboru P. Když množina $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, jest uzavřená, existuje bod $a \in A$ takový, že parciální funkce f_A je spojitá v a. Zřejmě i funkce $(F)_A$ je spojitá v a. Podle I funkce F je prvé třídy. Ježto $f(x) = \varphi_{-1}[F(x)]$, také f je funkce prvé třídy.

16·6·3. *Nechť P je topologicky úplný separabilní prostor. Nutná a postačující podmínka, aby funkce f v oboru P byla prvé třídy, jest: V každé neprázdné uzavřené množině $A \subset P$ existuje aspoň jeden bod, ve kterém parciální funkce f_A je spojitá.**)

Důkaz. I. Podmínka stačí podle **16·6·2.**

II. Nechť je f funkce prvé třídy v oboru P. Nechť $A \subset P$, $A \neq 0$ jest uzavřená množina. Podle **13·2** a **15·5·3** A je topologicky úplný prostor. Nechť C je množina těch $x \in A$, ve kterých funkce f_A je spojitá. f_A je funkce prvé třídy v oboru P, takže podle **15·8·3** množina C je hustá v A. Ježto $A \neq \emptyset$, je $C \neq \emptyset$.

16·6·4. *Spočetný metrický prostor P je topologicky úplný, když a jen když je řídce rozložený.*

Důkaz. I. Nechť P je spočetný topologicky úplný prostor. Předpokládejme, že P není řídce rozložený. Nechť Q je jeho jádro (v. **11·1**). Pak $Q \neq \emptyset$, $Q = \overline{Q}$ a Q je hustě rozložená, t. j. nemá isolovaných bodů. Podle **13·2** a **15·5·3** Q je topologicky úplný prostor. Ježto Q je spočetná a nemá isolovaných bodů, podle cvič. *12·13* Q je prvé kategorie v Q, což odporuje větě **15·8·2.**

II. Nechť P je spočetný řídce rozložený prostor. Nechť P_0 je jeho úplný obal (v. **15·4·1**). Ježto P je hustá v P_0, P_0 je separabilní podle **16·1·3.** Definujme funkci f v oboru P_0 takto: $x \in P \Rightarrow f(x) = 1$, $x \in P_0 - P \Rightarrow f(x) = 0$. Nechť množina A jest uzavřená v P_0 a neprázdná. Když $AP = \emptyset$, parciální funkce f_A je spojitá (neboť je to konstanta). Když $AP \neq \emptyset$, ježto P je řídce rozložená, existuje isolovaný bod a množiny AP. Existuje $\delta > 0$ takové, že $x \in AP$, $\varrho(a, x) < 2\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a$. Když a jest isolovaný bod množiny A, pak f_A zřejmě je spojitá v bodě a. V opačném případě existuje bod $b \in A$ takový, že $a \neq b$, $\varrho(a, b) = \delta_1 < \delta$. Je-li $x \in A$ a $\varrho(b, x) < \varrho(a, b)$, jest $\varrho(a, x) \leqq \varrho(a, b) +$ $+ \varrho(b, x) < 2\varrho(a, b) < 2\delta$ a mimo to $x \neq a$, takže podle volby čísla δ není $x \in AP$. Tedy $A \,.\, \Omega(b, \delta_1) \subset P_0 - P$, takže $x \in A \,.\, \Omega(b, \delta_1) \Rightarrow$

*) Tuto nutnou a postačující podmínku lze nahraditi ještě několika jinými. Nechť P je topologicky úplný separabilní prostor. Nechť f je funkce v oboru P. Pro $A \subset P$ nechť S_A je množina oněch $x \in A$, v nichž parciální funkce f_A je spojitá; položme ještě $D_A = A - S_A$. Potom každá z následujících podmínek [1], [2], [3], [4] je nutná a postačující k tomu, aby f byla prvé třídy:

[1] Pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $A \subset P$ je $S_A \neq \emptyset$.

[2] Pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $A \subset P$ je S_A husté v A.

[3] Pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $A \subset P$ je D_A prvé kategorie v A.

[4] Pro každou množinu $A \subset P$ je D_A prvé kategorie v A.

Důkaz. Podle **16·6·3** stačí dokázati, že podmínky [1], [2], [3], [4] jsou ekvivalentní, t. j. že [1] $\Rightarrow$ [4] $\Rightarrow$ [3] $\Rightarrow$ [2] $\Rightarrow$ [1]. Platí-li [1], je f prvé třídy podle **16·6·3,** tedy podle **14·5·3** (viz poznámku pod čarou k větě **14·5·2**) platí [4]. Zřejmě [4] $\Rightarrow$ [3]. Platí-li [3], platí též [2] podle **13·2, 15·5·3, 15·8·2.** Konečně je zřejmě [2] $\Rightarrow$ 1.

$\Rightarrow f(x) = 0$, takže f_A je spojitá v bodě b. Tedy ve všech případech existuje bod $\alpha \in A$, ve kterém f_A je spojitá. Ježto P_0 je separabilní prostor, podle **16·6·2** f je funkce prvé třídy, takže podle **14·3** množina $P = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \geqq 1]$ je $\mathbf{G}_\delta(P_0)$. Ježto P_0 jest úplný, P je topologicky úplný podle **15·5·2**.

16·7. *Nechť P je separabilní prostor. Nechť $A_n \subset P$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Z posloupnosti $\{A_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{C_n\}$ takovou, že existuje* $\operatorname{Lim} C_n$ (v. **8·8**).

Důkaz. Ježto P je separabilní, existuje posloupnost $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž členy tvoří otevřenou basi prostoru P. Položme $A_n^{(0)} = A_n$. Když při určitém i $(= 1, 2, 3, \ldots)$ byla zvolena posloupnost $\{A_n^{(i-1)}\}_{n=1}^{\infty}$, vyberme z ní, *je-li to možné*, posloupnost $\{A_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby bylo $B_i \,.\, \operatorname{Lim}_{n\to\infty} A_n^{(i)} = \emptyset$; není-li to možné, položme $A_n^{(i)} = A_n^{(i-1)}$ pro všecka n. Položme $C_n = A_n^{(n)}$, takže posloupnost $\{C_n\}$ je vybrána z $\{A_n\}$. Máme dokázati, že existuje $\operatorname{Lim} C_n$. Předpokládejme opak, tedy $\underline{\operatorname{Lim}}\, C_n \subset$ $\subset \overline{\operatorname{Lim}}\, C_n \neq \underline{\operatorname{Lim}}\, C_n$, takže existuje bod

$$x \in \overline{\operatorname{Lim}}\, C_n - \underline{\operatorname{Lim}}\, C_n.$$

Podle cvič. *8·16* není $\varrho(x, C_n) \to 0$. Tedy existuje číslo $\delta > 0$ a indexy $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ takové, že $\varrho(x, C_{j_n}) > \delta$ pro všecka n. Když $\varrho(x, y) < \delta$, podle cvič. *6·6* jest $\varrho(y, C_{j_n}) > \delta - \varrho(x, y) > 0$ pro všecka n, takže podle cvič. *8·16* není $y \in \overline{\operatorname{Lim}}\, C_{j_n}$. Tedy $\Omega(x, \delta) \,.\, \overline{\operatorname{Lim}}\, C_{j_n} = \emptyset$. Ježto $\Omega(x, \delta)$ jest okolí bodu x, podle definice posloupnosti $\{B_n\}$ existuje index i takový, že $x \in B_i \subset \Omega(x, \delta)$, tedy $B_i \,.\, \overline{\operatorname{Lim}}\, C_{j_n} = \emptyset$. Pro $n \geqq$ $\geqq i - 1$ jest $j_n \geqq i - 1$, takže $C_{j_n} = A_{j_n}^{(j_n)}$ náleží do posloupnosti $\{A_n^{(i-1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Tedy z $\{A_n^{(i-1)}\}$ lze vybrati posloupnost $\{C_{j_n}\}_{n=i}^{\infty}$ tak, že množina B_i neobsahuje žádný bod z horní limity posloupnosti vybrané. Tedy $B_i \,.\, \overline{\operatorname{Lim}}\, A_n^{(i)} = \emptyset$. Ježto posloupnost $\{C_n\}_{n=i}^{\infty}$ je vybrána z posloupnosti $\{A_n^{(i)}\}$, podle cvič. *8·20* jest $\overline{\operatorname{Lim}}\, C_n \subset \overline{\operatorname{Lim}}\, A_n^{(i)}$, tedy $B_i \,.$ $.\, \overline{\operatorname{Lim}}\, C_n = \emptyset$. To je spor, neboť $x \in B_i \,.\, \overline{\operatorname{Lim}}\, C_n$.

Cvičení.

16·1. Nechť množina A je hustá v metrickém prostoru P. Nechť A je separabilní prostor. Pak P je separabilní.

16·2. Nechť A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou separabilní prostory vnořené do metrického prostoru P. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = P$. Pak P je separabilní.

16·3. Nechť A je separabilní prostor vnořený do metrického prostoru P. Pak uzávěr $\overline{A}$ a derivace A' množiny A jsou separabilní prostory.

16·4. Nechť P a Q jsou separabilní prostory. Pak $P \times Q$ je separabilní prostor.

16·5. Prostory ve cvičeních *7·2* a *7·4* jsou separabilní.

16·6. Prostor ve cvičení *6·5* není separabilní.

16·7. Systém $\mathfrak{B}$ otevřených podmnožin metrického prostoru P jest otevřená base prostoru P, když a jen když pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\sum_{X \in \mathfrak{B}_\varepsilon} X = P, \text{ kde } \mathfrak{B}_\varepsilon = \mathop{\mathrm{E}}_{X}[X \in \mathfrak{B},\ d(X) < \varepsilon].$$

*16·8.** Nechť $\mathfrak{B}_1$ jest otevřená base metrického prostoru P. Nechť $\mathfrak{B}_2$ jest otevřená base metrického prostoru Q. Nechť $\mathfrak{B}_{12}$ je systém všech množin tvaru $G_1 \times G_2$, kde $G_1 \in \mathfrak{B}_1$, $G_2 \in \mathfrak{B}_2$. Pak $\mathfrak{B}_{12}$ jest otevřená base prostoru $P \times Q$.

§ 17. Kompaktní prostory.

17·1. *Relativně kompaktní* (*bedingt kompakt* u Hausdorffa) prostor je metrický prostor P takový, že z každé posloupnosti bodů prostoru P lze vybrati cauchyovskou posloupnost. To je zřejmě *metrická vlastnost*; není to však topologická vlastnost (sr. **17·2·5**). Ježto bodová množina Q vnořená do metrického prostoru P je metrický prostor, nemusíme už definovati, co je to relativně kompaktní bodová množina. Zřejmě:

17·1·1. *Bodová množina vnořená do relativně kompaktního prostoru je relativně kompaktní.*

17·1·2. *Relativně kompaktní prostor P je omezený.*

Důkaz. Když $d(P) = \infty$, existuje posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $x_n \in P$, $\varrho(x_i, x_n) > n$ pro $i < n$. Z $\{x_n\}$ nelze vybrati omezenou posloupnost. Ale cauchyovská posloupnost jest omezená (cvič. *15·16*).

17·1·3. *Nechť P je metrický prostor. Nechť existuje nekonečná množina $A \subset P$ a číslo $\delta > 0$ takové, že*

$$x \in A,\ y \in A,\ x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) \geqq \delta.$$

Pak P není relativně kompaktní.

Důkaz. Existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in A$. Z $\{x_n\}$ nelze vybrati cauchyovskou posloupnost.

17·1·4. *Metrický prostor $P \neq \emptyset$ je relativně kompaktní, když a jen když každému $\delta > 0$ lze přiřaditi konečnou množinu $A(\delta) \subset P$ takovou, že $\varrho[x, A(\delta)] < \delta$ pro každý $x \in P$.*

Důkaz. I. Nechť množiny $A(\delta)$ existují. Nechť $x_n \in P$ ($n = 1, 2\ 3, \ldots$). Položme $x_n^{(0)} = x_n$ a sestrojme rekurentně posloupnosti $\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) takto: Ježto množina $A\left(\frac{1}{i}\right)$ je konečná a má od každého $x_n^{(i-1)}$ vzdálenost menší než $\frac{1}{i}$, existuje bod $y_i \in A\left(\frac{1}{i}\right)$ a posloupnost $\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná z $\{x_n^{(i-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\varrho(y_i, x_n^{(i)}) < \frac{1}{i}$ pro všecka n.

Položme $z_n = x_n^{(n)}$. Pak $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z $\{x_n\}_1^{\infty}$. Stačí ukázati, že $\{z_n\}$ je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme index i tak, že $\frac{1}{i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Posloupnost $\{z_n\}_{n=i}^{\infty}$ je vybrána z $\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$. Tedy

$$m > i,\ n > i \Rightarrow \varrho(y_i, z_m) < \frac{1}{i},\ \varrho(y_i, z_n) < \frac{1}{i} \Rightarrow \varrho(z_m, z_n) < \varepsilon.$$

II. Nechť P je relativně kompaktní. Nechť $\delta > 0$. Zvolme libovolně $x_1 \in P$. Když při určitém n byly už zvoleny body x_i $(1 \leq i \leq n)$, zvolme bod $x_{n+1} \in P$, *je-li to možné*, tak, aby bylo $\varrho(x_i, x_{n+1}) \geq \delta$. Podle **17·1·3** existuje index n takový, že body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existují, nikoli však x_{n+1}. Body $x_1, \ldots, x_n$ tvoří konečnou množinu $A(\delta) \subset P$ takovou, že $\varrho[x, A(\delta)] < \delta$ pro každý $x \in P$.

17·1·5. *Bodová množina Q vnořená do euklidovského $\mathbf{E}_m$ je relativně kompaktní, když a jen když je omezená.*

Důkaz. I. Relativně kompaktní Q je omezená podle **17·1·2.**

II. Nechť Q je omezená. Existuje c $(= 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $Q \subset R$, kde

$$R = \mathop{\mathrm{E}}_{(x_1,\ldots,x_m)} [\,|x_1| \leq c, \ldots, |x_m| \leq c].$$

Je-li dáno $\delta > 0$, zvolme index k tak, že $\frac{\sqrt{m}}{k} < \delta$ a označme $A(\delta)$ množinu těch $(x_1, \ldots, x_m)$, pro něž $kx_i = \gamma_i$ $(1 \leq i \leq m)$, kde γ_i jsou celá čísla a $|\gamma_i| \leq ck$. Pak $A(\delta)$ je konečná množina, $A(\delta) \subset R$ a $\varrho[x, A(\delta)] < \delta$ pro každý $x \in R$. Tedy R je relativně kompaktní podle **17·1·4.** Tedy Q je relativně kompaktní podle **17·1·1.**

17·1·6. *Relativně kompaktní bodová množina Q vnořená do Hilbertova prostoru $\mathbf{H}$ je řídká v $\mathbf{H}$.*

Důkaz. Nechť Q není řídká. Podle **12·2·3** existuje otevřená $G \neq 0$ taková, že $Q\Gamma \neq \emptyset$ pro každou otevřenou Γ takovou, že $\emptyset \neq \Gamma \subset G$. Zvolme $a = \{a_n\}_1^{\infty} \in G$. Existuje $\delta > 0$ takové, že $\Omega(a, \delta) \subset G$. Položme $b_{in} = a_n$ pro $i \neq n$, $b_{nn} = a_n + \frac{\delta}{2}$, $b_i = \{b_{in}\}_{n=1}^{\infty}$. Pak $\varrho(a, b_i) = \frac{\delta}{2}$, takže $\Omega\left(b_i, \frac{\delta}{4}\right) \subset \Omega(a, \delta) \subset G$. Ježto množina $\Gamma_i = \Omega\left(b_i, \frac{\delta}{4}\right)$ jest otevřená a $\emptyset \neq \Gamma_i \subset G$, existuje bod $c_i \in Q\Gamma_i$. Pro $i \neq k$ jest

$$\frac{\delta\sqrt{2}}{2} = \varrho(b_i, b_k) \leq \varrho(b_i, c_i) + \varrho(c_i, c_k) + \varrho(c_k, b_k) < \frac{\delta}{4} + \varrho(c_i, c_k) + \frac{\delta}{4},$$

tedy

$$\varrho(c_i, c_k) > \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,\delta > 0 \text{ pro } i \neq k.$$

Tedy Q není relativně kompaktní podle **17·1·3.**

17·2. *Kompaktní* prostor je metrický prostor P takový, že z každé posloupnosti bodů prostoru P lze vybrati konvergentní posloupnost. To je zřejmě topologická vlastnost. Ježto bodová množina Q vnořená do metrického prostoru P je metrický prostor, nemusíme už definovati, co je to kompaktní bodová množina.

Mnozí autoři nazývají kompaktní každou bodovou množinu vnořenou do prostoru (v našem smyslu) kompaktního a bodové množiny (v našem smyslu) kompaktní nazývají *v sobě kompaktní* (*insichkompakt, compact en soi, selfcompact*).

17·2·1. *Metrický prostor P je kompaktní, když a jen když je úplný a relativně kompaktní.*

Důkaz. I. Kompaktní prostor P je úplný. Nechť P je kompaktní prostor vnořený do metrického prostoru Q. Nechť $x_n \in P$, $x \in Q$, $x_n \to x$. Ježto P je kompaktní, lze z $\{x_n\}$ vybrati $\{y_n\}$ tak, že existuje $\lim y_n \in P$. Avšak $\lim y_n = x$ podle **7·1·2.** Tedy $x \in P$. Tedy P jest uzavřená podmnožina prostoru Q podle **8·3·3.** Tedy P je úplný prostor podle **15·5·1.**

II. Kompaktní prostor je relativně kompaktní podle **15·1·1.**

III. Nechť P je úplný relativně kompaktní prostor. Když $x_n \in P$, lze z $\{x_n\}$ vybrati cauchyovskou posloupnost. Ale cauchyovská posloupnost v P je konvergentní. Tedy P jest kompaktní.

17·2·2. *Bodová množina Q vnořená do kompaktního prostoru P je kompaktní, když a jen když je v P uzavřená.*

Důkaz. I. Nechť Q je kompaktní. Q jest uzavřená v P podle **15·2·1** a **17·2·1.**

II. Nechť Q je uzavřená v P. Podle **17·1·1** a **17·2·1** Q je relativně kompaktní. Podle **15·2·2** a **17·2·1** Q jest úplný prostor. Tedy Q je kompaktní podle **17·2·1.**

17·2·3. *Bodová množina Q vnořená do euklidovského E_m je kompaktní, když a jen když je omezená a uzavřená v E_m.*

Důkaz. I. Nechť Q je kompaktní. Q jest omezená podle **17·1·5** a **17·2·1.** Q jest uzavřená v E_m podle **15·5·1** a **17·2·1.**

II. Nechť Q je omezená a uzavřená v E_m. Q je relativně kompaktní podle **17·1·5.** Q je úplný prostor podle **15·1·3** a **15·2·2.** Tedy Q je kompaktní podle **17·2·1.**

17·2·4. *Urysohnův prostor* U *je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$ Označme A_n množinu všech posloupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ takových, že: pro $i > n$ jest $x_i = 0$, pro $1 \leqq i \leqq n$ jest $x_i = \dfrac{\gamma_i}{in}$, kde γ_i je celé číslo a $|\gamma_i| \leqq n$. Jest $A_n \subset \mathsf{U}$ a A_n je konečná množina.

Je-li dáno $\delta > 0$, zvolme n tak, že $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\delta^2}{2}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < n^2 \frac{\delta^2}{2}.$ Pak se lehko dokáže, že pro každý bod $x \in \mathsf{U}$ jest $\varrho(x, A_n) < \delta$. Tedy U je relativně kompaktní podle **17·1·4.** Ze **7·3·1** a **8·3·3** se lehko odvodí, že **U** je uzavřená podmnožina prostoru **H**, takže **U** jest úplný prostor podle **15·1·4** a **15·2·2**. Tedy **U** je kompaktní podle **17·2·1**.

17·2·5. *Metrický prostor P je separabilní, když a jen když existuje relativně kompaktní prostor Q homeomorfní s P.*

Důkaz. I. Nechť Q je relativně kompaktní. Ježto konečná množina je spočetná, podle **16·1·6** a **17·1·4** Q je separabilní. Ježto separabilita je topologická vlastnost, také prostor P homeomorfní s Q je separabilní.

II. Nechť P je separabilní. Podle **16·5** existuje bodová množina $Q \subset \mathbf{U}$ homeomorfní s P. Q je relativně kompaktní podle **17·1·1**, **17·2·1** a **17·2·4**.

17·2·6. *Kompaktní prostor je separabilní.*

To je důležitý důsledek věty **17·2·5**.

17·3. 17·3·1. *Nechť P je metrický prostor. Nechť $A \subset P$, $B \subset P$, $A \neq \emptyset \neq B$. Nechť A je kompaktní. Pak existují body $y \in A$, $z \in A$ takové, že*

$$\varrho(y, B) = \min_{x \in A} \varrho(x, B) = \varrho(A, B),$$

$$\varrho(z, B) = \max_{x \in A} \varrho(x, B).$$

Když $d(B) < \infty$, existují body $u \in A$, $v \in A$ takové, že

$$d(u, B) = \min_{x \in A} d(x, B),$$

$$d(v, B) = \max_{x \in A} d(x, B) = d(A, B).$$

Důkaz. Existují posloupnosti $\{y_n\}$ a $\{z_n\}$ takové, že

$$y_n \in A,\ z_n \in A,\ \varrho(y_n, B) \to \inf_{x \in A} \varrho(x, B),\ \varrho(z_n, B) \to \sup_{x \in A} \varrho(x, B).$$

Ježto A je kompaktní, existuje posloupnost $\{y'_n\}$ vybraná z $\{y_n\}$, posloupnost $\{z'_n\}$ vybraná ze $\{z_n\}$ a body $y \in A$, $z \in A$ takové, že $y'_n \to y$, $z'_n \to z$, takže podle cvič. *9·10* jest $\varrho(y'_n, B) \to \varrho(y, B)$, $\varrho(z'_n, B) \to$ $\to \varrho(z, B)$. Podle **7·1·2** jest $\lim \varrho(y'_n, B) = \lim \varrho(y_n, B)$, $\lim \varrho(z'_n, B) =$ $= \lim \varrho(z_n, B)$. Tedy $\varrho(y, B) = \inf_{x \in A} \varrho(x, B) = \min_{x \in A} \varrho(x, B)$, $\varrho(z, B) =$ $= \sup_{x \in A} \varrho(x, B) = \max_{x \in A} \varrho(x, B)$. Existence bodů u a v se dokáže stejně, vyjdeme-li od $d(x, B)$ místo od $\varrho(x, B)$ a užijeme-li cvič. *9·11* místo cvič. *9·10*.

17·3·2. *Nechť P je metrický prostor. Nechť $A \subset P$, $B \subset P$, $A \neq$ $\neq \emptyset \neq B$. Nechť A a B jsou kompaktní. Pak existují body $y_1 \in A$, $y_2 \in B$, $z_1 \in A$, $z_2 \in B$ takové, že*

$$\varrho(y_1, y_2) = \min_{\substack{x_1 \in A \\ x_2 \in B}} \varrho(x_1, x_2) = \varrho(A, B),$$

$$\varrho(z_1, z_2) = \max_{\substack{x_1 \in A \\ x_2 \in B}} \varrho(x_1, x_2) = d(A, B).$$

Důkaz. Podle **17·3·1** (v. též **17·1·2**) existují body $y_1 \in A$, $z_1 \in A$ takové, že
$$\varrho(y_1, B) = \varrho(A, B),\ d(z_1, B) = d(A, B).$$
Podle **17·3·1** existují body $y_2 \in B$, $z_2 \in B$ takové, že $\varrho(y_1, y_2) = \varrho(y_1, B)$, $\varrho(z_1, z_2) = d[z_1, (z_2)] = d(z_1, B)$.

17·3·3. *Nechť $P \neq \emptyset$ je kompaktní prostor. Existují body $y \in P$, $z \in P$ takové, že*
$$\varrho(y, z) = \max_{\substack{x_1 \in P \\ x_2 \in P}} \varrho(x_1, x_2) = d(P).$$
To je zvláštní případ věty **17·3·2**, neboť $d(P) = d(P, P)$.

17·3·4. *Nechť P je metrický prostor. Nechť $A \subset P$, $B \subset P$, $A \neq \emptyset \neq B$, $AB = \emptyset$. Nechť A je kompaktní a nechť B jest uzavřená v P. Pak $\varrho(A, B) > 0$.*

Důkaz. Nechť naopak $\varrho(A, B) = 0$. Podle **17·3·1** existuje bod $y \in A$ takový, že $\varrho(y, B) = 0$, tedy $y \in \overline{B}$. To je spor, neboť $y \in A$, $B = \overline{B}$, $AB = \emptyset$.

17·4. 17·4·1. *Nechť množina $A \subset \mathsf{E}_1$ jest neprázdná, omezená a uzavřená. Pak existují čísla* $\min A$ a $\max A$.

Důkaz. Zvolme číslo $c \in \mathsf{E}_1$ tak, že $A \subset \mathrm{E}_x[x > c]$. Podle **17·2·3** a **17·3·1** existuje číslo $y \in A$ takové, že $\varrho(c, y) = \min_{x \in A} \varrho(c, x)$. Avšak $\varrho(c, x) = x - c$, $\varrho(c, y) = y - c$. Tedy $y - c = \min_{x \in A} (x - c)$, tedy $y = \min_{x \in A} x$. Podobně pro maximum.

17·4·2. *Nechť f je spojité zobrazení kompaktního prostoru P na metrický prostor Q. Pak Q je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $y_n \in Q$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Existují body $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Ježto P je kompaktní, existují indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ takové, že existuje $\lim_{n \to \infty} x_{i_n} = x \in P$. Ježto f je spojité, jest $\lim_{n \to \infty} y_{i_n} = f(x) \in Q$. Tedy z $\{y_n\}$ lze vybrati konvergentní posloupnost $\{y_{i_n}\}$.

17·4·3. *Nechť P je kompaktní prostor. Nechť f je konečná spojitá funkce v oboru P. Množina $f(P)$ je omezená a uzavřená v E_1. Existují čísla* $\min f(A)$ a $\max f(A)$.

Důkaz. $f(P)$ je kompaktní podle **17·4·2**. Tedy podle **17·2·3** a **17·4·1**.

17·4·4. *Nechť f je spojité zobrazení kompaktního prostoru P do metrického prostoru Q. Pak f je stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Nechť $x_n \in P$, $y_n \in P$, $\varrho(x_n, y_n) \to 0$. Máme dokázati, že $\varrho[f(x_n), f(y_n)] \to 0$. Předpokládejme opak. Pak existuje číslo $\delta > 0$ a indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ takové, že $\varrho[f(x_{i_n}), f(y_{i_n})] > \delta$ pro všecka n. Ježto P je kompaktní, lze z posloupnosti indexů $\{i_n\}$ vybrati posloupnost $\{j_n\}$ tak, že existuje $\lim x_{j_n} = z \in P$. Ježto $\varrho(x_n, y_n) \to 0$, je také $\lim y_{j_n} = z$. Ježto zobrazení f je spojité, jest $\lim f(x_{j_n}) = f(z)$, $\lim f(y_{j_n}) = f(z)$, tedy (v. cvič. *9·12*) $\lim \varrho[f(x_{j_n}), f(y_{j_n})] = 0$, což je spor.

17·4·5. *Nechť P je kompaktní prostor. Nechť f je konečná spojitá funkce v oboru P. Pak f je stejnoměrně spojitá.*

To je zvláštní případ věty **17·4·4.**

17·4·6. *Nechť f je prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru P na metrický prostor Q. Pak inversní zobrazení f_{-1} je spojité, t. j. zobrazení f je homeomorfní.*

Důkaz. Když množina A jest uzavřená v P, podle **17·2·2** A je kompaktní, takže množina $f(A)$ podle **17·4·2** je kompaktní. Tedy $f(A)$ jest uzavřená v Q podle **15·5·1** a **17·2·1.** Tedy pro každou množinu A uzavřenou v P platí, že množina $f(A)$ jest uzavřená v Q, takže zobrazení f_{-1} je spojité podle **9·2.**

17·5. 17·5·1. *Nechť P je kompaktní prostor. Nechť pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $A_n \subset P$, $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset \bar{A}_{n+1}$. Pak $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ podle **17·1·4** existuje konečná množina $K_n \subset P$ taková, že $\varrho(x, K_n) < \frac{1}{n}$ pro každý $x \in P$. Tedy $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ podle **15·7·2** a **17·2·1.**

17·5·2. *Tvrzení věty* **15·7·2** *lze doplniti výrokem, že množina $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ je kompaktní.**)

Důkaz. Nechť $a_n \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak jest $a_n \in A_n$, takže podle důkazu věty **15·7·2** lze z $\{a_n\}$ vybrati konvergentní posloupnost $\{b_n\}$. Pro $n \geqq i + 1$ jest $b_n \in A_{i+1}$, tedy $\lim b_n \in \bar{A}_{i+1} \subset A_i$, tedy $\lim b_n \in \prod_{i=1}^{\infty} A_i$. Tedy z každé posloupnosti $\{a_n\}$ bodů prostoru $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ lze vybrati posloupnost $\{b_n\}$, která má limitu v $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

17·5·3. *Nechť metrický prostor P není kompaktní. Pak existují uzavřené množiny $A_n \subset P$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset A_{n+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.*

Důkaz. Existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů prostoru P, ze které nelze vybrati konvergentní posloupnost. Z **8·3·3** soudíme snadno, že množiny $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} (x_i)$ jsou uzavřené. Zřejmě $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset A_{n+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

---

*) O prostoru P se zde (stejně jako v **15·7·2**) nepředpokládá, že je kompaktní, nýbrž pouze (sr. **17·2·1**), že je úplný.

17·5·4. *Nutná a postačující podmínka, aby metrický prostor P byl kompaktní, jest: Ke každému systému $\mathfrak{A}$ otevřených množin takovému, že $\sum_{X \in \mathfrak{A}} X = P$, existuje konečný systém $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ takový, že $\sum_{X \in \mathfrak{A}_0} X = P$.*

Důkaz. I. Nechť P je kompaktní. Podle **16·2·2** a **17·2·6** existuje posloupnost $\{X_n\}$ taková, že $X_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = P$. Položme $A_n = P - \sum_{i=1}^{n} X_i$. Jest $A_n = \bar{A}_n$, $A_n \supset A_{n+1}$. Jest $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = P - \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$, takže podle **17·5·1** existuje index n takový, že $A_n = \emptyset$, tedy $\sum_{i=1}^{n} X_i = P$.

II. Nechť P není kompaktní. Podle **17·5·3** existují uzavřené množiny $A_n \subset P$ takové, že $A_n \neq \emptyset$, $A_n \supset A_{n+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Položme $G_n = P - A_n$. Pak množiny G_n jsou otevřené a jest $\sum_{n=1}^{\infty} G_n = P - \prod_{n=1}^{\infty} A_n = P$, kdežto pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ jest $\sum_{n=1}^{m} G_n = P - \prod_{n=1}^{m} A_n = P - A_m \neq P$.

17·6. Nechť P je libovolný metrický prostor. Označme P^* systém všech kompaktních podmnožin prostoru P vyjma množinu $\emptyset$. Když $A \in P^*$, $B \in P^*$, existují (v. **17·3·1**) reálná čísla

$$u(A, B) = \max_{x \in A} \varrho(x, B),$$

$$u(B, A) = \max_{y \in B} \varrho(y, A).$$

Položme

$$\varrho^*(A, B) = \max \{u(A, B), u(B, A)\}.$$

Když $A = B$, zřejmě $\varrho^*(A, B) = 0$. Když $A \neq B$, je buďto $A - B \neq \emptyset$, takže $u(A, B) > 0$ (neboť $B = \bar{B}$ podle **15·2·1** a **17·2·1**), nebo $B - A \neq \emptyset$, takže $u(B, A) > 0$. Tedy pro $A \neq B$ je vždy $\varrho^*(A, B) > 0$. Zřejmě je vždy $\varrho^*(A, B) = \varrho^*(B, A)$. Je-li také $C \in P^*$, pak podle cvič. *6·6* jest pro $x \in A$ a $y \in B$:

$$\varrho(x, C) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, C) \leqq \varrho(x, y) + u(B, C),$$

tedy

$$\varrho(x, C) \leqq \min_{y \in B} \varrho(x, y) + u(B, C) = \varrho(x, B) + u(B, C) \leqq$$
$$\leqq u(A, B) + u(B, C) \leqq \varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C),$$

tedy

$$u(A, C) \leqq \varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C)$$

a stejně

$$u(C, A) \leqq \varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C);$$

tedy

$$\varrho^*(A, C) \leqq \varrho^*(A, B) + \varrho^*(B, C).$$

Tedy ϱ^* je metrika v P^*. Metrický prostor $(P^*, \varrho^*) = P^*$ nazveme *Hausdorffovým nadprostorem prostoru P.*

17·6·1. *Když* $A_n \in P^*$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $A \in P^*$, *pak*

$$u(A, A_n) \to 0 \Leftrightarrow A \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n.$$

Důkaz. I. Nechť $u(A, A_n) \to 0$. Nechť $a \in A$; dokážeme, že $a \in \mathrm{Lim}\, A_n$. Jest $\varrho(a, A_n) \leqq \max\limits_{x \in A} (x, A_n) = u(A, A_n)$, tedy $\varrho(a, A_n) \to 0$. Podle **17·3·1** existuje bod $a_n \in A_n$ takový, že $\varrho(a, a_n) = \varrho(a, A_n)$. Jest $\varrho(a, a_n) \to 0$, tedy $a_n \to a$. Ježto $a_n \in A_n$, jest $a \in \mathrm{Lim}\, A_n$.

II. Nechť $A \subset \mathrm{Lim}\, A_n$. Dokážeme, že $u(A, A_n) \to 0$. Předpokládejme opak. Pak existuje číslo $\delta > 0$ a indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ takové, že $u(A, A_{i_n}) > \delta$ pro všecka n. Existují body $b_n \in A$ takové, že $\varrho(b_n, A_n) = \max\limits_{x \in A} \varrho(x, A_n) = u(A, A_n)$. Ježto A je kompaktní, lze z posloupnosti $\{i_n\}$ vybrati posloupnost $\{j_n\}$ tak, že existuje $\lim b_{j_n} = a \in A$. Ježto $A \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n$, existují body $a_n \in A_n$ takové, že $a_n \to a$. Ježto $b_{j_n} \to a$, $a_n \to a$, jest $\varrho(b_{j_n}, a_{j_n}) \to 0$. Tedy existuje index m takový, že $\varrho(b_{j_m}, a_{j_m}) < \delta$. Avšak $u(A, A_{j_m}) = \varrho(b_{j_m}, A_{j_m}) = \min\limits_{x \in A_{j_m}} \varrho(b_{j_m}, x) \leqq$ $\leqq \varrho(b_{j_m}, a_{j_m}) < \delta$. To je spor, neboť $u(A, A_{j_m}) > \delta$, ježto j_m je člen posloupnosti $\{i_n\}$.

17·6·2. *Nechť* $A_n \in P^*$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, $A \in P^*$. *Pak je vždy*

$$u(A_n, A) \to 0 \Rightarrow \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset A$$

a když P je kompaktní, je také

$$\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset A \Rightarrow u(A_n, A) \to 0.$$

Důkaz. I. Nechť $u(A_n, A) \to 0$. Nechť $a \in \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$; dokážeme, že $a \in A$. Ježto $a \in \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$, existují indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ a body $a_n \in A_{i_n}$ takové, že $a_n \to a$. Jest $\varrho(a_n, A) \leqq \max\limits_{x \in A_{i_n}} \varrho(x, A) = u(A_{i_n}, A)$, tedy $\varrho(a_n, A) \to 0$, takže podle cvič. *9·10* jest $\varrho(a, A) = 0$, t. j. $a \in \bar{A}$. Avšak $\bar{A} = A$ podle **15·2·1** a **17·2·1.**

II. Nechť P je kompaktní a nechť $\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset A$. Dokážeme, že $u(A_n, A) \to 0$. Předpokládejme opak. Pak existuje číslo $\delta > 0$ a indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$, takové, že $u(A_{i_n}, A) > \delta$ pro všecka n. Existují body $a_n \in A_n$ takové, že $\varrho(a_n, A) = \max\limits_{x \in A_n} \varrho(x, A) = u(A_n, A)$. Ježto P je kompaktní, lze z posloupnosti $\{i_n\}$ vybrati posloupnost $\{j_n\}$ tak, že existuje $\lim a_{j_n} = a \in P$. Ježto $a_{j_n} \in A_{j_n}$, $\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset A$, jest $a \in A$, tedy

$\varrho(a, A) = 0$, takže podle cvič. *9·10* jest $\varrho(a_{j_n}, A) \to 0$, t. j. $u(A_{j_n}, A) \to 0$. To je spor, neboť posloupnost $\{j_n\}$ je vybrána z $\{i_n\}$ a $u(A_{i_n}, A) > \delta > 0$ pro všecka n.

17·6·3. *Nechť* $A_n \in P^*$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A \in P^*$. *Když prostor* P *je kompaktní, jest tehdy a jen tehdy* $A_n \to A$ (vzhledem k metrice ϱ^*), *když* $\mathrm{Lim}\, A_n = A$ (ve smyslu odst. **8·8**). *Když* P *je libovolný metrický prostor, je tehdy a jen tehdy* $A_n \to A$, *když*: [1] $\mathrm{Lim}\, A_n = A$, [2] *množina* $A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *je kompaktní.*

Důkaz. I. Nechť $A_n \to A$. Pak $\varrho^*(A_n, A) \to 0$, tedy jednak $u(A, A_n) \to$ $\to 0$, takže podle **17·6·1** jest $A \subset \underline{\mathrm{Lim}}\, A_n$, jednak $u(A_n, A) \to 0$, takže podle **17·6·2** jest $\overline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset A$. Ježto vždy $\underline{\mathrm{Lim}}\, A_n \subset \overline{\mathrm{Lim}}\, A_n$, jest $\mathrm{Lim}\, A_n = A$.

II. Nechť $A_n \to A$. Nechť $x_n \in A + \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Když $x_n \in A$ pro nekonečně mnoho indexů n nebo když existuje index i takový, že $x_n \in A_i$ pro nekonečně mnoho indexů n, lze z $\{x_n\}$ vybrati posloupnost, která má v $A + \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ limitu, neboť množiny A a A_i jsou kompaktní. Nenastane-li žádný z obou případů, existují indexy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ takové, že z $\{x_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{y_n\}$ tak, že $y_n \in A_{i_n}$ pro všecka n. Jest $\varrho(y_n, A) \leqq \max_{x \in A_{i_n}} \varrho(x, A) = u(A_{i_n}, A) \leqq \varrho^*(A_{i_n}, A)$. Ježto $A_n \to A$, jest $\varrho(y_n, A) \to 0$. Podle **17·3·1** existují body $z_n \in A$ takové, že $\varrho(y_n, z_n) = \varrho(y_n, A)$, tedy $\varrho(y_n, z_n) \to 0$. Ježto A je kompaktní, existují indexy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ a bod $a \in A$ takový, že $\lim_{k \to \infty} z_{n_k} = a$. Ježto $\varrho(y_n, z_n) \to 0$, jest $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = a$. Tedy z posloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která má v $A \subset A + \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ limitu. Tedy množina $A + \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ je kompaktní.

III. Nechť $\mathrm{Lim}\, A_n = A$ a nechť buďto P je kompaktní, nebo množina $A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je kompaktní. Podle **17·6·1** jest $u(A, A_n) \to 0$. Při důkazu věty **17·6·2** bylo užito předpokladu, že je P kompaktní, pouze při tvrzení, že z posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_n \in A_n$, lze vybrati konvergentní posloupnost; toto tvrzení plyne však i z předpokladu, že množina $A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je kompaktní. Tedy $u(A_n, A) \to 0$. Ježto $u(A, A_n) \to 0$, $u(A_n, A) \to 0$, jest $\varrho^*(A_n, A) \to 0$, t. j. $A_n \to A$.

17·6·4. *Nechť metrické prostory P a Q jsou homeomorfní. Pak jejich Hausdorffovy nadprostory P^* a Q^* jsou homeomorfní. Určitěji: Nechť f je homeomorfní zobrazení prostoru P na prostor Q. Pro $X \in P^*$ nechť $\varphi(X) = f(X)$; pak φ je homeomorfní zobrazení prostoru P^* na prostor Q^*.*

To je důsledek věty **17·6·3** (v. též cvič. *9·21* a větu **17·4·2**).

17·6·5. *Když P je úplný prostor, také P^* je úplný prostor.*

Důkaz. Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest cauchyovská posloupnost vzhledem k metrice ϱ^*. Položme $B_n = \overline{\sum_{i=n}^{\infty} A_i}$. Pak jest $B_n \neq \emptyset$, $B_n \supset B_{n+1}$, $B_n = \overline{B}_n$. Zvolme index m a číslo $\delta > 0$. Ježto množiny A_i jsou kompaktní, podle **17·1·4** pro každé i existuje konečná množina K_i taková, že $x \in A_i \Rightarrow \varrho(x, K_i) < \frac{1}{2}\delta$. Ježto $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost, existuje index $p > m$ takový, že pro $n > p$ jest $u(A_n, A_p) < \frac{1}{2}\delta$. Když $x \in A_n$, $n > p$, jest $\varrho(x, A_p) \leqq u(A_n, A_p) < \frac{1}{2}\delta$, tedy existuje bod $y \in A_p$, $\varrho(x, y) < \frac{1}{2}\delta$. Z toho snadno vychází, že pro každý bod $x \in B_m$ platí, že $\varrho(x, \sum_{i=m}^{p} K_i) \leqq \delta$. Tedy podle **15·7·2** množina $A = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ je neprázdná. Podle **17·5·2** A je kompaktní, tedy $A \in P^*$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost, existuje index q takový, že pro $i > q$, $j > q$ jest $u(A_i, A_j) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Zvolme $n > q$. Když $x \in A$, je $x \in B_n = \overline{\sum_{i=n}^{\infty} A_i}$, takže existuje bod $x' \in \sum_{i=n}^{\infty} A_i$ takový, že $\varrho(x, x') < \frac{1}{2}\varepsilon$; existuje index $i \geqq n > q$ takový, že $x' \in A_i$; jest $\varrho(x', A_n) \leqq u(A_i, A_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže podle cvičení *6·6* je $\varrho(x, A_n) \leqq \varrho(x, x') + \varrho(x', A_n) < \varepsilon$. Tedy pro $n > q$, $x \in A$ je $\varrho(x, A_n) < \varepsilon$, takže pro $n > q$ je $u(A, A_n) \leqq \varepsilon$, t. j. $u(A, A_n) \to 0$. Zvolme opět $n > q$. Když $x \in A_n$, pak pro každé $i \geqq n$ je $\varrho(x, A_i) \leqq \leqq u(A_n, A_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže pro každé $i \geqq n$ existuje bod $y_i \in A_i \subset \overline{B}_i$ takový, že $\varrho(x, y_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle tvrzení učiněného (a pak dokázaného) na počátku důkazu věty **15·7·2** lze z posloupnosti $\{y_i\}_n^{\infty}$ vybrati posloupnost, která má limitu $z \in A$. Ježto $\varrho(x, y_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$, podle cvič. *9·12* je $\varrho(x, z) < \varepsilon$, tedy $\varrho(x, A) < \varepsilon$. Tedy pro $n > q$, $x \in A_n$ je $\varrho(x, A) < \varepsilon$, takže pro $n > q$ je $u(A_n, A) \leqq \varepsilon$, t. j. $u(A_n, A) \to 0$. Ježto také $u(A, A_n) \to 0$, je $\varrho^*(A_n, A) \to 0$, t. j. $A_n \to A$, takže posloupnost $\{A_n\}$ je konvergentní (vzhledem k metrice ϱ^*).

17·6·6. *Když P je relativně kompaktní prostor, také P^* je relativně kompaktní.*

Důkaz. Zvolme číslo $\delta > 0$. Podle **17·1·4** existuje konečná množina $K \subset P$ taková, že $\varrho(x, K) < \delta$ pro každý $x \in P$. Označme $\mathfrak{K}$ systém všech podmnožin množiny K, vyjma množinu $\emptyset$. Zřejmě $\mathfrak{K}$ je konečná podmnožina prostoru P^*. Zvolme $A \in P^*$. Položme $B = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in K,$

$\varrho(x, A) < \delta]$. Snadno se dokáže, že $B \in \mathfrak{K}$ a že $\varrho^*(A, B) < \delta$. Tedy prostor P^* je relativně kompaktní podle **17·1·4**.

17·6·7. *Když P je separabilní prostor, také P^* je separabilní.*

To je důsledek vět **17·2·5**, **17·6·4** a **17·6·6**.

17·6·8. *Když P je kompaktní prostor, také P^* je kompaktní.*

To je důsledek vět **17·2·1**, **17·6·5** a **17·6·6**.

17·7. Nechť $K \neq \emptyset$ je daný kompaktní prostor. Nechť P je daný metrický prostor. Označme P^K množinu všech spojitých zobrazení f prostoru K do prostoru P.

Když $f \in P^K$, $g \in P^K$, položme $\varphi(x) = \varrho[f(x), g(x)]$ pro $x \in K$. Ze cvič. *9·12* se snadno odvodí, že φ je konečná spojitá funkce v oboru K. Podle **17·4·3** existuje číslo $\max_{x \in K} \varrho[f(x), g(x)]$; toto číslo označíme $\varrho^+(f, g)$. Když $f = g$, zřejmě $\varrho^+(f, g) = 0$; když $f \neq g$, zřejmě $\varrho^+(f, g) > 0$. Zřejmě vždy $\varrho^+(f, g) = \varrho^+(g, f)$. Když také $h \in P^K$, pak pro každý $x \in K$ jest $\varrho[f(x), h(x)] \leqq \varrho[f(x), g(x)] + \varrho[g(x), h(x)] \leqq \varrho^+(f, g) + \varrho^+(g, h)$, tedy $\varrho^+(f, h) \leqq \varrho^+(f, g) + \varrho^+(g, h)$. Tedy ϱ^+ je metrika v P^K. Kdekoli v dalším mluvíme o P^K, máme na mysli vždy metrický prostor (P^K, ϱ^+). Následující tři věty jsou zřejmé.

17·7·1. *Když K obsahuje jediný bod, pak prostory P a P^K jsou isometrické.*

17·7·2. *Když kompaktní prostory $K \neq \emptyset$ a L jsou homeomorfní, pak prostory P^K a P^L jsou isometrické.*

17·7·3. *Když prostory P a Q jsou isometrické, pak prostory P^K a Q^K jsou isometrické.*

17·7·4. *Když prostory P a Q jsou homeomorfní, pak prostory P^K a Q^K jsou homeomorfní.*

Důkaz. Nechť φ je homeomorfní zobrazení prostoru P na prostor Q. Každému $f \in P^K$ přiřaďme zobrazení $\Phi(f)$ prostoru K do prostoru Q takto: obrazem bodu $x \in K$ při zobrazení $\Phi(f)$ je bod $\varphi[f(x)]$. Snadno se dokáže, že Φ je prosté zobrazení prostoru P^K na prostor Q^K; máme dokázati, že obě zobrazení Φ a Φ_{-1} jsou spojitá. Nechť tedy $f_n \in P^K$, $f \in P^K$; máme dokázati, že

$$f_n \to f \Leftrightarrow \Phi(f_n) \to \Phi(f).$$

Označme H_1 a H_2 resp. Hausdorffovy nadprostory prostorů $K \times P$ a $K \times Q$. Pro $x \in K$, $y \in P$ nechť $\psi(x, y) = [x, \varphi(y)]$. Snadno se nahlédne, že ψ je homeomorfní zobrazení prostoru $K \times P$ na prostor $K \times Q$. Pro $Z \in H_1$ nechť $\Psi(Z) = \psi(Z)$. Podle **17·6·4** Ψ je homeomorfní zobrazení prostoru H_1 na prostor H_2.

Položme

$$F_n = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in K,\ y = f_n(x)],\quad F = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x \in K,\ y = f(x)],$$

$$G_n = \underset{(x,z)}{\mathrm{E}}\{x \in K,\ z = \varphi[f_n(x)]\},\quad G = \underset{(x,z)}{\mathrm{E}}\{x \in K,\ z = \varphi[f(x)]\}.$$

Snadno se dokáže (sr. **17·4·2**), že $F_n \in H_1$, $F \in H_1$, $G_n \in H_2$, $G \in H_2$, a že $\Psi(F_n) = G_n$, $\Psi(F) = G$. Ježto zobrazení Ψ je homeomorfní, je: $F_n \to F \Leftrightarrow G_n \to G$. Dokážeme, že: $f_n \to f \Leftrightarrow F_n \to F$. Stejně by se ovšem dokázalo, že: $\Phi(f_n) \to \Phi(f) \Leftrightarrow G_n \to G$, takže bude vskutku dokázáno, že: $f_n \to f \Leftrightarrow \Phi(f_n) \to \Phi(f)$.

Nechť *předně* $f_n \to f$ v prostoru P^K. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje index p takový, že pro $n > p$ jest $\varrho^+(f_n, f) < \varepsilon$, tedy $\varrho[f_n(x), f(x)] < \varepsilon$ pro každý $x \in K$. Je-li $x \in K$, jest $[x, f_n(x)] \in F_n$ a $[x, f(x)] \in F$ a vzdálenost bodů $[x, f_n(x)]$, $[x, f(x)]$ v prostoru $K \times P$ jest rovna $\varrho[f_n(x), f(x)]$. Tedy pro $n > p$: $z \in F_n \Rightarrow \varrho(z, F) < \varepsilon$, $z \in F \Rightarrow \varrho(z, F_n) < \varepsilon$, takže pro $n > p$ vzdálenost F_n od F v prostoru H_1 jest menší než ε. Tedy $F_n \to F$ v prostoru H_1.

Nechť *za druhé* $F_n \to F$ v prostoru H_1. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle **9·6·1** a **17·4·4** existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in K,\ y \in K,\ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho[f(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Můžeme předpokládati, že $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Existuje index p takový, že pro $n > p$ vzdálenost F_n od F v prostoru P^K je menší než δ. Nechť $n > p$, $x \in K$. Pak $[x, f_n(x)] \in F_n$, takže existuje bod $[y, f(y)] \in F$ (tedy $y \in K$) takový, že

$$\varrho[(x, f_n(x)), (y, f(y))] = \sqrt{[\varrho(x, y)]^2 + \varrho[f_n(x), f(y)]^2} < \delta < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (1)$$

takže $\varrho(x, y) < \delta$, tedy $\varrho[f(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

$$\varrho[(x, f(x)), (y, f(y))] \leq \sqrt{[\varrho(x, y)]^2 + \varrho[f(x), f(y)]^2} <$$
$$< \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < \frac{3\varepsilon}{4}\cdot \quad (2)$$

Podle (1) a (2) jest

$$\varrho[f_n(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{4}, \ \varrho[f(x), f(y)] < \frac{3\varepsilon}{4},$$

tedy $\varrho[f_n(x), f(x)] < \varepsilon$. Tedy pro $n > p$ jest $\varrho^+(f_n, f) < \varepsilon$, takže $f_n \to f$ v prostoru P^K.

17·7·5. *Když $K \neq \emptyset$ je kompaktní prostor a P je úplný prostor, pak P^K je úplný prostor.*

Důkaz. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru P^K. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $p(\varepsilon)$ takový, že pro $m > p(\varepsilon)$, $n > p(\varepsilon)$ jest $\max \varrho[f_m(x), f_n(x)] < \varepsilon$. Z toho následuje, že pro každý $x \in K$ jest $\{f_n(x)\}$ cauchyovská posloupnost v prostoru P. Ježto prostor P jest úplný, lze ke každému $x \in K$ přiřaditi $f(x) \in P$ tak, že $f_n(x) \to f(x)$. f je tedy zobrazení prostoru K do prostoru P. Pro každé $\varepsilon > 0$ jest

$$x \in K,\ m > p(\varepsilon),\ n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho[f_m(x), f_n(x)] < \varepsilon,$$

tedy podle cvič. *9·12*

$$x \in K,\ m > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho[f_m(x), f(x)] \leqq \varepsilon.$$

Zvolme index $m > p\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$. Podle **9·6·1** a **17·4·4** existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in K,\ y \in K,\ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \varrho[f_m(x), f_m(y)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nechť $x \in K$, $y \in K$, $\varrho(x, y) < \delta$. Pak

$$\varrho[f(x), f(y)] \leqq \varrho[f(x), f_m(x)] + \varrho[f_m(x), f_m(y)] + \\ + \varrho[f_m(y), f(y)] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tedy zobrazení f je spojité, takže $f \in P^K$. Mimo to $n > p(\varepsilon) \Rightarrow \varrho^+(f_n, f) \leqq \varepsilon$, tedy $f_n \to f$, t. j. posloupnost $\{f_n\}$ je konvergentní (v prostoru P^K).

17·7·6. *Když $K \neq \emptyset$ je kompaktní prostor a P je separabilní prostor, pak P^K je separabilní prostor.*

Důkaz. Podle **16·1·3** existuje spočetná množina A hustá v P. Zvolme $\delta > 0$. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ označme Φ_n množinu těch $f \in P^K$, pro něž

$$x \in K,\ y \in K,\ \varrho(x, y) < \frac{1}{n} \Rightarrow \varrho[f(x), f(y)] < \tfrac{1}{4}\delta.$$

Podle **9·6·1** a **17·4·4** jest $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n = P^K$. Pro každé n podle **17·1·4** existuje konečná posloupnost $\{c_i\}_{i=1}^m$ (body c_i a číslo m jsou závislé na n) bodů prostoru K taková, že ke každému $x \in K$ existuje index i takový, že $\varrho(x, c_i) < \dfrac{1}{n}$. Označme $\mathfrak{A}_n$ množinu těch posloupností $\{a_i\}_{i=1}^m$, pro něž $a_i \in A$. Podle cvič. *3·14* množina $\mathfrak{A}_n$ je spočetná. Každé posloupnosti $\{a_i\}_{i=1}^m \in \mathfrak{A}_n$ přiřaďme právě jedno zobrazení $f \in \Phi_n$, při čemž, *je-li to možné*, zvolme f tak, aby bylo $\varrho[f(c_i), a_i] < \frac{1}{4}\delta$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Nechť Ψ_n je množina všech zobrazení přiřazených jednotlivým posloupnostem $\{a_i\}_{i=1}^m \in \mathfrak{A}_n$. Množina Ψ_n je spočetná podle **3·4·1**, takže podle **3·6** také množina $\Psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Psi_n$ je spočetná.

Nechť nyní je dána libovolně $f \in P^K$. Existuje index n takový, že $f \in \Phi_n$. Ježto A je hustá v P, existuje posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^m$ taková, že $\varrho[f(c_i), a_i] < \frac{1}{4}\delta$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Nechť $g \in \Psi_n$ je to zobrazení, které bylo přiřazeno posloupnosti $\{a_i\}_{i=1}^m$. Pro $1 \leqq i \leqq m$ jest $\varrho[g(c_i), a_i] < \frac{1}{4}\delta$, tedy $\varrho[f(c_i), g(c_i)] < \frac{1}{2}\delta$. Je-li x libovolný bod prostoru K, existuje index i takový, že $\varrho(x, c_i) < \dfrac{1}{n}$. Ježto $f \in \Phi_n$, $g \in \Psi_n \subset \Phi_n$, jest

$\varrho[f(x), f(c_i)] < \frac{1}{4}\delta$, $\varrho[g(x), g(c_i)] < \frac{1}{4}\delta$, tedy $\varrho[f(x), g(x)] \leqq \varrho[f(x), f(c_i)] + \varrho[f(c_i), g(c_i)] + \varrho[g(x), g(c_i)] < \delta$; takže $\varrho^+(f, g) < \delta$. Tedy každému $f \in P^K$ lze přiřaditi $g \in \Psi$ tak, že $\varrho^+(f, g) < \delta$. Ježto množina Ψ je spočetná, P^K je separabilní podle **16·1·6.**

Když P je kompaktní, P^K nemusí býti kompaktní (v. cvič. *17·17*).

17·8. Nechť K je kompaktní bodová množina vnořená do prostoru E_1. Předpokládejme, že K obsahuje aspoň dva různé body. Podle **17·2·3** a **17·4·1** existují body

$$a = \min K, \; b = \max K.$$

Jest $a < b$. Položme $J = \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b]$. Jest $K \subset J$; může býti $K = J$.

Styčným intervalem (*intervalle contigu*) množiny K nazveme interval $S = \underset{t}{\mathrm{E}}[u < t < v]$ ($u \in \mathsf{E}_1$, $v \in \mathsf{E}_1$, $u < v$) takový, že: [1] $S \, . \, K = \emptyset$; [2] $u \in K$, $v \in K$.

17·8·1. *Množina $J - K$ je disjunktní součet všech styčných intervalů množiny K.*

Důkaz. I. Nechť $S = \underset{t}{\mathrm{E}}[u < t < v]$ je styčný interval. Zřejmě $a \leqq u < v \leqq b$, tedy $S \subset J$; ježto $S \, . \, K = \emptyset$, jest $S \subset J - K$.

II. Nechť $S_1 = \underset{t}{\mathrm{E}}[u_1 < t < v_1]$, $S_2 = \underset{t}{\mathrm{E}}[u_2 < t < v_2]$ jsou dva styčné intervaly. Nechť $c \in S_1 S_2$. Ježto $S_1 \, . \, K = \emptyset$, $v_1 \in K$, jest $v_1 = \min K \, . \, \underset{t}{\mathrm{E}}[t > c]$; ježto $S_2 \, . \, K = \emptyset$, $v_2 \in K$, jest $v_2 = \min K \, . \, \underset{t}{\mathrm{E}}[t > c]$. Tedy $v_1 = v_2$ a podobně se dokáže $u_1 = u_2$. Tedy $S_1 = S_2$. Tedy systém styčných intervalů je disjunktní.

III. Nechť $c \in J - K$. Množiny $K' = K \, . \, \underset{t}{\mathrm{E}}[t \geqq c]$ a $K'' = K \, . \, \underset{t}{\mathrm{E}}[t \leqq c]$ jsou kompaktní (v. **17·2·3**); jest $b \in K'$, $a \in K''$, tedy $K' \neq \emptyset \neq K''$. Podle **17·4·1** existují body $v = \min K'$, $u = \max K''$. Jest $u \leqq c \leqq v$; ježto $c \in J - K$, $u \in K$, $v \in K$, jest $u < c < v$, t. j. $c \in S = \underset{t}{\mathrm{E}}[u < t < v]$. Zřejmě S je styčný interval.

17·8·2. *Systém styčných intervalů je spočetný.*

To plyne z **16·1·5**, **16·2·1** a **17·8·1.**

17·8·3. *Nechť $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$, $a < b$. Nechť $\mathfrak{M}$ je disjunktní* (event. prázdný) *systém intervalů tvaru* $\underset{t}{\mathrm{E}}[u < t < v]$, *kde* $a \leqq u < v \leqq b$. *Pak existuje právě jedna kompaktní množina $K \subset \mathsf{E}_1$ taková, že $a = \min K$, $b = \max K$ a že $\mathfrak{M}$ je systém jejích styčných intervalů.*

Důkaz. Položme $J = \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b]$, $M = \sum\limits_{X \in \mathfrak{M}} X$. Zřejmě $M \subset J$. Existuje-li hledaná množina, musí podle **17·8·1** býti rovna $J - M$. Položme tedy $K = J - M$. Množina M jest (v. **8·5·3**) otevřená v E_1, takže K jest uzavřená v E_1 a omezená, tedy kompaktní. Zřejmě $a =$

$= \min K$, $b = \max K$. Zbývá ukázati, že $\mathfrak{M}$ je systém styčných intervalů množiny K.

Nechť $S = \mathop{\mathrm{E}}_t[u < t < v] \in \mathfrak{M}$. Jest $S \subset M$, tedy $SK = \emptyset$. Kdyby bylo $v \in M$, existoval by interval $S_1 \in \mathfrak{M}$, $v \in S_1$. Lehko se vidí, že by pak bylo $SS_1 \neq \emptyset$, $S \neq S_1$, což je spor. Tedy $v \in K$ a podobně $u \in K$. Tedy každý $S \in \mathfrak{M}$ je styčný interval. Ježto podle **17·8·1** M je disjunktní součet všech styčných intervalů, soudíme snadno, že také obráceně každý styčný interval patří do $\mathfrak{M}$.

Označme na okamžik M_3 množinu všech posloupností $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejichž každý člen j_n má jednu ze tří hodnot 0, 1, 2, a M_2 množinu všech $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejichž každý člen má jednu z obou hodnot 0, 2. Je známo (v. na př. K. Rychlík, *Úvod do elementární teorie číselné*, kap. III), že: [1] když $\{j_n\} \in M_3$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} \in J$, kde $J = \mathop{\mathrm{E}}_t[0 \leqq t \leqq 1]$; [2] když $t \in J$, $t \neq 0$, $t \neq 1$, a když existuje index m takový, že $t \,.\, 3^m$ je číslo celé, existují právě dvě posloupnosti $\{j_n\} \in M_3$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} = t$ (vezmeme-li m co nejmenší, pak z obou čísel j_m je právě jedno rovno 1 a pro $n > m$ je stále v jedné z obou posloupností $j_n = 0$ a ve druhé $j_n = 2$); [3] když $t \in J$ a když žádné z čísel $t \,.\, 3^n$ není celé, existuje právě jedna posloupnost $\{j_n\} \in M_3$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{3^n} = t$ (a jest nekonečně mnohokrát $j_n \neq 0$ a nekonečně mnohokrát $j_n \neq 2$). Označme D množinu všech čísel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}$, kde $\{i_n\} \in M_2$. Množina D se nazývá (*Cantorovo*) *diskontinuum*. Položme

$$S = \mathop{\mathrm{E}}_t[\tfrac{1}{3} < t < \tfrac{2}{3}]; \tag{1}$$

když $n = 1, 2, 3, \ldots$ a když každý z indexů $i_1, i_2, \ldots, i_n$ má jednu z obou hodnot 0 a 2, položme

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \mathop{\mathrm{E}}_t\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}} < t < \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} + \frac{2}{3^{n+1}}\right]. \tag{2}$$

Označme $\mathfrak{M}$ systém složený z intervalu (1) a ze všech intervalů (2). Snadno se nahlédne (sr. **17·8·3**), že množina D je kompaktní, že $\min D = 0$, $\max D = 1$ a že $\mathfrak{M}$ je systém styčných intervalů množiny D.

Položme

$$H_0 = \mathop{\mathrm{E}}_t[0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{3}],\ H_2 = \mathop{\mathrm{E}}_t[\tfrac{2}{3} \leqq t \leqq 1];$$

když $n = 2, 3, 4, \ldots$ a když každý z indexů $i_1, i_2, \ldots, i_n$ má jednu z obou hodnot 0 a 2, položme

$$H_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \mathop{\mathrm{E}}_t\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} \leqq t \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{i_k}{3^k} + \frac{i_n + 1}{3^n}\right].$$

Pak je s disjunktními sčítanci napravo:

$$J - S = H_0 + H_2$$

a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$J - [S + \Sigma S_{i_1} + \Sigma S_{i_1 i_2} + \ldots + \Sigma S_{i_1 i_2 \ldots i_n}] = \Sigma H_{i_1 i_2 \ldots i_n i_{n+1}},$$

tedy

$$D = \prod_{n=1}^{\infty} \Sigma H_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Ke každému $x \in D$ existuje právě jedna posloupnost $\{i_n\} \in M_2$ taková, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}$; snadno se přesvědčíme, že pak je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} = \Pi H_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

17·8·4. *Nechť $P \neq \emptyset$ je kompaktní prostor. Pak existuje spojité zobrazení f diskontinua D na prostor P.*

Důkaz. I. Zvolme $\delta > 0$. Podle **17·1·4** existují body $a_k \in P$ $(1 \leq k \leq m)$ v konečném počtu takové, že

$$P = \sum_{k=1}^{m} \overline{\Omega}(a, \delta).$$

Zvolme $h = 1, 2, 3, \ldots$ tak, že $m \leq 2^h$ (číslo h můžeme zvoliti větší než předepsané číslo) a položme $a_k = a_m$ pro $m + 1 \leq k \leq 2^h$. Pak jest

$$P = \sum_{k=1}^{2^h} \overline{\Omega}(a_k, \delta).$$

Body a_k $(1 \leq k \leq 2^h)$ můžeme označiti $b_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, kde každý z indexů $i_1, i_2, \ldots, i_h$ má některou z obou hodnot 0 a 2. Položme

$$\overline{\Omega}(b_{i_1 i_2 \ldots i_h}, \delta) = P_{i_1 i_2 \ldots i_h}.$$

Pak jest

$$P = \Sigma P_{i_1 i_2 \ldots i_h}, \; d(P_{i_1 i_2 \ldots i_h}) < 2\delta$$

a množiny $P_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ jsou neprázdné a kompaktní (v. **17·2·2**).

II. Vycházejíce od daného prostoru P, proveďme právě popsanou konstrukci, volíce $\delta = \frac{1}{2^2}$; číslo h označme h_1. Vycházejíce od kteréhokoli z 2^{h_1} prostorů $P_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, proveďme stejnou konstrukci znovu, volíce $\delta = \frac{1}{2^3}$; můžeme předpokládati, že číslo h má ve všech 2^{h_1} případech stejnou hodnotu, kterou označme $h_2 - h_1$. Dostaneme ke každému $P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_1}}$ $2^{h_2 - h_1}$ prostorů $P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_2}}$. Vycházejíce od kteréhokoli z 2^{h_2} prostorů $P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_2}}$, proveďme opět stejnou konstrukci, volíce $\delta = \frac{1}{2^4}$ a volíce pokaždé stejnou hodnotu $h_3 - h_2$ pro h. Takto pokračujíce, dostaneme přirozená čísla $h_1 < h_2 < h_3 < \ldots$ a kompaktní množiny $P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_n}}$ (každý z indexů má jednu z obou hodnot 0 a 2) takové, že

$$d(P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_n}}) < \frac{1}{2^n}, \tag{1}$$

$$P = \Sigma P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_1}}, \tag{2}$$

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_n}} = \Sigma P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_{n+1}}}, \tag{3}$$

kde napravo sumační indexy jsou $i_{h_n+1}, i_{h_n+2}, \ldots, i_{h_{n+1}}$.

Každému bodu $t \in D$ patří právě jedna posloupnost $\{i_n\} \in M_2$ taková, že $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}$. Množina

$$\prod_{n=1}^{\infty} P_{i_1 i_2 \ldots i_{h_n}} \tag{4}$$

podle (1) a (3) obsahuje právě jeden bod (v. **15·7·1**, **17·2·1** a **17·2·2**), který označíme $f(t)$. Tím dostaneme zobrazení f diskontinua D do prostoru P.

Ke každému $x \in P$ podle (2) a (3) existuje aspoň jedna posloupnost $\{i_n\} \in M_2$ taková, že x náleží do množiny (4). Tedy f je zobrazení D na prostor P.

Zvolme bod $t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n^{(0)}}{3^n} \in D$, tedy $\{i_n^{(0)}\} \in M_2$. Nechť $\varepsilon > 0$. Určeme m tak, že $2^{-m} < \varepsilon$. Lehko se dokáže, že: [1] $t_0 \in H_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_{h_m}^{(0)}}$, [2] když $(i_1, i_2, \ldots, i_{h_m}) \neq (i_1^{(0)}, i_2^{(0)}, \ldots, i_{h_m}^{(0)})$, pak $\varrho(t_0, H_{i_1 i_2 \ldots i_{h_m}}) \geqq \frac{1}{3^{h_m}}$. Tedy pro $t \in D$, $|t - t_0| < \frac{1}{3^{h_m}}$ jest $t \in H_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_{h_m}^{(0)}}$, tedy pro $t \in D$, $|t - t_0| < \frac{1}{3^{h_m}}$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}$, $\{i_n\} \in M_2$ jest $f(t) \in P_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_{h_m}^{(0)}}$, tedy $\varrho[f(t), f(t_0)] \leqq d(P_{i_1^{(0)} i_2^{(0)} \ldots i_{h_m}^{(0)}}) < 2^{-m} < \varepsilon$. Tedy zobrazení f je spojité.

17·9. Pravíme, že P je *lokálně kompaktní* (*im kleinen kompakt* neboli *lokal kompakt*, *localement compact*, *locally compact*) prostor, když P je metrický prostor a když ke každému $x \in P$ existuje okolí U takové, že jeho uzávěr $\overline{U}$ je kompaktní. Lokální kompaktnost je zřejmě topologická vlastnost.

17·9·1. *Metrický prostor P je separabilní a lokálně kompaktní* *tehdy a jen tehdy, když je homeomorfní s otevřenou podmnožinou kompaktního prostoru.*

Důkaz. I. Nechť G je otevřená podmnožina kompaktního prostoru Q. Nechť P je homeomorfní s G. Máme ukázati, že P je separabilní a lokálně kompaktní. Ježto obě vlastnosti jsou topologické, stačí je odvoditi pro G (místo P). G je separabilní podle **16·1·2** a **17·2·6.** Nechť $x \in G$. Pak G jest okolí bodu x (v prostoru Q), takže podle **10·1·2** existuje okolí U bodu x takové, že $\overline{U} \subset G$. Množina $\overline{U}$ je kompaktní podle **17·2·2.** Ježto $\overline{U} \subset G$, jest $U = GU$, $\overline{U} = G\overline{U}$, t. j. U jest okolí bodu x v prostoru G a $\overline{U}$ jest uzávěr množiny U v prostoru G. Tedy G je lokálně kompaktní.

II. Nechť P je separabilní a lokálně kompaktní. Ježto P je separabilní, podle **16·5** existuje podmnožina G Urysohnova prostoru $\mathbf{U}$ homeomorfní s P, tedy lokálně kompaktní. Uzávěr $\overline{G}$ množiny G v prostoru $\mathbf{U}$ je kompaktní podle **17·2·2** a **17·2·4.** Zbývá ukázati, že množina G jest otevřená v $\overline{G}$, tedy že množina $\overline{G} - G$ jest uzavřená v $\overline{G}$. Předpokládejme opak. Pak existuje (v. **8·3·3**) posloupnost $\{x_n\}$ taková, že $x_n \in \overline{G} - G$, že existuje $\lim x_n = x \in \overline{G}$, ale že není $x \in \overline{G} - G$, takže jest $x \in G$. Ježto G je lokálně kompaktní, existuje množina V otevřená v G, obsahující bod x a taková, že její uzávěr V_0 v prostoru G je kompaktní. Podle **8·7·1** jest $V_0 = G\overline{V}$, kde (stejně jako v dalším) pruh značí uzávěr v prostoru $\mathbf{U}$. Podle **8·7·5** je $V = GW$, kde množina W jest otevřená v $\mathbf{U}$. Jest $G = GV + (G - V) = GV + (G - W) \subset G\overline{V} + + (\mathbf{U} - W)$, t. j.

$$G \subset V_0 + (\mathbf{U} - W). \tag{1}$$

Množina V_0 jest uzavřená v $\mathbf{U}$ podle **17·2·2**; množina $\mathbf{U} - W$ je také uzavřená v $\mathbf{U}$, ježto W jest otevřená v $\mathbf{U}$. Tedy množina na pravo v relaci (1) jest uzavřená v $\mathbf{U}$, takže (v. **8·4**) jest $\overline{G} \subset V_0 + (\mathbf{U} - W)$, tedy $\overline{G}W \subset V_0 \subset G$. Ježto $x_n \to x \in W$ a ježto množina W jest otevřená v $\mathbf{U}$, existuje index p takový, že pro $n \geqq p$ jest $x_n \in W$, tedy $x_n \in \overline{G}W$, tedy $x_n \in G$, což je spor.

17·9·2. *Metrický prostor P je separabilní a lokálně kompaktní tehdy a jen tehdy, když existuje kompaktní prostor Q a bod $a \in Q$ takový, že množina $Q - (a)$ je homeomorfní s P.*

Důkaz. I. Nechť Q je kompaktní prostor; nechť $a \in Q$; nechť $Q - (a)$ je homeomorfní s P. Množina $Q - (a)$ jest otevřená v Q; tedy P je separabilní a lokálně kompaktní podle **17·9·1.**

II. Nechť P je separabilní a lokálně kompaktní prostor. Podle **17·9·1** existuje kompaktní prostor $K = (K, \varrho)$ a otevřená množina $G \subset K$ homeomorfní s P. Označme Q množinu skládající se ze všech bodů množiny G a z jediného nového prvku, který označme a. Rozeznávejme dva případy.

IIα. Nechť P je kompaktní, takže také G je kompaktní. Podle **17·1·2** je $d(G) < \infty$. Definujme konečnou funkci ϱ_0 v oboru $Q \times Q$ takto: pro $x \in G$, $y \in G$ nechť $\varrho_0(x, y) = \varrho(x, y)$; pro $x \in G$ nechť $\varrho_0(a, x) = \varrho_0(x, a) = 1 + d(G)$; konečně nechť $\varrho_0(a, a) = 0$. Snadno se přesvědčíme, že ϱ_0 je metrika v Q, že prostor (Q, ϱ_0) je kompaktní; ježto parciální metriky v G určené jednak metrikou ϱ v $K \supset G$, jednak metrikou ϱ_0 v $Q \supset G$ jsou totožné, P je homeomorfní (dokonce totožný) s množinou $Q - (a)$ vnořenou do Q.

IIβ. Nechť P není kompaktní, takže ani G není kompaktní. Podle **17·2·2** je $G \neq \overline{G}$, takže $K - G \neq \emptyset$; ježto G jest otevřená v K, $K - G$ jest uzavřená v K, tedy kompaktní podle **17·2·2.**

Definujme konečnou funkci ϱ_0 v oboru $Q \times Q$ takto: pro $x \in G$, $y \in G$ nechť

$$\varrho_0(x, y) = \min\,[\varrho(x, y), \varrho(x, K - G) + \varrho(y, K - G)]; \tag{1}$$

pro $x \in G$ nechť $\varrho_0(x, a) = \varrho_0(a, x) = \varrho(x, K - G)$; konečně nechť $\varrho_0(a, a) = 0$. Pro $x \in Q$, $y \in Q$ je zřejmě $\varrho_0(x, y) = \varrho_0(y, x)$, dále $\varrho_0(x, y) = 0$ v případě $x = y$ a $\varrho_0(x, y) > 0$ v případě $x \neq y$, neboť je $\varrho(x, K - G) > 0$ pro $x \in G$, ježto $K - G = \overline{K - G}$.

Definujme konečnou funkci ϱ_1 v oboru $K \times K$ takto: pro $x \in G$, $y \in G$ nechť $\varrho_1(x, y) = \varrho(x, y)$; pro $x \in G$, $y \in K - G$ nechť $\varrho_1(x, y) = \varrho_1(y, x) = \varrho(x, K - G)$; pro $x \in K - G$, $y \in K - G$ nechť $\varrho_1(x, y) = 0$. Pro $x \in Q$, $y \in Q$ nazveme na okamžik řetězem od x do y každou konečnou posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^m$ takovou, že: [1] $u_i \in K$ pro $1 \leqq i \leqq m$; [2] $u_1 = x$ v případě $x \in G$ a $u_1 \in K - G$ v případě $x = a$; [3] $u_m = y$ v případě $y \in G$ a $u_m \in K - G$ v případě $y = a$. Číslo

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varrho_1(u_i, u_{i+1}) \text{ (rovné 0 pro } m = 1)$$

nazveme délkou řetězu $\{u_i\}_{i=1}^m$. Snadno se dokáže, že pro $x \in Q$, $y \in Q$ existují řetězy od x do y a že číslo $\varrho_0(x, y)$ je nejmenší z délek všech takových řetězů.

Nechť $x \in Q$, $y \in Q$, $z \in Q$. Existuje řetěz $\{u_i\}_{i=1}^m$ od x do y, jehož délka je $\varrho_0(x, y)$; existuje řetěz $\{u_i\}_{i=m+1}^{m+n}$ od y do z, jehož délka je $\varrho_0(y, z)$; pak $\{u_i\}_{i=1}^{m+n}$ je řetěz od x do z a jeho délka je jednak $\geqq \varrho_0(x, z)$, jednak $= \varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z)$. Tedy $\varrho_0(x, y) + \varrho_0(y, z) \geqq \varrho_0(x, z)$.

Tím je dokázáno, že ϱ_0 je metrika v Q. Dokažme, že prostor (Q, ϱ_0) je kompaktní. Nechť tedy $\{x_n\}_1^\infty$ je bodová posloupnost v Q. Máme dokázati, že lze z $\{x_n\}$ vybrati posloupnost vzhledem k metrice ϱ_0 konvergentní. To je zřejmé, když $x_n = a$ pro nekonečně mnoho indexů n. V opačném případě lze z $\{x_n\}$ vybrati $\{x'_n\}_1^\infty$ tak, že $x'_n \in G$ pro všecka n. Může se státi, že existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho indexů $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ je stále $\varrho(x'_{n_i}, K - G) \geqq \varepsilon$. Pak je pro všecka i

$$x'_{n_i} \in K - \Omega_K(K - G, \varepsilon) = L.$$

Množina $\Omega_K(K - G, \varepsilon)$ jest otevřená v K, tedy L je uzavřená v K, tedy podle **17·2·2** L je kompaktní prostor (vzhledem k parciální metrice určené v L metrikou ϱ prostoru K). Tedy z $\{x'_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ lze vybrati $\{y_n\}_1^{\infty}$ tak, že existuje bod $y \in L$ takový, že $\varrho(y_n, y) \to 0$. Avšak $\varrho_0(y_n, y) \leqq \varrho(y_n, y)$, takže také $\varrho_0(y_n, y) \to 0$, t. j. posloupnost $\{y_n\}$ je konvergentní vzhledem k metrice ϱ_0. Zbývá případ, kdy každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi index p tak, že pro $n \geqq p$ je stále $\varrho(x'_n, K - G) < \varepsilon$. Pak je $\varrho_0(x'_n, a) = \varrho(x'_n, K - G) \to 0$, tedy $x'_n \to a$ vzhledem k metrice ϱ_0.

Zbývá dokázati, že obě parciální metriky určené v G jednak metrikou ϱ v $K \supset G$, jednak metrikou ϱ_0 v $Q \supset G$, jsou mezi sebou ekvivalentní, t. j. že pro $x_n \in G$, $x \in G$ jest

$$\varrho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow \varrho_0(x_n, x) \to 0.$$

Když předně $\varrho(x_n, x) \to 0$, je $\varrho_0(x_n, x) \to 0$, neboť $\varrho_0(x_n, x) \leqq \varrho(x_n, x)$. Nechť za druhé $\varrho_0(x_n, x) \to 0$. Ježto $x \in G$ a $K - G = \overline{K - G}$, je $\varrho(x, K - G) > 0$, takže existuje index p takový, že pro $n \geqq p$ jest $\varrho_0(x_n, x) < \varrho(x, K - G) \leqq \varrho(x_n, K - G) + \varrho(x, K - G)$. Podle (1) pro $n \geqq p$ jest $\varrho_0(x_n, x) = \varrho(x_n, x)$, takže $\varrho(x_n, x) \to 0$.

17·10. Ze **16·1·5** a **17·2·3** snadno následuje:

17·10·1. *Euklidovský prostor* $\mathsf{E}_m (m = 1, 2, 3, \ldots)$ *je separabilní a lokálně kompaktní, ale není kompaktní.*

Podle **17·9·2** existuje kompaktní prostor Q a bod $a \in Q$ takový, že E_m je homeomorfní s $Q - (a)$. Takový prostor Q si nyní opatříme elementárním počtem.

Nazveme *m-rozměrným sférickým prostorem* $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ a označme S_m množinu těch bodů $x = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ euklidovského E_{m+1}, pro něž $\sum_{i=0}^{m} x_i^2 = 1$. Metrika v S_m jest ovšem parciální metrika obyčejné metriky v E_{m+1}. Prostor S_0 obsahuje právě dva body, kdežto prostory S_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou nekonečné. Z **9·5** a **17·2·3** plyne snadno:

17·10·2. *Sférický prostor* S_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *je kompaktní.*

17·10·3. *Nechť* $a \in \mathsf{S}_m$, $b \in \mathsf{S}_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. *Existuje isometrické zobrazení* f *prostoru* S_m *na* S_m *takové, že* $f(a) = b$.

Důkaz. I. Dokažme, že pro $-1 \leqq i \leqq m - 1$ existuje isometrické zobrazení f_i prostoru S_m na S_m takové, že, když $f_i(a) = c_i = (c_{i0}, c_{i1}, \ldots, c_{im})$, pak pro $0 \leqq j \leqq i$ jest $c_{ij} = 0$. Toto tvrzení je triviální pro $i = -1$. Nechť je správné při určitém i $(-1 \leqq i \leqq m - 2)$; stačí dokázati, že je správné i pro $i + 1$. To je zřejmé, když $c_{i,i+1} = 0$. V opačném případě položme pro $(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathsf{S}_m : \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_m)$, kde

$$x'_{i+1} = \frac{c_{i,i+2}\, x_{i+1} + c_{i,i+1}\, x_{i+2}}{\sqrt{c^2_{i,i+1} + c^2_{i,i+2}}},$$

$$x'_{i+2} = \frac{-\, c_{i,i+1}\, x_{i+1} + c_{i,i+2}\, x_{i+2}}{\sqrt{c^2_{i,i+1} + c^2_{i,i+2}}},$$

$$x'_j = x_j,\ 0 \leqq j \leqq m,\ i+1 \neq j \neq i+2.$$

Položíme-li $c_{i+1} = (c_{i+1,0}, c_{i+1,1}, \ldots, c_{i+1,m})$, kde $c_{i+1,i+1} = 0$, $c_{i+1,i+2} = \sqrt{c^2_{i,i+i} + c^2_{i,i+2}}$, $c_{i+1,j} = c_{ij}$ pro $0 \leqq j \leqq m$, $i+1 \neq j \neq i+2$, nahlédneme snadno, že $c_{i+1} \in \mathsf{S}_m$, že $c_{i+1,j} = 0$ pro $0 \leqq j \leqq i+1$, že φ jest isometrické zobrazení prostoru S_m na S_m a že $\varphi(c_{i+1}) = c_i$. Hledané isometrické zobrazení f_{i+1} se zřejmě dostane, položíme-li $f_{i+1}(x) = \varphi_{-1}[f_i(x)]$ pro $x \in \mathsf{S}_m$.

II. Podle I (kde volíme $i = m - 1$), existuje isometrické zobrazení f' prostoru S_m na S_m takové, že buďto $f'(a) = (0, \ldots, 0, 1)$ nebo $f'(a) = (0, \ldots, 0, -1)$. Ježto existuje isometrické zobrazení h prostoru S_m na S_m takové, že $h\,(0, \ldots, 0, -1) = (0, \ldots, 0, 1)$ [stačí voliti $f(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (-x_0, -x_1, \ldots, -x_m)$], můžeme předpokládati, že $f'(a) = (0, \ldots, 0, 1)$. Podobně existuje isometrické zobrazení f'' prostoru S_m na S_m takové, že $f''(b) = (0, \ldots, 0, 1)$. Položíme-li $f(x) = f''_{-1}[f'(x)]$, dostaneme isometrické zobrazení f takové, že $f(a) = b$.

17·10·4. *Nechť $a \in \mathsf{S}_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Prostory E_m a $\mathsf{S}_m - (a)$ jsou homeomorfní.*

Důkaz. Podle **17·10·3** můžeme předpokládati, že $a = (1, 0, \ldots, 0)$. Pro $(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathsf{S}_m - (a)$ položme $f\,(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, kde

$$y_i = \frac{x_i}{1 - x_0},\quad (1 \leqq i \leqq m). \tag{1}$$

Snadno se vypočte, že rovnice (1) jsou ekvivalentní s rovnicemi

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 - 1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 + 1},\quad x_j = \frac{2y_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 + 1},\quad (1 \leqq j \leqq m). \tag{2}$$

Z toho následuje snadno, že f je prosté zobrazení prostoru $\mathsf{S}_m - (a)$ na E_m a že obě zobrazení f a f_{-1} jsou spojitá.

Cvičení.

17·1. Když P a Q jsou relativně kompaktní prostory, pak $P \times Q$ je relativně kompaktní prostor.

17·2. Když P a Q jsou kompaktní prostory, pak $P \times Q$ je kompaktní prostor.

17·3. Když množiny $A \subset P$ a $B \subset P$ jsou relativně kompaktní, pak $A + B$ je relativně kompaktní.

17·4. Když množiny $A \subset P$ a $B \subset P$ jsou kompaktní, pak $A + B$ je kompaktní.

17·5. Nechť $A \subset P$. Uzávěr $\overline{A}$ je kompaktní, když a jen když z každé bodové posloupnosti $\{x_n\}$ v A lze vybrati posloupnost konvergentní (v prostoru P; limita nemusí náležeti do A).

17·6. Nechť P je kompaktní prostor. Nechť $A_n \subset P$, $A_n \supset \overline{A}_{n+1}$. Nechť G jest okolí množiny $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Existuje index m takový, že $A_n \subset G$ pro všecka $n > m$.

17·7. Nechť Q je úplný obal metrického prostoru P. P je relativně kompaktní, když a jen když Q je kompaktní.

Metrický prostor P nazývá se *polokompaktní* (*halbkompakt*), když $P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde každý sčítanec je kompaktní.

17·8. Nechť P je polokompaktní prostor. Bodová množina $A \subset P$ je polokompaktní, když a jen když je $\mathsf{F}_\sigma(P)$.

17·9. Isolovaný metrický prostor je kompaktní, když a jen když je konečný.

17·10. Nechť $A \subset \mathsf{E}_m$, $B \subset \mathsf{E}_m$. Nechť $A \neq \emptyset \neq B$. Nechť A jest uzavřená a nechť B jest omezená. Pak existuje bod $y \in A$ takový, že

$$\varrho(y, B) = \min_{x \in A} \varrho(x, B) = \varrho(A, B).$$

17·11. Nechť $A \subset \mathsf{E}_m$, $B \subset \mathsf{E}_m$. Nechť $A \neq \emptyset \neq B$. Nechť A a B jsou uzavřené; nechť A jest omezená. Pak existují body $y_1 \in A$, $y_2 \in B$ takové, že

$$\varrho(y_1, y_2) = \min_{\substack{x_1 \in A \\ x_2 \in B}} \varrho(x_1, x_2) = \varrho(A, B).$$

17·12. Nechť f je spojité zobrazení metrického prostoru P do metrického prostoru Q. Nechť $A \subset P$ je kompaktní. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in A,\ y \in P,\ \varrho(x, y) \Leftarrow \delta < \varrho[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

Ve cvič. *17·13—17·16* P^* je Hausdorffův nadprostor prostoru P.

17·13. Když P není úplný, ani P^* není úplný.

17·14. Když P není relativně kompaktní, ani P^* není relativně kompaktní.

17·15. Když P není separabilní, ani P^* není separabilní.

17·16. Když P není kompaktní, ani P^* není kompaktní.

*17·17**. Když $P = K = \underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t \leqq 1]$, když $f_n(t) = t^n$, pak z posloupnosti $\{f_n\}$ nelze vybrati posloupnost v P^K konvergentní. Tedy P^K není kompaktní, ač K a P jsou kompaktní.

17·18. Odvoditi větu **17·6·7** přímo, bez užití vět **17·2·5**, **17·6·4** a **17·6·6**.

17·19. Odvoditi větu **16·7** z vět **16·5**, **17·2·4** a **17·6·8**.

17·20. Otevřená podmnožina lokálně kompaktního prostoru je lokálně kompaktní prostor.

17·21. Lokálně kompaktní prostor je tehdy a jen tehdy polokompaktní, když je separabilní.

17·22. Nechť platí předpoklady a označení v **17·9·2**. Nechť f je homeomorfní zobrazení prostoru P na Q — (a). Nechť $\{x_n\}$ je bodová posloupnost v P. Tehdy a jen tehdy jest $f(x_n) \to a$, když z $\{x_n\}$ nelze vybrati konvergentní posloupnost.

*17·23.** **R** (v. **9·4**) je kompaktní prostor.

17·24. Nechť $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, $a < b$, $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b]$. Když $c > 0$, $\alpha > 0$, nechť $\Psi(\alpha, c)$ znamená systém všech konečných funkcí f v oboru P takových, že

$$x \in P,\ y \in P \Rightarrow |\, f(x) - f(y) \,| \leqq c \,|\, x - y \,|^\alpha.$$

Když $\alpha > 0$, nechť $\Phi(\alpha) = \sum_{c>0} \Psi(\alpha, c)$. O funkci f v oboru P pravíme, že splňuje Lipschitzovu podmínku řádu α, když $f \in \Phi(\alpha)$. Když $f \in \Phi(\alpha)$, $\alpha > 1$, pak f je konstanta. Nechť $0 < \alpha < \beta \leqq 1$, takže $\Phi(\alpha) \supset \Phi(\beta)$. Nechť $c > 0$. Když $f_1 \in \Psi(\alpha, c)$, $f_2 \in \Psi(\alpha, c)$, nechť

$$\varrho(f_1, f_2) = \max_{x \in P} |\, f_1(x) - f_2(x) \,|.$$

Pak $\Psi(\alpha, c) = [\Psi(\alpha, c), \varrho]$ je úplný prostor. Množina

$$\Phi(\beta) \,.\, \Psi(\alpha, c)$$

je prvé kategorie ve $\Psi(\alpha, c)$. Z toho následuje podle **15·8·2**, že existuje funkce $f \in \Phi(\alpha)$ taková, že pro žádné $\beta > \alpha$ není $f \in \Phi(\beta)$. Dokonce lze dokázati, že existuje funkce, která splňuje Lipschitzovu podmínku řádu α, ale pro žádnou volbu čísla $\beta > \alpha$ a intervalu $Q = \underset{t}{\mathrm{E}}[a_1 \leqq t \leqq b_1] \subset P$ parciální funkce f_Q nesplňuje Lipschitzovu podmínku řádu β.

17·25. Vysloviti t. zv. *Borelovu* (*Heine-Borelovou*) větu. Vznikne z věty **17·2·3**, interpretujeme-li slovo *kompaktní* ve smyslu věty **17·5·4**.

KAPITOLA IV.

Míra a integrál.

§ 18. Množinová tělesa a σ-tělesa.

18·1. V celé kapitole nechť je dána pevná množina $P \neq \emptyset$. Budeme ji nazývati *prostor* (nemusí to ovšem býti metrický prostor) a její prvky budeme nazývati *body*. Body budeme značiti malými latinskými písmeny a *bodové množiny*, t. j. podmnožiny prostoru P, budeme značiti velkými latinskými písmeny. Vedle bodových množin budou se vyskytovati v našich úvahách ještě jiné množiny, jejichž prvky budou bodové množiny, tedy *systémy bodových množin;* ty budeme značiti velkými švabachovými písmeny. Specielně $\mathfrak{P}$ bude znamenati systém *všech* bodových množin, tedy všech podmnožin prostoru P.

V této kapitole budou se vyskytovati *funkce* dvojího druhu; jedny budou míti za obor bodovou množinu $A \subset P$ a budeme je nazývati *bodové funkce,* druhé budou míti za obor systém bodových množin $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ a budeme je nazývati *množinové funkce.*