v P. Tehdy a jen tehdy jest $f(x_n) \to a$, když z $\{x_n\}$ nelze vybrati konvergentní posloupnost.

*17·23.** **R** (v. **9·4**) je kompaktní prostor.

17·24. Nechť $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, $a < b$, $P = \mathop{\mathrm{E}}_t[a \leqq t \leqq b]$. Když $c > 0$, $\alpha > 0$, nechť $\Psi(\alpha, c)$ znamená systém všech konečných funkcí f v oboru P takových, že

$$x \in P,\ y \in P \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqq c\,|x - y|^\alpha.$$

Když $\alpha > 0$, nechť $\Phi(\alpha) = \sum_{c>0} \Psi(\alpha, c)$. O funkci f v oboru P pravíme, že splňuje Lipschitzovu podmínku řádu α, když $f \in \Phi(\alpha)$. Když $f \in \Phi(\alpha)$, $\alpha > 1$, pak f je konstanta. Nechť $0 < \alpha < \beta \leqq 1$, takže $\Phi(\alpha) \supset \Phi(\beta)$. Nechť $c > 0$. Když $f_1 \in \Psi(\alpha, c)$, $f_2 \in \Psi(\alpha, c)$, nechť

$$\varrho(f_1, f_2) = \max_{x \in P} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Pak $\Psi(\alpha, c) = [\Psi(\alpha, c), \varrho]$ je úplný prostor. Množina

$$\Phi(\beta) \,.\, \Psi(\alpha, c)$$

je prvé kategorie ve $\Psi(\alpha, c)$. Z toho následuje podle **15·8·2**, že existuje funkce $f \in \Phi(\alpha)$ taková, že pro žádné $\beta > \alpha$ není $f \in \Phi(\beta)$. Dokonce lze dokázati, že existuje funkce, která splňuje Lipschitzovu podmínku řádu α, ale pro žádnou volbu čísla $\beta > \alpha$ a intervalu $Q = \mathop{\mathrm{E}}_t[a_1 \leqq t \leqq b_1] \subset P$ parciální funkce f_Q nesplňuje Lipschitzovu podmínku řádu β.

17·25. Vysloviti t. zv. *Borelovu* (*Heine-Borelovou*) větu. Vznikne z věty **17·2·3**, interpretujeme-li slovo *kompaktní* ve smyslu věty **17·5·4**.

KAPITOLA IV.

Míra a integrál.

§ 18. Množinová tělesa a σ-tělesa.

18·1. V celé kapitole nechť je dána pevná množina $P \neq \emptyset$. Budeme ji nazývati *prostor* (nemusí to ovšem býti metrický prostor) a její prvky budeme nazývati *body*. Body budeme značiti malými latinskými písmeny a *bodové množiny*, t. j. podmnožiny prostoru P, budeme značiti velkými latinskými písmeny. Vedle bodových množin budou se vyskytovati v našich úvahách ještě jiné množiny, jejichž prvky budou bodové množiny, tedy *systémy bodových množin;* ty budeme značiti velkými švabachovými písmeny. Specielně $\mathfrak{P}$ bude znamenati systém *všech* bodových množin, tedy všech podmnožin prostoru P.

V této kapitole budou se vyskytovati *funkce* dvojího druhu; jedny budou míti za obor bodovou množinu $A \subset P$ a budeme je nazývati *bodové funkce,* druhé budou míti za obor systém bodových množin $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ a budeme je nazývati *množinové funkce.*

Množinovým tělesem (*Mengenkörper, corps d'ensembles*) nazveme systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ takový, že:

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;
[2] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$;
[3] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Zřejmě:

18·1·1. *$\mathfrak{P}$ je množinové těleso.*

18·1·2. *Nechť $\mathfrak{A}$ je množinové těleso. Pak $\emptyset \in \mathfrak{A}$.*

Důkaz. Podle [1] existuje $A \in \mathfrak{A}$. Podle [3] je $\emptyset = A - A \in \mathfrak{A}$.

18·1·3. *Nechť $\mathfrak{A}$ je množinové těleso. Pak*

$$A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 \,.\, A_2 \in \mathfrak{A}.$$

Neboť $A_1 \,.\, A_2 = A_1 - (A_1 - A_2)$.

18·1·4. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť:*

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;
[2] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A},\ A_1 \,.\, A_2 = \emptyset \Rightarrow A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$;
[3] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Pak $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

Důkaz. Nechť $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$. Máme dokázati, že $A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$. Podle [3] jest $A_2 - A_1 \in \mathfrak{A}$. Ježto $A_1(A_2 - A_1) = \emptyset$, podle [2] jest $A_1 + (A_2 - A_1) \in \mathfrak{A}$. Avšak $A_1 + A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$.

18·1·5. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť:*

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;
[2] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$;
[3] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A},\ A_1 \supset A_2 \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Pak $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

Důkaz. Nechť $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$. Máme dokázati, že $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$. Podle [2] jest $A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$. Ježto $A_1 + A_2 \supset A_2$, podle [3] jest $(A_1 + A_2) - A_2 \in \mathfrak{A}$. Avšak $A_1 - A_2 = (A_1 + A_2) - A_2$.

18·2. 18·2·1. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. Pak existuje* (a je zřejmě jednoznačně stanoveno) *minimální množinové těleso nad* $\mathfrak{A}$, t. j. množinové těleso $\mathfrak{T}_0$ takové, že: [1] $\mathfrak{T}_0 \supset \mathfrak{A}$; [2] když $\mathfrak{T}$ je množinové těleso a když $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{A}$, pak $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{T}_0$.

Značíme $\mathfrak{T}_0 = t(\mathfrak{A})$.

Důkaz. Podle **18·1·1** existuje aspoň jedno množinové těleso nad $\mathfrak{A}$. Tedy existuje průnik $\mathfrak{T}_0$ všech množinových těles nad $\mathfrak{A}$. Lehko se přesvědčíme, že $\mathfrak{T}_0 = t(\mathfrak{A})$.

Následující dvě věty jsou zřejmé.

18·2·2. *Nechť $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. $\mathfrak{A}$ je množinové těleso, když a jen když $\mathfrak{A} = t(\mathfrak{A})$.*

18·2·3. *Nechť $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset t(\mathfrak{A})$. Pak $t(\mathfrak{B}) = t(\mathfrak{A})$.*

Vlastnost α: Řekneme, že systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má vlastnost α, když [1] $\emptyset \in \mathfrak{A}$; [2] je-li $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, pak každá z obou množin $A_1 A_2$ a $A_1 - A_2$ je disjunktní součet konečného počtu množin systému $\mathfrak{A}$.

18·2·4. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má vlastnost α. Pak množinové těleso $t\,(\mathfrak{A})$ je systém všech disjunktních součtů konečného počtu množin systému $\mathfrak{A}$.*

Důkaz. I. Označme $\mathfrak{B}$ systém všech disjunktních součtů $\sum_{i=1}^{m} A_i$, $A_i \in \mathfrak{A}$. Máme dokázati, že $\mathfrak{B} = t(\mathfrak{A})$. Zřejmě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset t(\mathfrak{A})$, takže stačí dokázati, že $\mathfrak{B}$ je množinové těleso.

II. Nechť $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$, $BB' = \emptyset$. Jest $B = \sum_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$, $B' = \sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$. Ježto $BB' = \emptyset$, jest $B + B' = \sum_{i=1}^{m+n} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$. Tedy

$$B \in \mathfrak{B},\ B' \in \mathfrak{B},\ BB' = \emptyset \Rightarrow B + B' \in \mathfrak{B}.$$

III. Nechť $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$. Jest $B = \sum_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$, $B' = \sum_{j=1}^{n} A'_j$ s disjunktními $A'_j \in \mathfrak{A}$. Ježto $\mathfrak{A}$ má vlastnost α, jest $A_i A'_j = \sum_{k=1}^{p_{ij}} A''_{ijk}$ s disjunktními $A''_{ijk} \in \mathfrak{A}$. Zřejmě množiny A''_{ijk} $(1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq p_{ij})$ jsou disjunktní a $BB' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} A''_{ijk}$. Tedy

$$B \in \mathfrak{B},\ B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow BB' \in \mathfrak{B}.$$

IV. Nechť $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}$. Jest $B = \sum_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$, $B' = \sum_{j=1}^{n} A'_j$ s disjunktními $A'_j \in \mathfrak{A}$. Jest

$$B - B' = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (A_i - A'_j)$$

a sčítanci $\prod_{j=1}^{n} (A_i - A'_j)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou disjunktní. Ježto $\mathfrak{A}$ má vlastnost α, jest $A_i - A'_j \in \mathfrak{B}$, takže $\prod_{j=1}^{n} (A_i - A'_j) \in \mathfrak{B}$ podle III, tedy $B - B' \in \mathfrak{B}$ podle II. Tím je dokázáno, že

$$B \in \mathfrak{B},\ B' \in \mathfrak{B} \Rightarrow B - B' \in \mathfrak{B}.$$

V. $\mathfrak{B}$ je množinové těleso podle **18·1·4**, II a IV.

Systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nechť P a Q jsou dva dané prostory (t. j. dvě dané množiny $\neq \emptyset$). Nechť $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{Q}$ je systém všech podmnožin resp.

prostoru P a prostoru Q. Když $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Q}$, pak $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ znamená systém všech množin tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$.

18·2·5. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Q}$. Nechť systémy $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ mají vlastnost α. Pak systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ má vlastnost α.*

Důkaz vychází snadno z fakta, že

$$(A_1 \times A_2) \,.\, (B_1 \times B_2) = (A_1B_1) \times (A_2B_2)$$

a že je s disjunktními sčítanci

$$(A_1 \times A_2) - (B_1 \times B_2) = [(A_1 - B_1) \times A_2] + [(A_1B_1) \times (A_2 - B_2)].$$

18·3. Nechť nyní $P = \mathsf{E}_1$. Nechť $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{P}$ je systém skládající se jednak z množiny $\emptyset$, jednak ze všech jednobodových množin (a), kde $a \in \mathsf{E}_1$, jednak ze všech intervalů tvaru $\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$, kde $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$, $a < b$. Pak $\mathfrak{T}_1 = t(\mathfrak{J}_1)$ je velmi důležitý příklad množinového tělesa. Snadno se verifikuje, že $\mathfrak{J}_1$ má vlastnost α, takže podle **18·2·4** $\mathfrak{T}_1$ je systém všech disjunktních konečných součtů množin systému $\mathfrak{J}_1$. Zřejmě každý omezený interval, tedy interval kteréhokoli z tvarů

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b],\ \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t < b],\ \underset{t}{\mathrm{E}}[a < t \leqq b],\ \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b] \tag{1}$$

náleží do systému $\mathfrak{T}_1$.

Obecněji nechť $P = \mathsf{E}_m (m = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť $\mathfrak{J}_m \subset \mathfrak{P}$ je systém všech množin tvaru $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, kde $A_i \in \mathfrak{J}_1$. Nechť $\mathfrak{T}_m = t(\mathfrak{J}_m)$. Z **18·2·5** vychází indukcí, že systém $\mathfrak{J}_m$ má vlastnost α, takže podle **18·2·4** množinové těleso $\mathfrak{T}_m$ je systém všech disjunktních konečných součtů množin systému $\mathfrak{J}_m$.

18·4. *Množinovým σ-tělesem* (*σ-Körper*) nazveme systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ takový, že:

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;

[2] $A_n \in \mathfrak{A}\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$;

[3] $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Následující dvě věty jsou zřejmé.

18·4·1. *Množinové σ-těleso je množinové těleso.*

18·4·2. *$\mathfrak{P}$ je množinové σ-těleso.*

18·4·3. *Nechť $\mathfrak{A}$ je množinové σ-těleso. Pak*

$$A_n \in \mathfrak{A}\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Neboť

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n).$$

18·4·4. *Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť*

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;

[2] *pro každou disjunktní posloupnost* $\{A_n\}_1^\infty$, $A_n \in \mathfrak{A}$, *jest* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$;

[3] $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Pak $\mathfrak{A}$ *je množinové* σ*-těleso.*

Důkaz. Podle [1] a [3] je $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Nechť $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1A_2 = \emptyset$. Pro $n \geqq 3$ položme $A_n = \emptyset$; pak je $A_1 + A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, tedy $A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$ podle [2]. Tedy $\mathfrak{A}$ je množinové těleso podle **18·1·4.** Nechť $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Máme dokázati, že $S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Položme $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ježto $\mathfrak{A}$ je množinové těleso, je $B_n \in \mathfrak{A}$. Avšak $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ a součet napravo je disjunktní, takže $S \in \mathfrak{A}$ podle [2].

18·4·5. *Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. *Nechť*:

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$;

[2] $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$;

[3] $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \supset A_2 \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$.

Pak $\mathfrak{A}$ *je množinové* σ*-těleso.*

Důkaz. Nechť $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$. Máme dokázati, že $A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$. To plyne z **18·1·5.**

18·5. 18·5·1. *Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. *Pak existuje minimální množinové* σ*-těleso nad* $\mathfrak{A}$.

Značíme je $\tau(\mathfrak{A})$. Důkaz jako u věty **18·2·1.**

Následující tři věty jsou zřejmé:

18·5·2. *Nechť* $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. $\mathfrak{A}$ *je množinové* σ*-těleso, když a jen když* $\mathfrak{A} = \tau(\mathfrak{A})$.

18·5·3. *Nechť* $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset \tau(\mathfrak{A})$. *Pak* $\tau(\mathfrak{B}) = \tau(\mathfrak{A})$.

18·5·4. *Nechť* $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. *Pak* $t(\mathfrak{A}) \subset \tau(\mathfrak{A})$.

18·5·5. *Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, *má následující vlastnost: Je-li* $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, *pak* $A_1A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A'_i$, $A_1 - A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A''_i$, *kde* $A'_i \in \mathfrak{A}$, $A''_i \in \mathfrak{A}$ *a oba součty jsou disjunktní. Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{A})$. *Nechť* $\mathfrak{C}$ *má následující vlastnosti:* [1] *Když součet* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ *je disjunktní a když* $C_n \in \mathfrak{C}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}$. [2] *Když* $C_n \in \mathfrak{C}$ *a* $C_n \supset C_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *pak* $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}$. *Pak jest* $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{A})$.

Důkaz. I. Řekneme, že $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}$ má: [1] vlastnost φ_1, když $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{E}$; [2] vlastnost φ_2, když je $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{E}$, kdykoli součet nalevo je disjunktní a sčítanci E_n náležejí do $\mathfrak{E}$; [3] vlastnost φ_3, když $\prod_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{E}$, kdykoli $E_n \supset E_{n+1}$ a $E_n \in \mathfrak{E}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Podle předpokladu $\mathfrak{C}$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3. Tedy existuje průnik $\mathfrak{C}_0$ všech systémů $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}$ s vlastnostmi φ_1, φ_2 a φ_3 a jest $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{A})$, tedy (v. **18·5·3**) $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{C}_0) = \tau(\mathfrak{C})$. Zřejmě $\mathfrak{C}_0$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3. Stačí dokázati, že $\mathfrak{C}_0$ je množinové σ-těleso, neboť pak $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{C}_0) = \mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{C}) = \tau(\mathfrak{A})$, tedy $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{A})$.

II. Zvolme množinu $A \in \mathfrak{A}$ a označme $\mathfrak{C}_1$ systém všech množin $C \in \mathfrak{C}_0$ takových, že $AC \in \mathfrak{C}_0$. Jest $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_0$. Když $A_1 \in \mathfrak{A}$, pak $A_1 \in \mathfrak{C}_0$ podle vlastnosti φ_1 systému $\mathfrak{C}_0$. Podle předpokládané vlastnosti systému $\mathfrak{A}$ jest $A_1 A = \sum_{i=1}^{\infty} A'_i$ s disjunktními $A'_i \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}_0$. Tedy $A_1 A \in \mathfrak{C}_0$, ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnost φ_2. Tedy $A_1 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 A \in \mathfrak{C}_0$, tedy $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}_1$, t. j. $\mathfrak{C}_1$ má vlastnost φ_1. Ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnosti φ_2 a φ_3, zřejmě i $\mathfrak{C}_1$ má tyto vlastnosti. Tedy $\mathfrak{C}_1$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3, takže $\mathfrak{C}_1 \supset \mathfrak{C}_0$. Ježto také $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_0$, jest $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_0$. Tím je dokázáno, že

$$A \in \mathfrak{A},\ C \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow AC \in \mathfrak{C}_0.$$

III. Označme $\mathfrak{C}_2$ systém všech množin $C \in \mathfrak{C}_0$ takových, že

$$\Gamma \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow C\Gamma \in \mathfrak{C}_0.$$

Jest $\mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{C}_0$. Ve II bylo dokázáno, že $\mathfrak{C}_2$ má vlastnost φ_1. Ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnost φ_2 a φ_3, zřejmě i $\mathfrak{C}_2$ má tyto vlastnosti. Tedy $\mathfrak{C}_2$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3, takže $\mathfrak{C}_2 \supset \mathfrak{C}_0$. Ježto také $\mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{C}_0$, jest $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_0$. Tím je dokázáno, že

$$C_1 \in \mathfrak{C}_0,\ C_2 \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow C_1 C_2 \in \mathfrak{C}_0.$$

IV. Nechť $C_n \in \mathfrak{C}_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Položme $E_1 = C_1$, $E_{n+1} = C_{n+1} \,.\, E_n$. Pak $T = \prod_{n=1}^{\infty} C_n = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ a $E_n \supset E_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Podle III soudíme indukcí, že $E_n \in \mathfrak{C}_0$ pro všecka n. Ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnost φ_3, je $T \in \mathfrak{C}_0$. Tím je dokázáno, že

$$C_n \in \mathfrak{C}_0\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_0.$$

V. Zvolme množinu $A \in \mathfrak{A}$ a označme $\mathfrak{C}_3$ systém všech $C \in \mathfrak{C}_0$ takových, že $A - C \in \mathfrak{C}_0$. Jest $\mathfrak{C}_3 \subset \mathfrak{C}_0$. Když $A' \in \mathfrak{A}$, pak $A' \in \mathfrak{C}_0$ podle vlastnosti φ_1 systému $\mathfrak{C}_0$. Podle předpokládané vlastnosti systému $\mathfrak{A}$ jest $A - A' = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}_0$. Tedy

$A - A' \in \mathfrak{C}_0$, ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnost φ_2. Tedy $A' \in \mathfrak{A} \Rightarrow A - A' \in \mathfrak{C}_0$, tedy $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}_3$, t. j. $\mathfrak{C}_3$ má vlastnost φ_1.

Nechť součet $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ je disjunktní a nechť $C_n \in \mathfrak{C}_3$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak $A - C_n \in \mathfrak{C}_0$, takže podle IV je $\prod_{n=1}^{\infty} (A - C_n) \in \mathfrak{C}_0$. Ale $\prod_{n=1}^{\infty} (A - C_n) =$ $= A - \sum_{n=1}^{\infty} C_n$, tedy $A - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_0$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_3$, t. j. $\mathfrak{C}_3$ má vlastnost φ_2.

Nechť $C_n \in \mathfrak{C}_3$, $C_n \supset C_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, takže $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_0$ podle vlastnosti φ_3 systému $\mathfrak{C}_0$. Ježto $C_n \in \mathfrak{C}_3$, jest $A - C_n \in \mathfrak{C}_0$, takže podle III je $C_n(A - C_{n+1}) = AC_n - C_{n+1} \in \mathfrak{C}_0$. Ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnost φ_2 a ježto $(A - C_1)\,(AC_n - C_{n+1}) = \emptyset$, $(AC_n - C_{n+1})\,(AC_m - C_{m+1}) = \emptyset$ pro $1 \leqq n < m$, jest $(A - C_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (AC_n - C_{n+1}) \in \mathfrak{C}_0$. Avšak $(A - C_1)$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} (AC_n - C_{n+1}) = A - \prod_{n=1}^{\infty} C_n$. Tedy $A - \prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_0$, tedy $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}_3$, t. j. $\mathfrak{C}_3$ má vlastnost φ_3.

Tedy $\mathfrak{C}_3$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3, takže $\mathfrak{C}_3 \supset \mathfrak{C}_0$. Ježto také $\mathfrak{C}_3 \subset \mathfrak{C}_0$, jest $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_0$. Tím je dokázáno, že

$$A \in \mathfrak{A},\ C \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow A - C \in \mathfrak{C}_0.$$

VI. Označme $\mathfrak{C}_4$ systém všech $C \in \mathfrak{C}_0$ takových, že

$$\Gamma \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow C - \Gamma \in \mathfrak{C}_0.$$

Jest $\mathfrak{C}_4 \subset \mathfrak{C}_0$. Podle V $\mathfrak{C}_4$ má vlastnost φ_1. Ježto $\mathfrak{C}_0$ má vlastnosti φ_2 a φ_3, zřejmě i $\mathfrak{C}_4$ má tyto vlastnosti. Tedy $\mathfrak{C}_4$ má vlastnosti φ_1, φ_2 a φ_3, takže $\mathfrak{C}_4 \supset \mathfrak{C}_0$. Ježto také $\mathfrak{C}_4 \subset \mathfrak{C}_0$, jest $\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_0$. Tím je dokázáno, že

$$C_1 \in \mathfrak{C}_0,\ C_2 \in \mathfrak{C}_0 \Rightarrow C_1 - C_2 \in \mathfrak{C}_0.$$

VII. Z vlastnosti φ_2 systému $\mathfrak{C}_0$ a ze VI následuje podle **18·4·4**, že $\mathfrak{C}_0$ je množinové σ-těleso.

18·6. V tomto odstavci P je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *Borelova množina* (určitěji Borelova množina v prostoru P) nebo že A je $\mathbf{B}(P)$, když A náleží do minimálního množinového σ-tělesa nad systémem všech uzavřených podmnožin prostoru P. Řekneme, že $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ je *borelovská base* prostoru P, když $\tau(\mathfrak{A})$ je systém všech Borelových množin.

18·6·1. *Když P je metrický prostor, pak systém všech uzavřených* *množin, systém všech otevřených množin, systém všech* $\mathbf{G}_\delta$ *a systém všech* $\mathbf{F}_\sigma$ *jsou borelovské base.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{G}_\delta$, $\mathfrak{B}$ znamená resp. systém všech uzavřených množin, systém všech otevřených množin, systém všech $\mathbf{F}_\sigma$, systém všech $\mathbf{G}_\delta$, systém všech Borelových množin. Máme dokázati, že

$$\tau(\mathfrak{F}) = \tau(\mathfrak{G}) = \tau(\mathfrak{F}_\sigma) = \tau(\mathfrak{G}_\delta) = \mathfrak{B}.$$

Jest $\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{B}$ podle definice systému $\mathfrak{B}$. Ježto $\mathfrak{B}$ je množinové σ-těleso, je $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_\sigma \subset \mathfrak{B} = \tau(\mathfrak{F})$, tedy $\tau(\mathfrak{F}_\sigma) = \mathfrak{B}$ podle **18·5·3**. Podle **13·3·5** je $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}_\sigma$, tedy $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}$, takže podle **18·4·3** je $\mathfrak{G}_\delta \subset \mathfrak{B}$. Tedy podle **13·2** je $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}_\delta \subset \mathfrak{B} = \tau(\mathfrak{F})$, tedy $\tau(\mathfrak{G}_\delta) = \mathfrak{B}$ podle **18·5·3**. Podle **18·4·3** je $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_\delta \subset \tau(\mathfrak{G})$, takže podle **18·5·3** je $\tau(\mathfrak{G}) = \tau(\mathfrak{G}_\delta) = \mathfrak{B}$.

18·6·2. *Nechť P a Q jsou metrické prostory. Nechť množina B_1 je* $\mathbf{B}(P)$; *nechť množina B_2 je* $\mathbf{B}(Q)$. *Pak množina $B_1 \times B_2$ je* $\mathbf{B}(P \times Q)$.

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ a $\mathfrak{G}_{12}$ znamená systém všech otevřených množin resp. v P, v Q a v $P \times Q$. Nechť $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ a $\mathfrak{B}_{12}$ znamená systém všech Borelových množin resp. v P, v Q a v $P \times Q$. Definujeme-li systém $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ jako v odst. **18·2** (str. 127), máme dokázati, že

$$(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \subset \mathfrak{B}_{12}. \tag{1}$$

II. Zvolme $G \in \mathfrak{G}_1$ a označme $\mathfrak{B}'_2$ systém všech těch $B \in \mathfrak{B}_2$, pro něž $G \times B \in \mathfrak{B}_{12}$. Podle cvič. *8·13* je $\mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{B}'_2$. Snadno se dokáže, že $\mathfrak{B}'_2$ je množinové σ-těleso. Tedy $\mathfrak{B}'_2 \supset \tau(\mathfrak{G}_2)$, t. j. (v. **18·6·1**) $\mathfrak{B}'_2 \supset \mathfrak{B}_2$. Ježto také $\mathfrak{B}'_2 \subset \mathfrak{B}_2$, jest $\mathfrak{B}'_2 = \mathfrak{B}_2$. Tím je dokázáno, že

$$G \in \mathfrak{G}_1,\ B \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow G \times B \in \mathfrak{B}_{12}.$$

III. Zvolme $B_0 \in \mathfrak{B}_2$ a označme $\mathfrak{B}'_1$ systém všech těch $B \in \mathfrak{B}_1$, pro něž $B \times B_0 \in \mathfrak{B}_{12}$. Podle II je $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{B}'_1$. Snadno se dokáže, že $\mathfrak{B}'_1$ je množinové σ-těleso. Tedy $\mathfrak{B}'_1 \supset \tau(\mathfrak{G}_1) = \mathfrak{B}_1$. Ježto také $\mathfrak{B}'_1 \subset \mathfrak{B}_1$, je $\mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B}_1$. Tím je dokázáno, že $B \in \mathfrak{B}_1$, $B_0 \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow B \times B_0 \in \mathfrak{B}_{12}$, t. j. že platí (1).

18·6·3. *Nechť P a Q jsou separabilní prostory. Nechť $\mathfrak{A}_1$ je borelovská base v P; nechť $\mathfrak{A}_2$ je borelovská base v Q. Pak* $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ (v. odst. **18·2**, str. 127) *je borelovská base v $P \times Q$.*

Důkaz. I. Nechť symboly $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_{12}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_{12}$ mají stejný význam jako v předešlém důkaze, podle něhož jest $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \subset \mathfrak{B}_{12}$, tedy $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \subset \mathfrak{B}_{12}$. Ježto $\mathfrak{B}_{12}$ je množinové σ-těleso, je tudíž $\tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \subset \mathfrak{B}_{12}$, takže stačí dokázati, že také $\mathfrak{B}_{12} \subset \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Ježto $\mathfrak{B}_{12} = \tau(\mathfrak{G}_{12})$ podle **18·6·1**, stačí dokázati, že $\mathfrak{G}_{12} \subset \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$.

II. Ježto P a Q jsou separabilní, existují posloupnosti $\{G'_n\}_1^\infty$ a $\{G''_n\}_1^\infty$, jejichž členy tvoří otevřenou basi resp. prostoru P a prostoru Q. Podle cvič. *16·8* množiny $G'_m \times G''_n$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$ tvoří otevřenou basi prostoru $P \times Q$.

III. Zvolme $A \in \mathfrak{A}_1$ a označme $\mathfrak{B}'_2$ systém těch $B \in \mathfrak{B}_2$, pro něž $A \times B \in \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Zřejmě $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{B}'_2$. Snadno se dokáže, že $\mathfrak{B}'_2$ je množinové σ-těleso, takže $\mathfrak{B}'_2 \supset \tau(\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{B}_2$. Ježto také $\mathfrak{B}'_2 \subset \mathfrak{B}_2$, je $\mathfrak{B}'_2 = \mathfrak{B}_2$. Tedy

$$A \in \mathfrak{A}_1,\ n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow A \times G''_n \in (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2).$$

IV. Zvolme index n a označme $\mathfrak{B}'_1$ systém těch $B \in \mathfrak{B}_1$, pro něž $B \times G''_n \in \tau\ (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$. Podle III jest $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}'_1$. Snadno se dokáže, že $\mathfrak{B}'_1$ je množinové σ-těleso, takže $\mathfrak{B}'_1 \supset \tau(\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{B}_1$. Ježto také $\mathfrak{B}'_1 \subset \mathfrak{B}_1$, je $\mathfrak{B}'_1 = \mathfrak{B}_1$. Tedy $G'_m \times G''_n \in \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ pro každý pár indexů m a n.

V. Ježto $G'_m \times G''_n \in \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, ježto množiny $G'_m \times G''_n$ tvoří spočetnou otevřenou basi prostoru $P \times Q$ a ježto $\tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ je množinové σ-těleso, podle **16·1·1** je $\mathfrak{G}_{12} \subset \tau(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$.

18·6·4. *Nechť* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *Systém* $\mathfrak{J}_m$ (v. odst. **18·3**) *je borelovská base prostoru* E_m.

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{G}_1$ a $\mathfrak{B}_1$ znamená resp. systém všech otevřených a systém všech Borelových množin prostoru E_1. Nechť $\mathfrak{J}'_1$ je systém všech intervalů tvaru $\underset{t}{\mathrm{E}}[r < t < s]$, kde r a s jsou racionální čísla a $r < s$. Lehko se dokáže, že $\mathfrak{J}'_1$ je spočetná otevřená base prostoru E_1, z čehož následuje snadno, že $\mathfrak{J}'_1 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \tau(\mathfrak{J}'_1)$, tedy $\tau(\mathfrak{J}'_1) = \tau(\mathfrak{G}_1) = \mathfrak{B}_1$ (v. **18·6·1**). Ježto $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}'_1$, jest $\tau(\mathfrak{J}_1) \supset \tau(\mathfrak{J}'_1)$. Na druhé straně je patrné, že $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{B}_1$, tedy $\tau(\mathfrak{J}_1) \subset \mathfrak{B}_1$. Tedy $\tau(\mathfrak{J}_1) = \mathfrak{B}_1$.

II. Věta je tedy správná pro $m = 1$. Indukcí se dokáže podle **18·6·3**, že je správná pro každé m.

Cvičení.

Ve cvičeních *18·1—18·8* P je metrický prostor.

18·1. Systém všech omezených množin je množinové těleso.

18·2. Systém všech množin, které jsou v P současně uzavřené i otevřené, je množinové těleso.

18·3. Systém všech množin, které jsou současně $\mathsf{F}_\sigma(P)$ i $\mathsf{G}_\delta(P)$, je množinové těleso.

18·4. Systém všech množin, které jsou současně $\mathsf{G}_{\delta\sigma}(P)$ i $\mathsf{F}_{\sigma\delta}(P)$, je množinové těleso.

18·5. Systém všech řídce rozložených množin je množinové těleso.

18·6. Systém všech řídkých množin je množinové těleso.

18·7. Systém všech množin prvé kategorie je množinové σ-těleso.

18·8. Systém všech množin s řídkou hranicí je množinové těleso.

18·9. Systém $\mathfrak{K}$ všech konečných bodových množin je množinové těleso. Množinové σ-těleso $\tau(\mathfrak{K})$ je systém všech spočetných bodových množin.

18·10. Když systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ je takový, že

[1] $\mathfrak{A} \neq \emptyset$,

[2] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A},\ A_1A_2 = \emptyset \Rightarrow A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$,

[3] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A},\ A_1 \supset A_2 \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}$,

pak $\mathfrak{A}$ nemusí býti množinové těleso. To se dá ukázati už příkladem, ve kterém prostor P je konečný.

Pravíme, že systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má největší prvek M, když: [1] $M \in \mathfrak{A}$; [2] $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \subset M$.

18·11. Nechť systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má největší prvek M. Nechť

[1] $A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 + A_2 \in \mathfrak{A}$,

[2] $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow M - A \in \mathfrak{A}$.
Pak $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

18·12. Nechť $\mathfrak{A}$ je množinové těleso. Nechť $M \subset P$. Pak systém $\mathfrak{A}_M = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{A}, X \subset M]$ je množinové těleso. Když $M \in \mathfrak{A}$, pak M je největší prvek systému $\mathfrak{A}_M$.

*18·13.** Ve cvič. *18·12* lze slovo těleso nahraditi slovem σ-těleso.

18·14. Nechť systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má největší prvek M. Nechť

$$A_1 \in \mathfrak{A}, A_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathfrak{A}.$$

Pak $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

18·15. Nechť množinové těleso $\mathfrak{A}$ má největší prvek M. Nechť

$$A_n \in \mathfrak{A}\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Pak $\mathfrak{A}$ je množinové σ-těleso.

18·16. Ve cvič. *18·14* a *18·15* nelze vynechati předpoklad existence největšího prvku.

Ve cvičeních *18·17* a *18·18* P je metrický prostor a $Q \subset P$.

18·17. Množina $A \subset Q$ je $\mathbf{B}(Q)$, když a jen když existuje množina $A_0 \subset P$ taková, že: [1] $A = QA_0$, [2] A_0 je $\mathbf{B}(P)$.

*18·18.** Nechť Q je $\mathbf{B}(P)$. Množina $A \subset Q$ je $\mathbf{B}(Q)$, když a jen když A je $\mathbf{B}(P)$.

Ve cvič. *18·19* a *18·22* jsou P a Q dva dané prostory, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ je systém podmnožin prostoru P, $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ je systém podmnožin prostoru Q, takže (v. odst. **18·2**) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ je systém podmnožin prostoru $P \times Q$.

*18·19.** $(t(\mathfrak{A}), t(\mathfrak{B})) \subset t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $(\tau(\mathfrak{A}), \tau(\mathfrak{B})) \subset \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Postup důkazu je podobný jako u věty **18·6·2**.

*18·20.** Nechť $\mathfrak{A}$ je množinové těleso. Nechť $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$, $A \in \mathfrak{A}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $A_i \neq \emptyset$. Pak existují neprázdné disjunktní množiny $A'_\lambda \in \mathfrak{A}$ $(1 \leq \lambda \leq u)$ takové, že $A = \sum_{\lambda=1}^{u} A'_\lambda$ a že každá z množin A_i je rovna součtu některých z množin A'_λ.

*18·21.** Nechť $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť $M \in \mathfrak{A}$. Nechť

$$\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \mathfrak{A}].$$

Pak jest

$$t(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in t(\mathfrak{A})], \quad \tau(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M, X \in \tau(\mathfrak{A})].$$

*18·22.** Nechť $M_1 \in \mathfrak{A}$, $M_2 \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M_1, X \in \mathfrak{A}]$, $\mathfrak{B}^* = \underset{Y}{\mathrm{E}}[Y \subset M_2, Y \in \mathfrak{B}]$.
Pak jest

$$t(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*) = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \subset M_1 \times M_2, Z \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})],$$

$$\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*) = \underset{Z}{\mathrm{E}}[Z \subset M_1 \times M_2, Z \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})].$$

§ 19. Aditivní a σ-aditivní množinové funkce.

19·1. Nechť $m = 1, 2, 3, \ldots$ Pro $1 \leq i \leq m$ nechť $c_i \in \mathbf{R}$. Když existuje index i takový, že $c_i = \infty$, když však $c_i > -\infty$ pro každé i, klademe (v celé kapitole) $\sum_{i=1}^{m} c_i = \infty$. Když existuje index i takový, že $c_i = -\infty$, když však $c_i < \infty$ pro každé i, klademe (v celé kapitole) $\sum_{i=1}^{m} c_i = -\infty$. Když existuje index i takový, že $c_i = \infty$ a také index i takový, že $c_i = -\infty$, pravíme, že součet $\sum_{i=1}^{m} c_i$ je *bezvýznamný* a rovnici $\sum_{i=1}^{m} c_i = c$ považujeme za nesprávnou pro každé $c \in \mathbf{R}$.

Nechť f je množinová funkce v oboru $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Pravíme, že funkce f jest *aditivní*, když: [1] existuje $A \in \mathfrak{A}$ taková, že $-\infty < f(A) < \infty$; [2] je-li $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ s disjunktními sčítanci ($n = 1, 2, 3, \ldots$) a je-li $A_i \in \mathfrak{A}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $A \in \mathfrak{A}$, pak $f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)$. *Když $\mathfrak{A}$ je množinové těleso*, lze podmínce [2] dáti jednodušší tvar:

$$A_1 \in \mathfrak{A},\ A_2 \in \mathfrak{A},\ A_1A_2 = \emptyset \Rightarrow f(A_1) + f(A_2) = f(A_1 + A_2).$$

19·1·1. *Nechť f je aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Pak $f(\emptyset) = 0$.*

Důkaz. Existuje $A \in \mathfrak{A}$ taková, že $f(A) \neq \pm\infty$. Jest $f(A) + f(\emptyset) = f(A + \emptyset) = f(A)$, tedy $f(\emptyset) = 0$.

19·1·2. *Nechť f je aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$.* Pak

$$f(A) = \infty \Rightarrow f(B) = \infty,\quad f(A) = -\infty \Rightarrow f(B) = -\infty.$$

Důkaz. Jest $B - A \in \mathfrak{A}$, $A \,.\, (B - A) = \emptyset$, $B = A + (B - A)$, tedy $f(B) = f(A) + f(B - A)$, takže pro $f(A) = \pm\infty$ jest $f(B) = f(A)$.

V celé kapitole klademe:

$$0 \,.\, \infty = 0 \,.\, (-\infty) = 0;\quad c \,.\, \infty = (-c) \,.\, (-\infty) = \infty,$$
$$c \,.\, (-\infty) = (-c) \,.\, \infty = -\infty \text{ pro } c \in \mathbf{E}_1,\ c > 0.$$

Zřejmá je věta:

19·1·3. *Nechť f je aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Pak cf je aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$.*

19·1·4. *Nechť f je množinová funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$. Nechť $f(A) = \infty$, $f(B) = -\infty$. Pak funkce f není aditivní.*

Důkaz. Nechť naopak f je aditivní. Jest $AB \in \mathfrak{A}$, $A - B \in \mathfrak{A}$, $B - A \in \mathfrak{A}$, $AB \,.\, (A - B) = \emptyset = AB \,.\, (B - A)$, tedy

$$f(AB) + f(A - B) = f(A) = \infty, \tag{1}$$
$$f(AB) + f(B - A) = f(B) = -\infty. \tag{2}$$

Ježto $AB \subset B$, $f(B) = -\infty$, podle **19·1·2** jest $f(AB) <$ takže, ∞ podle (1) jest $f(A - B) = \infty$. Podobně podle (2) je $f(B - A) = -\infty$. Avšak $(A - B)(B - A) = \emptyset$, takže

$$f[(A - B) + (B - A)] = f(A - B) + f(B - A) = \infty + (-\infty),$$

což je spor, neboť napravo je bezvýznamný součet.

19·1·5. *Nechť* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, $\emptyset \in \mathfrak{A}$. *Nechť* f_1 *a* f_2 *jsou aditivní množinové funkce v oboru* $\mathfrak{A}$. *Nechť pro žádnou* $A \in \mathfrak{A}$ *není ani* $f_1(A) = -f_2(A) = \infty$ *ani* $-f_1(A) = f_2(A) = \infty$. *Pak* $f_1 + f_2$ *je aditivní funkce v oboru* $\mathfrak{A}$.

Důkaz. Podle předpokladu součet $f_1(A) + f_2(A)$ není bezvýznamný pro žádnou $A \in \mathfrak{A}$. Položme $\varphi = f_1 + f_2$. Podle **19·1·1** je $\varphi(\emptyset) = 0$. Nechť $A_i \in \mathfrak{A}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $B \in \mathfrak{A}$, $B = \sum_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i). \tag{1}$$

Jest

$$\varphi(A_i) = f_1(A_i) + f_2(A_i), \quad \varphi(B) = f_1(B) + f_2(B). \tag{2}$$

Ježto f_1 a f_2 jsou aditivní, jest

$$f_1(B) = \sum_{i=1}^{m} f_1(A_i), \quad f_2(B) = \sum_{i=1}^{m} f_2(A_i). \tag{3}$$

Když z čísel $f_k(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2)$ není žádné $= \pm\infty$, plyne (1) přímo z (2) a (3). Předpokládejme, že některé z čísel

$$f_1(A_i) \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

je rovné $+\infty$. (Ostatní případy by se vyšetřily stejně.) Pak plyne snadno z prvé rovnice (3), že: předně $f_1(B) = \infty$, za druhé je $f_1(A_i) > -\infty$ pro každý index i $(1 \leqq i \leqq m)$, za třetí existuje index i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq m)$ takový, že $f_1(A_{i_0}) = \infty$. Ježto $f_1(B) = \infty$, je $f_2(B) > -\infty$, takže podle (2) je $\varphi(B) = \infty$. Ježto $f_2(B) > -\infty$, podle (3) je $f_2(A_i) > -\infty$ pro každé i $(1 \leqq i \leqq m)$. Ježto $f_1(A_i) > -\infty$, $f_2(A_i) > -\infty$, $f_1(A_{i_0}) = \infty$, podle (2) je $\varphi(A_i) > -\infty$ $(1 \leqq i \leqq m)$ a $\varphi(A_{i_0}) = \infty$. Tedy $\sum_{i=1}^{m} \varphi(A_i) = \infty$, takže platí (1).

19·2. Pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $c_i \in \mathbf{R}$. Když pro žádné $n = 1, 2, 3, \ldots$ součet $\sum_{i=1}^{n} c_i$ není bezvýznamný a když $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i = c \in \mathbf{R}$ (ve smyslu odst. **9·4**), klademe (v celé kapitole) $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = c$. V každém jiném případě pravíme, že součet $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ je *bezvýznamný* a rovnici $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = c$ považujeme za nesprávnou pro každé $c \in \mathbf{R}$.

Zřejmě: když $0 \leqq c_i \leqq \infty$ pro každé i, pak součet $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ není bezvýznamný a jest $0 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} c_i \leqq \infty$.

Nechť f je množinová funkce v oboru $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Pravíme, že f je *σ-aditivní* (také se říká *totálně* nebo *absolutně* aditivní nebo *v širším smyslu* aditivní), když: [1] f jest aditivní, [2] je-li $A = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ s disjunktními sčítanci a je-li $A_i \in \mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}$, pak $f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$. Zřejmá je věta:

19·2·1. *Nechť f je funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. f je σ-aditivní, když a jen když:* [1] $f(\emptyset) = 0$, [2] *je-li $A \in \mathfrak{A}$ a je-li $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{A}$, pak $f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$.*

19·2·2. *Nechť f je σ-aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; nechť $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Pak*

$$\lim_{n \to \infty} f(A_n) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right). \tag{4}$$

Důkaz. I. Existuje-li index p takový, že $f(A_p) = \infty$, pak podle **19·1·2** jest $f(A_n) = \infty$ pro všecka $n \geqq p$ a $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \infty$, takže relace (4) je správná. Podobně, když existuje index p takový, že $f(A_p) = -\infty$.

II. Nechť tedy $-\infty < f(A_n) < \infty$ pro všecka n. Položme $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - A_n$. Jest $B_n \in \mathfrak{A}$, $A_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ a poslední součet je disjunktní. Tedy

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(B_i) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(B_i) = \lim_{n \to \infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} f(A_n).$$

19·2·3. *Nechť f je σ-aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; nechť $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Nechť existuje* *index p takový, že* $-\infty < f(A_p) < \infty$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = f\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Důkaz. Pro $n \geqq p$ jest $A_n \subset A_p$, takže podle **19·1·2** jest $-\infty <$ $< f(A_n) < \infty$ pro všecka $n \geqq p$ a podobně také $-\infty < f\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Jest

$$A_p = \prod_{n=p}^{\infty} A_n + \sum_{n=p}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$$

a množiny $\prod_{n=p}^{\infty} A_n = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n - A_{n+1}$ $(n = p,\ p+1,\ p+2, \ldots)$ jsou disjunktní a náležejí do $\mathfrak{A}$. Tedy

$$f(A_p) = f\left(\prod_{n=p}^{\infty} A_n\right) + \sum_{n=p}^{\infty} f(A_n - A_{n+1}).$$

Ježto $A_n \supset A_{n+1}$, jest

$$f(A_n) = f(A_{n+1}) + f(A_n - A_{n+1}),$$

takže

$$f(A_p) = f\left(\prod_{n=p}^{\infty} A_n\right) + \sum_{i=p}^{\infty} [f(A_i) - f(A_{i+1})] =$$
$$= f\left(\prod_{n=p}^{\infty} A_n\right) + f(A_p) - \lim_{n\to\infty} f(A_n),$$

tedy

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n) = f\left(\prod_{n=p}^{\infty} A_n\right) = f\left(\prod_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

19·2·4. *Nechť f je konečná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nutná a postačující podmínka, aby f byla σ-aditivní, jest:*

$$A_n \in \mathfrak{A},\ A_n \supset A_{n+1},\ \prod_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim f(A_n) = 0. \tag{5}$$

Důkaz. I. Podmínka je nutná podle **18·1·2**, **19·1·1** a **19·2·3.**

II. Nechť platí (5). Nechť součet $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ je disjunktní a nechť $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Podle **19·2·1** stačí dokázati, že $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$.

Položme $B_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i$. Pak $B_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_i - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathfrak{A}$, $B_n \supset B_{n+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Tedy podle (5) jest $\lim f(B_n) = 0$. Avšak

$$f(B_n) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i - \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \sum_{i=1}^{n-1} f(A_i).$$

Tedy

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

19·3. 19·3·1. *Nechť systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má vlastnost α* (v. str. 126, dole). *Nechť f je aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Když a jen když neexistují množiny $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$ takové, že $f(A_1) = \infty$, $f(A_2) = -\infty$, existuje aditivní funkce φ v množinovém tělese $t(\mathfrak{A})$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{A}}$ jest identická s f. Existuje-li funkce φ, je stanovena jednoznačně a:* [1] *když $-\infty < f(A) < \infty$ pro každou $A \in \mathfrak{A}$, pak $-\infty < \varphi(A) < \infty$ pro každou $A \in t(\mathfrak{A})$;* [2] *když $f(A) \geqq 0$ pro každou $A \in \mathfrak{A}$, pak $\varphi(A) \geqq 0$ pro každou $A \in t(\mathfrak{A})$.*

Důkaz. I. Když existují $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_2 \in \mathfrak{A}$ takové, že $f(A_1) = \infty$, $f(A_2) = -\infty$, pak φ neexistuje podle **19·1·4**. Tedy můžeme předpokládati, že buďto

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow f(A) > -\infty \tag{1}$$

nebo

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow f(A) < \infty.$$

Pro určitost předpokládejme, že platí (1).

II. Ježto $\mathfrak{A}$ má vlastnost α, jest $\emptyset \in \mathfrak{A}$ a podle **18·2·4** ke každé množině $B \in t(\mathfrak{A})$ existují disjunktní množiny $A_i \in \mathfrak{A}$ takové, že $B = \sum_{i=1}^{m} A_i$. Pro stručnost řekněme, že $\sum_{i=1}^{m} A_i$ je *normální vyjádření* množiny $B \in t(\mathfrak{A})$. Existuje-li φ, pak

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i).$$

Tedy, když φ existuje, jest jednoznačně stanovena a: [1] když $-\infty < f(A) < \infty$ pro každou $A \in \mathfrak{A}$, pak $-\infty < \varphi(A) < \infty$ pro každou $A \in t(\mathfrak{A})$; [2] když $f(A) \geqq 0$ pro každou $A \in \mathfrak{A}$, pak $\varphi(B) \geqq 0$ pro každou $B \in t(\mathfrak{A})$.

III. Nechť $B \in t(\mathfrak{A})$ a nechť $B = \sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} A'_j$ jsou dvě normální vyjádření. Jest $A_i A'_j \in t(\mathfrak{A})$, takže existují normální vyjádření $A_i A'_j = \sum_{k=1}^{p_{ij}} C_{ijk}$. Jest

$$A_i = A_i B = \sum_{j=1}^{n} A_i A'_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} C_{ijk};$$

jest $A_i \in \mathfrak{A}$, $C_{ijk} \in \mathfrak{A}$ a množiny C_{ijk} $(1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq p_{ij})$ jsou disjunktní. Tedy, ježto funkce f jest aditivní, jest

$$f(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} f(C_{ijk}).$$

Podobně se najde, že

$$f(A'_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_{ij}} f(C_{ijk}),$$

takže

$$\sum_{i=1}^{m} f(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_{ij}} f(C_{ijk}) = \sum_{j=1}^{n} f(A'_j).$$

IV. Podle (1) a III můžeme definovati jednoznačně funkci φ v oboru $t(\mathfrak{A})$ kladouce $\varphi(B) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i)$, je-li $\sum_{i=1}^{m} A_i$ normální vyjádření množiny $B \in t(\mathfrak{A})$. Je-li $A \in \mathfrak{A}$, pak A je své vlastní normální vyjádření, tedy $\varphi(A) = f(A)$, t. j. $\varphi_{\mathfrak{A}} = f$.

V. Nechť $B \in t(\mathfrak{A})$, $B' \in t(\mathfrak{A})$, $BB' = \emptyset$. Máme dokázati, že $\varphi(B + B') = \varphi(B) + \varphi(B')$. Nechť $\sum_{i=1}^{m} A_i$ je normální vyjádření množiny B; nechť $\sum_{i=m+1}^{m+n} A_i$ je normální vyjádření množiny B'. Ježto $BB' = \emptyset$, zřejmě $\sum_{i=1}^{m+n} A_i$ je normální vyjádření množiny $B + B'$. Tedy

$$\varphi(B + B') = \sum_{i=1}^{m+n} f(A_i) = \sum_{i=1}^{m} f(A_i) + \sum_{i=m+1}^{m+n} f(A_i) = \varphi(B) + \varphi(B').$$

19·3·2. *Nechť systém $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ má vlastnost α* (v. str. 126 dole). *Nechť f je aditivní funkce v množinovém tělese $t(\mathfrak{A})$. Nechť parciální funkce $f_{\mathfrak{A}}$ je σ-aditivní. Pak f je σ-aditivní.*

Důkaz. Nechť $B_n \in t(\mathfrak{A})$, $B \in t(\mathfrak{A})$ a nechť $B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že $\sum_{n=1}^{\infty} f(B_n) = f(B)$. Pro každé n podle **18·2·4** je $B_n = \sum_{i=1}^{p_n} A_{ni}$ s disjunktními $A_{ni} \in \mathfrak{A}$ a podobně $B = \sum_{j=1}^{q} C_j$ s disjunktními $C_j \in \mathfrak{A}$. Ježto funkce f jest aditivní, jest

$$f(B_n) = \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q} f(A_{ni} C_j), \quad f(B) = \sum_{j=1}^{q} f(C_j). \tag{1}$$

Ježto $\mathfrak{A}$ má vlastnost α, jest $A_{ni}C_j = \sum_{k=1}^{r_{ijn}} D_{ijkn}$ s disjunktními $D_{ijkn} \in \mathfrak{A}$. Ježto funkce $f_{\mathfrak{A}}$ je σ-aditivní, jest

$$f(C_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{k=1}^{r_{ijn}} f(D_{ijkn}), \; f(A_{ni}C_j) = \sum_{k=1}^{r_{ijn}} f(D_{ijkn}). \tag{2}$$

Z (1) a (2) vychází, že $f(B) = \sum_{n=1}^{\infty} f(B_n)$.

Cvičení.

19·1. Položme $f_1(\emptyset) = 0$, $f_1(A) = \infty$ pro $\emptyset \neq A \subset P$. Označme $f_2(A)$ počet bodů množiny $A \subset P$, když A je konečná, a položme $f_2(A) = \infty$, když A je nekonečná. Když $A \subset P$, položme: $f_3(A) = 0$, je-li A konečná, $f_3(A) = \infty$, je-li A nekonečná, $f_4(A) = 0$, je-li A spočetná, $f_4(A) = \infty$, je-li A nespočetná. Pak f_1, f_2, f_3, f_4 jsou aditivní funkce v oboru $\mathfrak{P}$. Funkce f_1, f_2 a f_4 jsou σ-aditivní.

*19·2**. Nechť P je množina všech přirozených čísel. Když $n \in P$, $A \subset P$, nechť $f_n(A)$ znamená počet těch $i \in P$, pro něž současně $i \leq n$ a $i \in A$. Označme $\mathfrak{A}$ systém těch $A \subset P$, pro něž existuje $\lim \frac{1}{n} f_n(A)$. Když $A \in \mathfrak{A}$, položme $\varphi(A) = \lim \frac{1}{n} f_n(A)$. Pak φ je aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$.

19·3. Systém $\mathfrak{A}$ ve cvič. *19·2* není množinové těleso.

*19·4.** Nechť $\emptyset \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$. Nechť f_1 a f_2 jsou σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Nechť pro žádnou $A \in \mathfrak{A}$ není $f_1(A) = -f_2(A) = \infty$ ani $-f_1(A) = f_2(A) = \infty$. Pak $f_1 + f_2$ je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$.

19·5. Ve větě **19·2·1** nelze vynechati předpoklad, že $\mathfrak{A}$ je množinové těleso.

19·6. Ve větě **19·2·3** nelze vynechati předpoklad $-\infty < f(A_p) < \infty$.

19·7. Ve větě **19·2·4** nelze předpoklad, že funkce f je konečná, nahraditi předpokladem, že $f(A) > -\infty$ pro každou $A \in \mathfrak{A}$.

*19·8.** Nechť f je nezáporná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$. Pak $f(A) \leq f(B)$.

19·9. Nechť f je aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$. Pak funkce f je nezáporná.

*19·10.** Nechť f je nezáporná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť $A_i \in \mathfrak{A}$ $(1 \leq i \leq n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak $f\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} f(A_i)$.

§ 20. Obecná teorie míry.

20·1. V celém odstavci předpokládáme: Je dáno množinové těleso $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$; je dána konečná nezáporná σ-aditivní funkce μ v oboru $\mathfrak{A}$.

Množinu $M \subset P$ nazveme *shora μ-měřitelnou,* když existuje posloupnost $\{A_n\}_1^{\infty}$ taková, že $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset M$.

Označme $\mathfrak{M}_\mu$ systém všech shora μ-měřitelných množin. Následující dvě věty jsou zřejmé:

20·1·1. $M \in \mathfrak{M}_\mu,\ M' \subset M \Rightarrow M' \in \mathfrak{M}_\mu$.

20·1·2. $M_n \in \mathfrak{M}_\mu\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{M}_\mu$.

Z nich plyne:

20·1·3. $\mathfrak{M}_\mu$ *je množinové σ-těleso.*

Zřejmě $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$, takže podle **20·1·3**:

20·1·4. $\tau(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{M}_\mu$.

Je-li $M \in \mathfrak{M}_\mu$, označíme $|\,M\,|_\mu$ a nazveme *horní* (také se říká *vnější*) *μ-měrou množiny M* infimum množiny čísel $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, kde $\{A_n\}_1^\infty$ probíhá všecky posloupnosti takové, že $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset M$. Zřejmě

$$0 \leqq |\,M\,|_\mu \leqq \infty.$$

Následující dvě věty jsou zřejmé:

20·1·5. *Nechť* $M \in \mathfrak{M}_\mu$, $M' \subset M$. *Pak* $|\,M'\,|_\mu \leqq |\,M\,|_\mu$.

20·1·6. *Nechť* $M_n \in \mathfrak{M}_\mu\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Pak*

$$\left|\,\sum_{n=1}^{\infty} M_n\,\right|_\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\,M_n\,|_\mu.$$

Množinu $N \subset P$ nazveme *μ-nulovou,* když $N \in \mathfrak{M}_\mu$ a $|\,N\,|_\mu = 0$. Systém všech μ-nulových množin označíme $\mathfrak{N}_\mu$. Z **20·1·1** a **20·1·5** plyne:

20·1·7. $N \in \mathfrak{N}_\mu,\ N' \subset N \Rightarrow N' \in \mathfrak{N}_\mu$.

Z **20·1·2** a **20·1·6** plyne:

20·1·8. $N_n \in \mathfrak{N}_\mu\ (n=1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{N}_\mu$.

Z **20·1·7** a **20·1·8** plyne:

20·1·9. $\mathfrak{N}_\mu$ *je množinové σ-těleso.*

20·1·10. *Nechť* $A \in \mathfrak{A}$. *Pak* $|\,A\,|_\mu = \mu(A)$.

Důkaz. I. Položme $A_1 = A$, $A_n = \emptyset\ (n = 2, 3, 4, \ldots)$. Pak $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$, tedy $|\,A\,|_\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

II. Nechť $|\,A\,|_\mu < \mu(A)$; máme dojíti ke sporu. Ježto $|\,A\,|_\mu < \mu(A)$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ a číslo $c \in \mathsf{E}_1$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < c < \mu(A)$. Položme $B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i A$. Ježto $\mathfrak{A}$ je množinové těleso, je $B_n \in \mathfrak{A}$. Ježto μ je nezáporná aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$, podle cvič. *19·8* a *19·10* je $\mu(B_n) \leqq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < c$.

Ježto $A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \subset B_{n+1}$, $B_n \in \mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}$ a ježto μ je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$, podle **19·2·2** je $\mu(A) = \lim \mu(B_n)$. Ježto $\mu(B_n) < c$, je $\mu(A) \leqq c$, což je spor.

Množinu $L \subset P$ nazveme *μ-měřitelnou*, když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi posloupnost $\{A_n\}_1^{\infty}$ takovou, že $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_{\mu} < \varepsilon$.*) Označme $\mathfrak{L}_{\mu}$ systém všech μ-měřitelných množin.

20·1·11. $\mathfrak{N}_{\mu} \subset \mathfrak{L}_{\mu}$.

Důkaz. Nechť $N \in \mathfrak{N}_{\mu}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset N$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon$. Podle **20·1·5**, **20·1·6** a **20·1·10** je

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - N\right|_{\mu} \leqq \left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right|_{\mu} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|_{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Tedy $N \in \mathfrak{L}_{\mu}$.

20·1·12. *Nechť $L_n \in \mathfrak{L}_{\mu}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} L_n \in \mathfrak{L}_{\mu}$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují množiny A_{ni} $(n, i = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $A_{ni} \in \mathfrak{A}$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} \supset L_n$, $\left|\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - L_n\right|_{\mu} < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Jest $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} \supset \sum_{n=1}^{\infty} L_n$ a ježto $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - L_n\right)$, dle **20·1·5** a **20·1·6** jest $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - \sum_{n=1}^{\infty} L_n\right|_{\mu} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - L_n\right|_{\mu} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} L_n \in \mathfrak{L}_{\mu}$.

20·1·13. *Nechť $L \in \mathfrak{L}_{\mu}$, $L' \in \mathfrak{L}_{\mu}$, $L \supset L'$. Pak $L - L' \in \mathfrak{L}_{\mu}$.*

Důkaz. I. Dokažme, že

$$A \in \mathfrak{A},\ L \in \mathfrak{L}_{\mu} \Rightarrow AL \in \mathfrak{L}_{\mu}.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto $L \in \mathfrak{L}_{\mu}$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_{\mu} < \varepsilon$. Jest $AA_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} AA_n \supset AL$ a podle **20·1·5** jest $\left|\sum_{n=1}^{\infty} AA_n - AL\right|_{\mu} < \varepsilon$. Tedy $AL \in \mathfrak{L}_{\mu}$.

---

*) Ježto $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$, jest $L \in \mathfrak{M}_{\mu}$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L \in \mathfrak{M}_{\mu}$ (podle **20·1·3** a **20·1·4**), takže číslo $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_{\mu}$ je definováno.

II. Dokažme, že

$$A \in \mathfrak{A},\ L \in \mathfrak{L}_\mu,\ A \supset L \Rightarrow A - L \in \mathfrak{L}_\mu.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto $L \in \mathfrak{L}_\mu$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_\mu < \varepsilon$. Ježto μ je nezáporná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$, podle cvič. *19·8* posloupnost $\left\{\mu\left(A \,.\, \sum_{i=1}^{n} A_i\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ neklesá a jest $0 \leqq \mu\left(A \,.\, \sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leqq \mu(A) < \infty$. Tedy posloupnost $\left\{\mu\left(A \sum_{i=1}^{n} A_i\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní (v prostoru E_1), tedy je cauchyovská, takže existuje index p takový, že

$$n > p \Rightarrow 0 \leqq \mu\left(A \,.\, \sum_{i=1}^{n} A_i\right) - \mu\left(A \,.\, \sum_{i=1}^{p} A_i\right) < \varepsilon.$$

Ježto $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_\mu < \varepsilon$, existují množiny $B_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset \supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n - L$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \varepsilon$. Položme $C_1 = AA_1$, $C_{n+1} = AA_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Množiny C_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou disjunktní a náležejí do $\mathfrak{A}$. Jest $\sum_{n=p+1}^{\infty} C_n \supset A \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{p} A_n$. Avšak pro $q > p$ je

$$\sum_{n=p+1}^{q} \mu(C_n) = \mu\left(\sum_{n=p+1}^{q} C_n\right) = \mu\left(A \,.\, \sum_{n=1}^{q} A_n - A \,.\, \sum_{n=1}^{p} A_n\right) =$$
$$= \mu\left(A \,.\, \sum_{n=1}^{q} A_n\right) - \mu\left(A \,.\, \sum_{n=1}^{p} A_n\right) < \varepsilon,$$

tedy $\sum_{n=p+1}^{\infty} \mu(C_n) \leqq \varepsilon$. Jest

$$A - L \subset \left(A - \sum_{n=1}^{p} A_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right) \subset \left(A - \sum_{n=1}^{p} A_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n; \quad (1)$$

jest

$$A - \sum_{n=1}^{p} A_n \in \mathfrak{A},\ B_n \in \mathfrak{A}. \quad (2)$$

Jest

$$\left[\left(A-\sum_{n=1}^{p}A_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right]-(A-L)\subset\sum_{n=1}^{\infty}B_n+\left(AL-\sum_{n=1}^{p}A_n\right)\subset$$

$$\subset\sum_{n=1}^{\infty}B_n+\left(A\,.\sum_{n=1}^{\infty}A_n-\sum_{n=1}^{p}A_n\right)\subset\sum_{n=1}^{\infty}B_n+\sum_{n=p+1}^{\infty}C_n,$$

tedy

$$\left|\left[\left(A-\sum_{n=1}^{p}A_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right]-(A-L)\right|_{\mu}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)+\sum_{n=p+1}^{\infty}\mu(C_n)<2\varepsilon. \quad (3)$$

Podle (1), (2), (3) a ježto číslo $\varepsilon>0$ je libovolné, jest $A-L\in\mathfrak{L}_{\mu}$.

III. Nechť nyní $L\in\mathfrak{L}_{\mu}$, $L'\in\mathfrak{L}_{\mu}$, $L\supset L'$. Zvolme $\varepsilon>0$. Ježto $L\in\mathfrak{L}_{\mu}$, existují množiny $A_n\in\mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\supset L$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}A_n-L\right|_{\mu}<\varepsilon$. Podle I jest $A_nL'\in\mathfrak{L}_{\mu}$, takže podle II je $A_n-L'=A_n-A_nL'\in\mathfrak{L}_{\mu}$. Tedy existují množiny $B_{ni}\in\mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}\supset A_n-L'$, $\left|\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}-(A_n-L')\right|_{\mu}<\frac{\varepsilon}{2^n}$. Ježto $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}\supset\sum_{n=1}^{\infty}A_n-L'\supset L-L'$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}-(L-L')\subset\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n-L\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}-(A_n-L')\right]$, podle **20·1·5** a **20·1·6** jest

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}-(L-L')\right|_{\mu}\leqq\left|\sum_{n=1}^{\infty}A_n-L\right|_{\mu}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}B_{ni}-(A_n-L')\right|_{\mu}<\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

Ježto $\varepsilon>0$ je libovolné, jest $L-L'\in\mathfrak{L}_{\mu}$.

Z vět **18·4·5**, **20·1·12** a **20·1·13** následuje:

20·1·14. *$\mathfrak{L}_{\mu}$ je množinové σ-těleso.*

20·1·15. *Jest $\tau(\mathfrak{A})\subset\mathfrak{L}_{\mu}$.*

Důkaz. Podle **20·1·14** stačí dokázati, že $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{L}_{\mu}$. Když $A\in\mathfrak{A}$, položme $A_1=A$, $A_n=\emptyset$ pro $n=2,3,4,\ldots$ Pak jest $A_n\in\mathfrak{A}$ a podle **19·1·1** a **20·1·10** jest

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}A_n-A\right|_{\mu}=|\,\emptyset\,|_{\mu}=\mu(\emptyset)=0,$$

takže $A\in\mathfrak{L}_{\mu}$.

20·1·16. *Nechť $L\in\mathfrak{L}_{\mu}$. Pak existuje posloupnost $\{L_n\}$ taková, že:*

[1] $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$, [2] *množiny* L_n *jsou disjunktní,* [3] $0 \leqq |L_n|_\mu < \infty$, [4] $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = L$.

Důkaz. Existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$. Položme $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak jest $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset L$ a množiny B_n jsou disjunktní. Ježto $\mathfrak{A}$ je množinové těleso, jest $B_n \in \mathfrak{A}$. Položme $L_n = LB_n$. Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = L$ s disjunktními sčítanci a podle **20·1·14** a **20·1·15** jest $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$. Podle **20·1·5** a **20·1·10** jest $0 \leqq |L_n|_\mu \leqq |B_n|_\mu = \mu(B_n) < \infty$.

Poznámka. Je-li dáno množinové těleso $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}_\mu$ takové, že $L \in \mathfrak{K}$ a že $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow AL \in \mathfrak{K}$, pak podle našeho důkazu je také $L_n \in \mathfrak{K}$.

Horní μ-míra množiny $L \in \mathfrak{L}_\mu$ se nazývá krátce *μ-míra* množiny L.

20·1·17. *μ-míra jest σ-aditivní funkce v oboru* $\mathfrak{L}_\mu$.

Důkaz. I. Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$, $L' \in \mathfrak{L}_\mu$, $LL' = \emptyset$. Dokažme, že $|L + L'|_\mu = |L|_\mu + |L'|_\mu$. Předpokládejme opak. Podle **20·1·6** jest $|L + L'|_\mu < |L|_\mu + |L'|_\mu$, takže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$|L + L'|_\mu + 6\varepsilon < |L|_\mu + |L'|_\mu.$$

Ježto $L \in \mathfrak{L}_\mu$, $L' \in \mathfrak{L}_\mu$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$, $A'_n \in \mathfrak{A}$ takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L,\quad \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \supset L',\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right|_\mu < \varepsilon,\quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} A'_n - L'\right|_\mu < \varepsilon. \tag{4}$$

Položme

$$B_1 = A_1,\ B'_1 = A'_1 - A_1,\ B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(A_i + A'_i),$$

$$B'_{n+1} = \left[A'_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(A_i + A'_i)\right] - A_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pak jest $B_n \in \mathfrak{A}$, $B'_n \in \mathfrak{A}$, systém všech množin

$$B_n,\ B'_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

je disjunktní, dále jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \tag{5}$$

a konečně jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A'_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} B'_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A'_n. \tag{6}$$

Podle (4) a (5) jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \subset L + L' + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A'_n - L'\right),$$

takže podle (4), **20·1·5** a **20·1·6** jest pro všecky indexy p, q

$$\left|\sum_{n=1}^{p} B_n + \sum_{n=1}^{q} B'_n\right|_\mu < |L + L'|_\mu + 2\varepsilon.$$

Avšak (v. **20·1·10**)

$$\left|\sum_{n=1}^{p} B_n + \sum_{n=1}^{q} B'_n\right|_\mu = \mu\left(\sum_{n=1}^{p} B_n + \sum_{n=1}^{q} B'_n\right) = \sum_{n=1}^{p} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{q} \mu(B'_n),$$

takže $\sum_{n=1}^{p} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{q} \mu(B'_n) < |L + L'|_\mu + 2\varepsilon$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B'_n) \leqq |L + L'|_\mu + 2\varepsilon. \tag{7}$$

Podle (4) a **20·1·5** a ježto $LL' = \emptyset$, jest $\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} A'_n\right|_\mu < 2\varepsilon$, takže existují množiny $C_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} C_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < 2\varepsilon$. Podle (4) a (6) jest $L \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n$, tedy $|L|_\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + 2\varepsilon$. Podobně $|L'|_\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B'_n) + 2\varepsilon$, takže ze (7) následuje, že

$$|L|_\mu + |L'|_\mu \leqq |L + L'|_\mu + 6\varepsilon,$$

což je spor.

II. Nechť $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$, $L \in \mathfrak{L}_\mu$ a $L = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že $|L|_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |L_n|_\mu$. Předpokládejme opak. Podle **20·1·6** jest $|L|_\mu < \sum_{n=1}^{\infty} |L_n|_\mu$, takže existuje index p takový, že $L|_\mu < \sum_{n=1}^{p} |L_n|_\mu$. Avšak podle I je $\sum_{n=1}^{p} |L_n|_\mu = \left|\sum_{n=1}^{p} L_n\right|_\mu$; ježto $\sum_{n=1}^{p} L_n \subset L$, podle **20·1·5** dostáváme spor

$$|L|_\mu < \sum_{n=1}^{p} |L_n|_\mu = \left|\sum_{n=1}^{p} L_n\right|_\mu \leqq |L|_\mu.$$

20·1·18. *Ke každé* $M \in \mathfrak{M}_\mu$ existuje $L \in \tau(\mathfrak{A})$ taková, že

$$M \subset L, \quad | M |_\mu = | L |_\mu.$$

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existují množiny $A_{ni} \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $\sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} \supset M$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ni}) \leqq | M |_\mu + \frac{1}{n}$, takže (v. **20·1·6** a **20·1·10**)

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} \right|_\mu \leqq | M |_\mu + \frac{1}{n}.$$

Položme $L_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni}$. Pak jest $L_n \in \tau(\mathfrak{A})$ a $M \subset L_n$, $| L_n |_\mu \leqq | M |_\mu + \frac{1}{n}$. Položme $L = \prod_{i=1}^{\infty} L_n$. Pak jest $L \in \tau(\mathfrak{A})$ (v. **18·4·3**) a $M \subset L \subset L_n$, takže podle **20·1·5** jest $| M |_\mu \leqq | L |_\mu \leqq | M |_\mu + \frac{1}{n}$, tedy $| L |_\mu = | M |_\mu$.

20·1·19. *Nechť* $M \in \mathfrak{M}_\mu$, $| M |_\mu < \infty$. *Nechť existuje množina* $L \in \mathfrak{L}_\mu$ *taková, že* $L \subset M$ a že $| M |_\mu = | L |_\mu$. *Pak jest* $M \in \mathfrak{L}_\mu$.

Důkaz. Podle **20·1·15** a **20·1·18** existuje množina $L' \in \mathfrak{L}_\mu$ taková, že $M \subset L'$ a že $| M |_\mu = | L' |_\mu$. Tedy $L \subset L'$ a $| L |_\mu = | L' |_\mu < \infty$. Podle **20·1·14** jest $L' - L \in \mathfrak{L}_\mu$, takže podle **20·1·17** jest $| L' |_\mu = | L' - L |_\mu + | L |_\mu$, tedy $| L' - L |_\mu = 0$. Ježto $M \subset L'$, jest $M - L \subset L' - L$, takže podle **20·1·7** a **20·1·11** je $M - L \in \mathfrak{L}_\mu$, tedy $M = L + (M - L) \in \mathfrak{L}_\mu$ podle **20·1·14**.

20·1·20. *Nechť* $M_n \in \mathfrak{M}_\mu$, $M_n \subset M_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. *Pak*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu = \lim | M_n |_\mu.$$

Důkaz. Podle **20·1·5** jest $| M_n |_\mu \leqq | M_{n+1} |_\mu \leqq \left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu$, takže $\lim | M_n |_\mu$ existuje a jest $\left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu \geqq \lim | M_n |_\mu$. Podle **20·1·18** existují množiny $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$ takové, že $M_n \subset L_n$ a $| M_n |_\mu = | L_n |_\mu$. Položme $L'_n = \prod_{i=n}^{\infty} L_i$. Pak jest $L'_n \in \mathfrak{L}_\mu$ (v. **18·4·3** a **20·1·14**) a $M_n \subset L'_n \subset L_n$, takže (v. **20·1·5**) jest $| M_n |_\mu = | L'_n |_\mu$. Jest $L'_n \subset L'_{n+1}$, takže podle **19·2·2**, **20·1·14** a **20·1·17** jest $\left| \sum_{n=1}^{\infty} L'_n \right|_\mu = \lim | L'_n |_\mu = \lim | M_n |_\mu$. Avšak $\sum_{n=1}^{\infty} L'_n \supset \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tedy (v. **20·1·5**) $\left| \sum_{n=1}^{\infty} L'_n \right|_\mu \geqq$

$\geqq \left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu$, takže $\left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu \leqq \lim | M_n |_\mu$. Ježto také $\left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu \geqq$ $\geqq \lim | M_n |_\mu$, jest $\left| \sum_{n=1}^{\infty} M_n \right|_\mu = \lim | M_n |_\mu$.

20·1·21. *Nechť* $M \in \mathfrak{M}_\mu$. *Existuje* $L \in \mathfrak{L}_\mu$ *taková, že* $M \subset L$ *a že pro každou* $X \in \mathfrak{L}_\mu$ jest $| MX |_\mu = | LX |_\mu$.

Důkaz. Existuje posloupnost $\{A_n\}_1^\infty$ taková, že $A_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset M$. Položme $B_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Pak jest $B_n \in \mathfrak{A}$, $B_n \subset B_{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset M$. Podle **20·1·1** jest $MB_n \in \mathfrak{M}_\mu$, takže podle **20·1·18** existují množiny $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$ takové, že $MB_n \subset L_n$, $| MB_n |_\mu = | L_n |_\mu$. Položme $L'_n = \prod_{i=n}^{\infty} L_i$. Pak $L'_n \in \mathfrak{L}_\mu$ (v. **18·4·3** a **20·1·14**) a $MB_n \subset L'_n \subset L_n$, takže $| MB_n |_\mu =$ $= | L'_n |_\mu$ (v. **20·1·5**). Položme $L = \sum_{n=1}^{\infty} L'_n$. Jest $M = \sum_{n=1}^{\infty} MB_n \subset L$ a $L \in \mathfrak{L}_\mu$.

Zvolme $X \in \mathfrak{L}_\mu$. Jest $MB_n \subset L'_n$, takže podle **20·1·5** jest

$$| MB_n - X |_\mu + | MB_n X |_\mu \leqq | L'_n - X |_\mu + | L'_n X |_\mu.$$

Avšak podle **20·1·14** jest $L'_n - X \in \mathfrak{L}_\mu$, $L'_n X \in \mathfrak{L}_\mu$, takže podle **20·1·17** jest

$$| L'_n - X |_\mu + | L'_n X |_\mu = | L'_n |_\mu = | MB_n |_\mu. \tag{8}$$

Tedy $| MB_n - X |_\mu + | MB_n X |_\mu \leqq | MB_n |_\mu$. Podle **20·1·6** je také $| MB_n - X |_\mu + | MB_n X |_\mu \geqq | MB_n |_\mu$, takže

$$| MB_n - X |_\mu + | MB_n X |_\mu = | MB_n |_\mu. \tag{9}$$

Podle **20·1·5** a **20·1·10** jest

$$C \in \mathfrak{M}_\mu,\ C \subset B_n \Rightarrow 0 \leqq | C |_\mu \leqq | B_n |_\mu = \mu(B_n) < \infty,$$

takže podle (8) a (9) a ježto $MB_n \subset L'_n$,

$$| MB_n X |_\mu = | MB_n |_\mu - | MB_n - X |_\mu \geqq | L'_n |_\mu - | L'_n - X |_\mu = \\ = | L'_n X |_\mu. \tag{10}$$

Ježto $B_n \subset B_{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset M$, $L'_n \subset L'_{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} L'_n = L$, podle **20·1·20** jest

$$| MX |_\mu = \lim | MB_n X |_\mu, \quad | LX |_\mu = \lim | L'_n X |_\mu,$$

takže podle (10) jest $| MX |_\mu \geqq | LX |_\mu$. Ježto $M \subset L$, podle **20·1·5** je také $| MX |_\mu \leqq | LX |_\mu$, takže $| MX |_\mu = | LX |_\mu$.

20·1·22. *Nechť* $M \subset P$. *Nutnou a postačující podmínkou, aby bylo* $M \in \mathfrak{L}_\mu$, *jest existence množin* C *a* N *takových, že* $C = M + N$, $C \in \tau(\mathfrak{A})$, $N \in \mathfrak{N}_\mu$.

Důkaz. I. Podmínka stačí podle **20·1·7**, **20·1·11**, **20·1·14** a **20·1·15**.

II. Nechť $M \in \mathfrak{L}_\mu$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existují množiny $A_{ni} \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $M \subset \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni}$, $\left| \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - M \right|_\mu < \frac{1}{n}$. Položme $C = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni}$, $N = C - M$. Pak jest $M \subset C$, tedy $C = M + N$, dále $C \in \tau(\mathfrak{A})$ (v. **18·4·3**), konečně pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $N \subset \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni} - M$, takže podle **20·1·1** a **20·1·5** jest $N \in \mathfrak{M}_\mu$, $|N|_\mu < \frac{1}{n}$ pro všecka n, tedy $|N|_\mu = 0$, t. j. $N \in \mathfrak{N}_\mu$.

20·1·23. *Nechť $M \subset P$. Nutnou a postačující podmínkou, aby bylo $M \in \mathfrak{L}_\mu$, jest existence množin C a N takových, že $M = C + N$, $C \in \tau(\mathfrak{A})$, $N \in \mathfrak{N}_\mu$.*

Důkaz. I. Podmínka stačí podle **20·1·11**, **20·1·14** a **20·1·15**.

II. Nechť $M \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak $M \in \mathfrak{M}_\mu$, takže existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset M$. Jest $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \tau(\mathfrak{A})$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} A_n - M \in \mathfrak{L}_\mu$ podle **20·1·14** a **20·1·15**. Podle **20·1·22** existují množiny D a K takové, že $D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - M \right) + K$, $D \in \tau(\mathfrak{A})$, $K \in \mathfrak{N}_\mu$. Položme $D_0 = D \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $N = KM \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak jest $D_0 \in \tau(\mathfrak{A})$ a (v. **20·1·7**) $N \in \mathfrak{N}_\mu$. Položme $C = \sum_{n=1}^{\infty} A_n - D_0$. Pak je $C \in \tau(\mathfrak{A})$ a lehko se přesvědčíme, že $M = C + N$.

20·2. Nechť opět $\mathfrak{A}$ je dané množinové těleso a μ je daná konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Pro $L \in \mathfrak{L}_\mu$ položme $\varphi(L) = |L|_\mu$. Pak platí (v. **20·1·10** a **20·1·17**):

[1] *φ je σ-aditivní funkce;*

[2] *parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{A}}$ jest identická s μ;*

[3] *φ je nezáporná funkce.*

20·2·1. *V oboru $\mathfrak{L}_\mu$ je μ-míra jednoznačně stanovena vlastnostmi* [1], [2], [3].

Důkaz. I. Dokažme napřed, že pro každou $L \in \mathfrak{L}_\mu$ je $\varphi(L) \leqq |L|_\mu$. Nechť naopak $\varphi(L) > |L|_\mu$. Pak existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \varphi(L)$. Položme $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak jest $B_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} B_i$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset L$ a součet

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ je disjunktní. Podle cvič. *19·10* je $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geqq \mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) =$ $= \mu\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_i)$, tedy $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i) < \varphi(L)$. Ježto φ je σ-aditivní v oboru $\mathfrak{L}_\mu$, jest $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, tedy $\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) < \varphi(L)$. To je spor, neboť $\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\right) \geqq \varphi(L)$ podle cvič. *19·8*.

II. Nechť pro nějakou $L \in \mathfrak{L}_\mu$ jest $\varphi(L) \neq |L|_\mu$. Podle I jest $\varphi(L) < |L|_\mu$. Jako v I určeme disjunktní množiny $B_n \in \mathfrak{A}$ tak, že $L \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Jest $LB_n \in \mathfrak{L}_\mu$ a $L = \sum_{n=1}^{\infty} LB_n$ s disjunktními sčítanci. Tedy $\varphi(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(LB_n)$, $|L|_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |LB_n|_\mu$. Podle I je $\varphi(LB_n) \leqq |LB_n|_\mu$. Ježto $\varphi(L) < |L|_\mu$, existuje index p takový, že $\varphi(LB_p) < |LB_p|_\mu$. Podle I je $0 \leqq \varphi(B_p - LB_p) \leqq |B_p - LB_p|_\mu \leqq \mu(B_p) < \infty$, tedy

$$\mu(B_p) = \varphi(B_p) = \varphi(LB_p) + \varphi(B_p - LB_p) < |LB_p|_\mu + |B_p - LB_p|_\mu = |B_p|_\mu = \mu(B_p),$$

což je spor.

Vlastnostmi [1] a [2] není μ-míra vždy jednoznačně stanovena v oboru $\mathfrak{L}_\mu$ (v. cvič. *20·7*); avšak (sr. **20·1·15**):

20·2·2. *V oboru $\tau(\mathfrak{A})$ je μ-míra jednoznačně stanovena vlastnostmi* [1] a [2].

Důkaz. I. Zvolme $A \in \mathfrak{A}$ a dokažme, že

$$C \in \tau(\mathfrak{A}),\ C \subset A \Rightarrow \varphi(C) = |C|_\mu.$$

Položme $\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A, X \in \mathfrak{A}]$. Podle cvič. *18·21* je $\tau(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset A, X \in \tau(\mathfrak{A})]$. Položme $\mathfrak{C} = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \tau(\mathfrak{A}^*), \varphi(X) = |X|_\mu]$. Zřejmě $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{A}^*)$. Máme dokázati, že $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{A}^*)$.

Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$ a nechť součet $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ je disjunktní. Pak $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(C_n)$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right|_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|_\mu$, $\varphi(C_n) = |C_n|_\mu$, tedy $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right|_\mu$, t. j. $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}$.

Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$, $C_n \supset C_{n+1}$. Jest $\varphi(C_1) = |C_1|_\mu$; ježto $C_1 \subset A$, $|A|_\mu = \mu(A) \neq \pm\infty$, podle **19·1·2** je $|C_1|_\mu \neq \pm\infty$. Tedy podle

19·2·3 je $\varphi\left(\prod_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim \varphi(C_n)$, $\left|\prod_{n=1}^{\infty} C_n\right|_\mu = \lim |\, C_n \,|_\mu$. Ježto $\varphi(C_n) =$ $= |\, C_n \,|_\mu$, je $\varphi\left(\prod_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \left|\prod_{n=1}^{\infty} C_n\right|_\mu$, t. j. $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{C}$.

Nyní vychází z **18·5·5**, že $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{A}^*)$.

II. Nechť $C \in \tau(\mathfrak{A})$. Pak $C \in \mathfrak{M}_\mu$, takže existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset C$. Položme $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak jest $B_n \in \mathfrak{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \supset C$ a součet $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ je disjunktní. Tedy $C = \sum_{n=1}^{\infty} CB_n$ s disjunktními sčítanci, takže $\varphi(C) =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(CB_n)$, $|\, C \,|_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |\, CB_n \,|_\mu$. Podle I je však $\varphi(CB_n) = |\, CB_n \,|_\mu$, takže $\varphi(C) = |\, C \,|_\mu$.

V předcházejícím důkaze bylo užito nezápornosti funkce μ pouze pro *existenci* funkce s vlastnostmi [1] a [2]. Tedy platí obecnější věta:

20·2·3. *Když f je konečná σ-aditivní množinová funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$, pak existuje nejvýš jedna σ-aditivní množinová funkce φ v oboru $\tau(\mathfrak{A})$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{A}}$ jest identická s f.*

20·3. V tomto odst. jsou P a Q dva dané prostory (t. j. dvě dané množiny $\neq \emptyset$). $\mathfrak{P}$ je systém všech podmnožin prostoru P; $\mathfrak{Q}$ je systém všech podmnožin prostoru Q. Předpokládejme, že je dáno množinové těleso $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ a konečná aditivní funkce μ_1 v oboru $\mathfrak{A}$, dále množinové těleso $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Q}$ a konečná aditivní funkce μ_2 v oboru $\mathfrak{B}$. Později připojíme předpoklad, že funkce μ_1 a μ_2 jsou nezáporné a σ-aditivní.

Definujme konečnou množinovou funkci μ_{12} v oboru $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (v. odst. **18·2**) takto:

$$A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mu_{12}(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B).$$

20·3·1. *μ_{12} je aditivní funkce v oboru $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{B}$ $(1 \leqq i \leqq m)$; nechť

$$A \times B = \sum_{i=1}^{m} (A_i \times B_i) \text{ s disjunktními sčítanci.} \tag{1}$$

Máme dokázati, že

$$\mu_1(A) \cdot \mu_2(B) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_i) \cdot \mu_2(B_i). \tag{2}$$

Zřejmě stačí, provedeme-li důkaz za předpokladu, že $A_i \neq \emptyset \neq B_i$ pro

$1 \leqq i \leqq m$. Pak z (1) snadno následuje, že $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{m} B_i$. Ježto $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ jsou množinová tělesa, podle cvič. *18·20* existují disjunktní množiny $A'_\lambda \in \mathfrak{A}$ $(1 \leqq \lambda \leqq u)$ a disjunktní množiny $B'_\nu \in \mathfrak{B}$ $(1 \leqq \nu \leqq v)$ takové, že $A'_\lambda \neq \emptyset$, že $B'_\nu \neq \emptyset$, že $A = \sum_{\lambda=1}^{u} A'_\lambda$, $B = \sum_{\nu=1}^{v} B'_\nu$, a že pro každé i existuje podmnožina U_i množiny U složené z čísel $1, 2, \ldots, u$ a podmnožina V_i množiny V složené z čísel $1, 2, \ldots, v$ takové, že

$$A_i = \sum_{\lambda \in U_i} A'_\lambda, \quad B_i = \sum_{\nu \in V_i} B'_\nu.$$

Tedy

$$A_i \times B_i = \sum_{(\lambda, \nu) \in (U_i \times V_i)} (A'_\lambda \times B'_\nu) \text{ s disjunktními sčítanci,}$$

takže podle (1)

$$A \times B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{(\lambda, \nu) \in (U_i \times V_i)} (A'_\lambda \times B'_\nu)$$

s disjunktními sčítanci. Mimo to je však také

$$A \times B = \sum_{(\lambda, \nu) \in (U \times V)} (A'_\lambda \times B'_\nu)$$

a jest $A'_\lambda \times B'_\nu \neq \emptyset$. Porovnáním následuje, že

$$U \times V = \sum_{i=1}^{m} (U_i \times V_i) \text{ s disjunktními sčítanci.}$$

Ježto μ_1 a μ_2 jsou aditivní, je

$$\mu_1(A_i) = \sum_{\lambda \in U_i} \mu_1(A'_\lambda), \quad \mu_2(B_i) = \sum_{\nu \in V_i} \mu_2(B'_\nu),$$

takže

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_i) \cdot \mu_2(B_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{(\lambda, \nu) \in (U_i \times V_i)} \mu_1(A'_\lambda) \cdot \mu_2(B'_\nu) =$$

$$= \sum_{(\lambda, \nu) \in (U \times V)} \mu_1(A'_\lambda) \cdot \mu_2(B'_\nu) = \sum_{\lambda=1}^{u} \mu_1(A'_\lambda) \cdot \sum_{\nu=1}^{v} \mu_2(B'_\nu).$$

Avšak

$$\mu_1(A) = \sum_{\lambda=1}^{u} \mu_1(A'_\lambda), \quad \mu_2(B) = \sum_{\nu=1}^{v} \mu_2(B'_\nu),$$

takže platí (2).

Systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ má podle **18·2·5** vlastnost α. Tedy podle **19·3·1** a **20·3·1** lze určiti právě jedním způsobem konečnou aditivní funkci φ v množinovém tělese $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ tak, že parciální funkce $\varphi_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}$ jest identická s μ_{12}. Bez obavy z nedorozumění budeme psáti μ_{12} místo φ, takže nyní μ_{12} je množinová funkce v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

V následujícím předpokládáme, že μ_1 je konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$ a že μ_2 je konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{B}$.

20·3·2. *μ_{12} je konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

*Důkaz.**) I. μ_{12} je konečná nezáporná aditivní funkce v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ podle **19·3·1**. Zbývá dokázati, že μ_{12} je σ-aditivní v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

II. Podle **19·3·2** stačí dokázati, že μ_{12} je σ-aditivní v oboru $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nechť tedy $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, $A_n \in \mathfrak{A}$, $B_n \in \mathfrak{B}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a nechť

$$A \times B = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \text{ s disjunktními sčítanci.} \tag{3}$$

Máme dokázati, že

$$\mu_1(A) \,.\, \mu_2(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n). \tag{4}$$

Předpokládejme opak. Pro každý index p je $\mu_{12}\left(\sum_{n=1}^{p} A_n \times B_n\right) =$

$= \sum_{n=1}^{p} \mu_{12}(A_n \times B_n) = \sum_{n=1}^{p} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n)$; ježto $\sum_{n=1}^{p} A_n \times B_n \subset A \times B$,

podle cvič. *19·8* je tedy $\sum_{n=1}^{p} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n) \leqq \mu_1(A) \,.\, \mu_2(B)$. Tedy, ježto rovnici (4) máme za nesprávnou, musí býti levá strana větší než pravá. Ježto funkce μ_1 a μ_2 jsou nezáporné a konečné, existuje tedy $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n) < \mu_1(A) \,.\, [\mu_2(B) - \varepsilon].$$

III. Podle cvič. *3·14* existuje prostá posloupnost $\{\varphi_h\}_1^{\infty}$, jejíž členy tvoří právě systém všech konečných stoupajících posloupností přirozených čísel. Je-li

$$\varphi_h = \{k_i\}_{i=1}^{m}, \tag{5}$$

rozeznávejme dva případy podle toho, zda jest či není

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_2(B_{k_i}) \geqq \mu_2(B) - \varepsilon. \tag{6}$$

*) V. Z. Lomnicky et S. Ulam, Fundam. Math. XXIII, 1934, str. 247 až 249.

V prvém případě položme $C_h = \prod_{i=1}^{m} A_{k_i}$, ve druhém $C_h = \emptyset$, takže $C_h \in \mathfrak{A}$ pro každé h.

IV. Položme $D_1 = C_1$, $D_{h+1} = C_{h+1} - \sum_{r=1}^{h} C_r$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak je $D_h \in \mathfrak{A}$, množiny D_h $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou disjunktní a $\sum_{h=1}^{\infty} D_h = \sum_{h=1}^{\infty} C_h$.

V. Při daném indexu h a při označení (5) nechť v součtu $\sum_{n}^{(h)}$ probíhá n právě hodnoty $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Při daném indexu n nechť v součtu $\sum_{h}^{[n]}$ probíhá h právě ty hodnoty, pro něž při označení (5) některé z čísel k_i $(1 \leqq i \leqq m)$ je rovné n.

VI. Při daném n pro každý z indexů h v součtu

$$\sum_{h}^{[n]} \mu_1(D_h)$$

est $D_h \subset C_h \subset A_n$. Ježto množiny D_h jsou disjunktní, jest (v. cvič. *19·8*)

$$\sum_{h}^{[n]} \mu_1(D_h) \leqq \mu_1(A_n),$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)\, \mu_2(B_n) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(B_n) \,.\, \sum_{h}^{[n]} \mu_1(D_h).$$

Ježto μ_1 a μ_2 jsou nezáporné funkce, je dovoleno napravo vyměniti pořádek sumací, takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n)\, \mu_2(B_n) \geqq \sum_{h=1}^{\infty} \mu_1(D_h) \,.\, \sum_{n}^{(h)} \mu_2(B_n). \tag{7}$$

Při označení (5) jest

$$\sum_{n}^{(h)} \mu_2(B_n) = \sum_{i=1}^{m} \mu_2(B_{k_i}).$$

Je-li $D_h \neq \emptyset$, je také $C_h \neq \emptyset$, takže platí (6), z čehož plyne

$$\mu_1(D_h) \,.\, \sum_{n}^{(h)} \mu_2(B_n) \geqq \mu_1(D_h) \,.\, [\mu_2(B) - \varepsilon], \tag{8}$$

a to platí ovšem (v. **19·1·1**) i v případě $D_h = \emptyset$. Ze (7) a (8) následuje, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n) \geqq [\mu_2(B) - \varepsilon] \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} \mu_1(D_h). \tag{9}$$

VII. Zvolme bod $x \in A$ a označme N_x množinu těch indexů n, pro něž je $x \in A_n$. Vylučme triviální případ $B = \emptyset$, takže ze (3) plyne, že $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, takže $N_x \neq \emptyset$.

Předpokládejme nejprve, že množina N_x je konečná. Pak existuje index h takový, že při označení (5) množina N_x se skládá právě z čísel k_i $(1 \leqq i \leqq m)$. Ze (3) a z definice množiny N_x následuje snadno, že množiny B_{k_i} $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou disjunktní a že $\sum_{i=1}^{m} B_{k_i} = B$, takže $\sum_{i=1}^{m} \mu_2(B_{k_i}) = \mu_2(B)$, takže platí (6). Tedy jest $C_h = \prod_{i=1}^{m} A_{k_i}$, tedy jest $x \in C_h$.

Obraťme se k případu, kdy množina N_x je nekonečná. Pak existuje stoupající posloupnost $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$, jejíž členy tvoří právě množinu N_x. Ze (3) následuje opět snadno, že množiny B_{k_i} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou disjunktní a že $\sum_{i=1}^{\infty} B_{k_i} = B$. Ježto μ_2 je konečná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{B}$, jest $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_{k_i}) = \mu_2(B)$, takže existuje index m takový, že platí (6). Existuje index h takový, že platí (5), načež jest opět $C_h = \prod_{i=1}^{m} A_{k_i}$ a $x \in C_h$.

Tedy ke každému $x \in A$ existuje index h takový, že $x \in C_h$, t. j. $A \subset \sum_{h=1}^{\infty} C_h$. Zřejmě je také $\sum_{h=1}^{\infty} C_h \subset A$, tedy $\sum_{h=1}^{\infty} C_h = A$, takže (v. IV) $A = \sum_{h=1}^{\infty} D_h$ s disjunktními sčítanci. Ježto μ_1 je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$, je $\sum_{h=1}^{\infty} \mu_1(D_h) = \mu_1(A)$, takže (9) dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n) \geqq \mu_1(A) \,.\, [\mu_2(B) - \varepsilon],$$

což je spor.

Podle **20·3·2** můžeme všecky výsledky odst. **20·1** aplikovati nejen na funkce μ_1 a μ_2, nýbrž i na funkci μ_{12}. Pro jednoduchost pišme

$$|A|_1, \ |B|_2, \ |C|_{12}, \ \mathfrak{M}_1, \ \mathfrak{M}_2, \ \mathfrak{M}_{12}, \ \mathfrak{L}_1, \ \mathfrak{L}_2, \ \mathfrak{L}_{12}, \ \mathfrak{N}_1, \ \mathfrak{N}_2, \ \mathfrak{N}_{12}$$

resp. místo

$$|A|_{\mu_1}, \ |B|_{\mu_2}, \ |C|_{\mu_{12}}, \ \mathfrak{M}_{\mu_1}, \ \mathfrak{M}_{\mu_2}, \ \mathfrak{M}_{\mu_{12}}, \ \mathfrak{L}_{\mu_1}, \ \mathfrak{L}_{\mu_2}, \ \mathfrak{L}_{\mu_{12}}, \ \mathfrak{N}_{\mu_1}, \ \mathfrak{N}_{\mu_2}, \ \mathfrak{N}_{\mu_{12}}.$$

V následujícím jest $0 \,.\, \infty = \infty \,.\, 0 = 0$ a $c \,.\, \infty = \infty \,.\, c = \infty$ pro $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

20·3·3. *Nechť* $X \in \tau(\mathfrak{A})$, $Y \in \tau(\mathfrak{B})$. *Pak*

$$|X \times Y|_{12} = |X|_1 . |Y|_2. \tag{10}$$

Důkaz. I. Podle **20·1·15** a podle cvič. *18·19* jest $X \in \mathfrak{L}_1$, $Y \in \mathfrak{L}_2$, $X \times Y \in \mathfrak{L}_{12}$, takže obě strany rovnice (10) mají význam. Podle **20·1·10** rovnice (10) je správná, když $X \in \mathfrak{A}$, $Y \in \mathfrak{B}$.

II. Zvolme $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Položme $\mathfrak{A}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{A},\ X \subset A]$, $\mathfrak{B}^* = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{B},\ X \subset B]$. Podle cvič. *18·21* je $\tau(\mathfrak{A}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \tau(\mathfrak{A}),\ X \subset A]$, $\tau(\mathfrak{B}^*) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \tau(\mathfrak{B}),\ X \subset B]$. Zvolme $B_0 \in \mathfrak{B}^*$ a označme $\mathfrak{A}'$ systém těch $X \in \tau(\mathfrak{A}^*)$, pro něž $|X|_1 . |B_0|_2 = |X \times B_0|_{12}$. Jest $\mathfrak{A}' \subset \tau(\mathfrak{A}^*)$ a podle I jest $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}'$. Nechť $X_n \in \mathfrak{A}'$ a nechť $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ s disjunktními sčítanci. Jest $|X_n|_1 . |B_0|_2 = |X_n \times B_0|_1$ a podle **20·1·17** jest $|X|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|_1$, $|X \times B_0|_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} |X_n \times B_0|_{12}$, takže $X \in \mathfrak{A}'$. Nechť $X_n \in \mathfrak{A}'$, $X_n \supset X_{n+1}$, $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Podle **20·1·5** a **20·1·10** jest $0 \leqq |X_1|_1 \leqq |A|_1 = \mu_1(A) < \infty$, tedy $0 \leqq |X_1|_1 . |B_0|_2 \leqq \mu_1(A) . \mu_2(B_0) < \infty$. Jest $|X_n|_1 . |B_0|_2 = |X_n \times B_0|_{12}$ a podle **19·2·3** a **20·1·14** jest $|X|_1 = \lim |X_n|_1$, $|X \times B_0|_{12} = \lim |X_n \times B_0|_{12}$, takže $X \in \mathfrak{A}'$. Ježto $\mathfrak{A}^*$ je množinové těleso, soudíme z **18·5·5**, že $\mathfrak{A}' = \tau(\mathfrak{A}^*)$, tedy že

$$X \in \tau(\mathfrak{A}^*),\ B_0 \in \mathfrak{B}^* \Rightarrow |X|_1 . |B_0|_2 = |X \times B_0|_{12}.$$

Zvolme $X \in \tau(\mathfrak{A}^*)$ a označme $\mathfrak{B}'$ systém těch $Y \in \tau(\mathfrak{B}^*)$, pro něž $|X|_1 . |Y|_2 = |X \times Y|_{12}$. Jest $\mathfrak{B}' \subset \tau(\mathfrak{B}^*)$ a právě bylo dokázáno, že $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}'$. Nechť $Y_n \in \mathfrak{B}'$ a nechť $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ s disjunktními sčítanci. Jest $|X|_1 . |Y_n|_2 = |X \times Y_n|_{12}$ a podle **20·1·17** jest $|Y|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Y_n|_2$, $|X \times Y|_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} |X \times Y_n|_{12}$, takže $Y \in \mathfrak{B}'$. Nechť $Y_n \in \mathfrak{B}'$, $Y_n \supset Y_{n+1}$, $Y = \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$. Podle **20·1·5** a **20·1·10** jest $0 \leqq |X|_1 \leqq |A|_1 = \mu_1(A) < \infty, 0 \leqq |Y_1|_2 \leqq |B|_2 = \mu_2(B) < \infty$, tedy $0 \leqq |X|_1 . |Y_1|_2 < \infty$. Jest $|X|_1 . |Y_n|_2 = |X \times Y_n|_{12}$ a podle **19·2·3** a **20·1·17** jest $|Y|_2 = \lim |Y_n|_2$, $|X \times Y|_{12} = \lim |X \times Y_n|_{12}$, takže $Y \in \mathfrak{B}'$. Nyní vychází z **18·5·5**, že $\mathfrak{B}' = \tau(\mathfrak{B}^*)$.

Tím je dokázáno, že rovnice (10) je správná, když existují množiny $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ takové, že $X \subset A$, $Y \subset B$.

III. Nechť $X \in \tau(\mathfrak{A})$, $Y \in \tau(\mathfrak{B})$. Pak jest $X \in \mathfrak{M}_1$, $Y \in \mathfrak{M}_2$, takže

existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ a $B_n \in \mathfrak{B}$ takové, že $X \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $Y \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_n$.
Jest $\sum_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A}$, $\sum_{j=1}^{n} B_j \in \mathfrak{B}$, takže podle II je pro všecky indexy n

$$\left| X \sum_{i=1}^{n} A_i \right|_1 \cdot \left| Y \sum_{j=1}^{n} B_j \right|_2 = \left| X \sum_{i=1}^{n} A_i \times Y \sum_{j=1}^{n} B_j \right|_{12}.$$

Avšak podle **19·2·2** a **20·1·17** jest

$$| X |_1 = \lim \left| X \sum_{i=1}^{n} A_i \right|_1, \quad | Y |_2 = \lim \left| Y \,.\, \sum_{j=1}^{n} B_j \right|_2,$$

$$| X \times Y |_{12} = \lim \left| X \sum_{i=1}^{n} A_i \times Y \sum_{j=1}^{n} B_j \right|_{12}.$$

Tedy platí (10).

20·3·4. *Nechť* $X \in \mathfrak{M}_1$, $Y \in \mathfrak{N}_2$ *nebo* $X \in \mathfrak{N}_1$, $Y \in \mathfrak{M}_2$. *Pak jest* $X \times Y \in \mathfrak{N}_{12}$.

Důkaz. Pro určitost předpokládejme, že $X \in \mathfrak{M}_1$, $Y \in \mathfrak{N}_2$. Ježto $X \in \mathfrak{M}_1$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{A}$ takové, že $X \subset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle **20·1·18** existuje množina $Z \in \tau(\mathfrak{B})$ taková, že $Y \subset Z$ a $| Z |_2 = 0$. Podle **20·3·3** jest $| A_n \times Z |_{12} = 0$, takže podle **20·1·8** jest $\left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \times Z \right|_{12} = 0$. Tedy podle **20·1·7** je $| X \times Y |_{12} = 0$, t. j. $X \times Y \in \mathfrak{N}_{12}$.

20·3·5. *Jest* $\tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{L}_{12}$ *a*

$$L_1 \in \mathfrak{L}_1,\ L_2 \in \mathfrak{L}_2 \Rightarrow | L_1 |_1 \,.\, | L_2 |_2 = | L_1 \times L_2 |_{12}.$$

Důkaz. Nechť $L_1 \in \mathfrak{L}_1$, $L_2 \in \mathfrak{L}_2$. Podle **20·1·23** existují množiny $C_1 \in \tau(\mathfrak{A})$, $C_2 \in \tau(\mathfrak{B})$, $N_1 \in \mathfrak{N}_1$, $N_2 \in \mathfrak{N}_2$ takové, že $L_1 = C_1 + N_1$, $L_2 = C_2 + N_2$. Pak jest $L_1 \times L_2 = (C_1 \times C_2) + (C_1 \times N_2) + (N_1 \times C_2) + (N_1 \times N_2)$. Prvý sčítanec náleží do $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (v. cvič. *18·19*) a ostatní sčítanci podle **20·3·4** náležejí do $\mathfrak{N}_{12}$, takže $L_1 \times L_2 \in \mathfrak{L}_{12}$ podle **20·1·11**, **20·1·14** a **20·1·15**. Podle **20·1·5** a **20·1·6** jest

$$| C_1 |_1 \leqq | L_1 |_1 \leqq | C_1 |_1 + | N_1 |_1 = | C_1 |_1,$$

takže $| L_1 |_1 = | C_1 |_1$, a stejně se dokáže, že $| L_2 |_2 = | C_2 |_2$ a $| L_1 \times L_2 |_{12} = | C_1 \times C_2 |_{12}$. Avšak podle **20·3·3** jest $| C_1 \times C_2 |_{12} = | C_1 |_1 | C_2 |_2$, takže $| L_1 \times L_2 |_{12} = | L_1 |_1 \,.\, | L_2 |_2$. Ježto bylo dokázáno, že $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{L}_{12}$, jest $\tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{L}_{12}$ podle **20·1·14**.

Když $C \subset P \times Q$ a když $x \in P$, $y \in Q$, položme

$$\sigma'_y(C) = \underset{x}{\mathrm{E}}[(x, y) \in C], \quad \sigma''_x(C) = \underset{y}{\mathrm{E}}[(x, y) \in C],$$

takže

$$\sigma'_y(C) \subset P, \quad \sigma''_x(C) \subset Q,$$

$$C = \sum_{x \in P} [(x) \times \sigma''_x(C)] = \sum_{y \in Q} [\sigma'_y(C) \times (y)].$$

20·3·6. *Nechť* $L \in \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. *Pak*

$$\begin{aligned} y \in Q &\Rightarrow \sigma'_y(L) \in \mathfrak{L}_1, \\ x \in P &\Rightarrow \sigma''_x(L) \in \mathfrak{L}_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Důkaz. Označme $\mathfrak{K}$ systém těch $L \in \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, pro něž platí (11). Máme dokázati, že $\mathfrak{K} = \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$. Zřejmě $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) \subset \mathfrak{K} \subset \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, takže stačí dokázati, že $\mathfrak{K}$ je množinové σ-těleso, což plyne snadno z **20·1·14.**

20·3·7. *Nechť* $L \in \mathfrak{M}_{12}$. *Pak*

$$\begin{aligned} y \in Q &\Rightarrow \sigma'_y(L) \in \mathfrak{M}_1, \\ x \in P &\Rightarrow \sigma''_x(L) \in \mathfrak{M}_2. \end{aligned}$$

Důkaz. Ježto $L \in \mathfrak{M}_{12}$, existuje posloupnost $\{C_n\}_1^\infty$ taková, že $C_n \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \supset L$. Podle **18·2·5** systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ má vlastnost α, takže podle **18·2·4** pro každé n existují konečné posloupnosti $\{A_{ni}\}_{i=1}^{k_n}$ a $\{B_{ni}\}_{i=1}^{k_n}$ takové, že $A_{ni} \in \mathfrak{A}$, $B_{ni} \in \mathfrak{B}$ a $C_n = \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} \times B_{ni}$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} \times B_{ni} \supset L$, takže

$$y \in Q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} \supset \sigma'_y(L) \in \mathfrak{M}_1$$

a podobně $x \in P \Rightarrow \sigma''_x(L) \in \mathfrak{M}_2$.

20·3·8. *Nechť* $M \in \mathfrak{M}_{12}$. *Pak existuje* $A \in \tau(\mathfrak{A})$ *taková, že* $M \subset A \times Q$.

Důkaz. Jest $M \subset \sum_{n=1}^{\infty} C_n$, kde $C_n \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Jest (v. **18·2·4** a **18·2·5**) $C_n = \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} \times B_{ni}$, kde $A_{ni} \in \mathfrak{A}$, $B_{ni} \in \mathfrak{B}$. Tedy $M \subset A \times Q$, kde $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} \in \tau(\mathfrak{A})$.

20·4. Nechť nyní $P = \mathbf{E}_1$. Definujme $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{P}$ a $\mathfrak{T}_1 = t(\mathfrak{J}_1)$ jako v odst. **18·3.** Systém $\mathfrak{J}_1$ se skládá jednak z množiny $\emptyset$ a z jednobodových množin (a), jednak z intervalů $\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$. Když $A = \emptyset$ a když $A = (a)$, položme $\lambda_1(A) = 0$. Když $A = \underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$, položme $\lambda_1(A) = b - a$. Tím je definována konečná nezáporná množinová funkce λ_1 v oboru $\mathfrak{J}_1$.

20·4·1. λ_1 *je aditivní funkce v oboru* $\mathfrak{J}_1$.

Důkaz. Nechť $A_i \in \mathfrak{I}_1$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $A \in \mathfrak{I}_1$ a nechť $A = \sum_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že $\sum_{i=1}^{m} \lambda_1(A_i) = \lambda_1(A)$. V případech $A = \emptyset$ a $A = (a)$ je to zřejmé. Nechť tedy $A = \mathrm{E}_t[a < t < b]$. Zřejmě můžeme předpokládati, že $A_i \neq \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq m$ a že pořádek množin A_i je takový, že

$$1 \leqq i < j \leqq m, \ x \in A_i, \ y \in A_j \Rightarrow x < y.$$

Pak ukazuje snadná úvaha, že číslo $m = 2n - 1$ je liché, že pro liché $i = 2j - 1$ jest $A_i = \mathrm{E}_t[a_j < t < b_j]$, že pro sudé i jest $\lambda_1(A_i) = 0$ a že $b_j = a_{j+1}$ pro $1 \leqq j \leqq n - 1$, $a_1 = a$, $b_n = b$. Tedy $\sum_{i=1}^{m} \lambda_1(A_i) =$
$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_1(A_{2j-1}) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = b - a = \lambda_1(A)$.

V odst. **18·3** jsme si všimli, že systém $\mathfrak{I}_1$ má vlastnost α. Tedy podle **19·3·1** a podle **20·4·1** existuje právě jedna konečná nezáporná aditivní funkce φ v oboru $\mathfrak{T}_1$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{I}_1}$ je identická s λ_1. Bez obavy z nedorozumění pišme λ_1 místo φ, takže λ_1 je nyní aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{T}_1$.

20·4·2. *λ_1 je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{T}_1$.*

Důkaz. Podle **19·3·2** stačí dokázati, že λ_1 je σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{I}_1$. Nechť tedy $A_n \in \mathfrak{I}_1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A \in \mathfrak{I}_1$ a nechť $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(A_n) =$
$= \lambda_1(A)$. V případech $A = \emptyset$ a $A = (a)$ je to zřejmé. Nechť tedy $A = \mathrm{E}[a < t < b]$. Zřejmě můžeme předpokládati, že $A_n \neq \emptyset$ pro všecka n. Když A_n je jednobodová množina, položme $A_n = (a_n) =$
$= (b_n)$; v opačném případě položme $A_n = \mathrm{E}_t[a_n < t < b_n]$. Ježto λ_1 je nezáporná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{T}_1$, podle cvič. *19·8* je pro všecky indexy m: $\sum_{n=1}^{m} \lambda_1(A_n) = \lambda_1\left(\sum_{n=1}^{m} A_n\right) \leqq \lambda_1(A)$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(A_n) \leqq \lambda_1(A)$, takže zbývá uvésti ke sporu předpoklad $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(A_n) <$
$< \lambda_1(A)$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(A_n) + 6\,\varepsilon < \lambda_1(A),$$

t. j. že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + 6\varepsilon < b - a.$$

Položme

$$A'_n = \mathop{\mathrm{E}}_t\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^n} < t < b_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right],$$

$$B'_1 = \mathop{\mathrm{E}}_t[a - \varepsilon < t < a + \varepsilon], \qquad B'_2 = \mathop{\mathrm{E}}_t[b - \varepsilon < t < b + \varepsilon].$$

Zřejmě

$$\mathop{\mathrm{E}}_t[a \leqq t \leqq b] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + (a) + (b) \subset \sum_{n=1}^{\infty} A'_n + B'_1 + B'_2.$$

Množina $M = \mathop{\mathrm{E}}_t[a \leqq t \leqq b]$ je kompaktní (v. **17·2·3**): množiny A'_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, B'_1 a B'_2 jsou otevřené v prostoru $\mathbf{E}_1$, takže množiny MA'_n, MB'_1 a MB'_2 jsou otevřené v prostoru M. Tedy podle **17·5·4** existuje konečná množina N indexů n taková, že

$$A \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[a \leqq t \leqq b] \subset \sum_{n \in N} A'_n + B'_1 + B'_2,$$

takže podle cvič. *19·8* a *19·10* jest

$$\lambda_1(A) \leqq \sum_{n \in N} \lambda_1(A'_n) + \lambda_1(B'_1) + \lambda_1(B'_2),$$

t. j. $b - a \leqq \sum_{n \in N}\left[\left(b_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) - \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right] + (a+\varepsilon) - (a-\varepsilon) + (b+\varepsilon) -$

$$- (b - \varepsilon) = \sum_{n \in N}\left(b_n - a_n + \frac{2\varepsilon}{2^n}\right) + 4\varepsilon \leqq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + 6\varepsilon,$$

což je spor.

Nechť nyní $P = \mathbf{E}_m$. Definujme $\mathfrak{J}_m \subset \mathfrak{P}$ a $\mathfrak{T}_m = t(\mathfrak{J}_m)$ jako v odst. **18·3**. Systém $\mathfrak{J}_m$ se skládá z množin tvaru

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m, \tag{12}$$

kde $A_i \in \mathfrak{J}_1$. Položme

$$\lambda_m(A) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_1(A_i).$$

Tím je definována konečná nezáporná množinová funkce λ_m v oboru $\mathfrak{J}_m$.

20·4·3. *λ_m je aditivní funkce v oboru $\mathfrak{J}_m$.*

Důkaz. Pro $n = 1$ je nám to známo; nechť to platí pro $m = n$ a dokazujme pro $m = n + 1$. V odst. **18·3** jsme si všimli, že systém $\mathfrak{J}_n$ má vlastnost α, takže podle **19·3·1** existuje konečná nezáporná aditivní funkce φ v oboru $\mathfrak{T}_n$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{J}_n}$ jest identická s λ_n. Když ve větě **20·3·1** za P, Q, $P \times Q$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, μ_1, μ_2 dosadíme resp. $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_{n+1}$, $\mathfrak{T}_n$, $\mathfrak{T}_1$, φ, λ_1, vyjde snadno, že λ_{n+1} jest aditivní funkce v oboru $\mathfrak{J}_{n+1}$.

Ježto systém $\mathfrak{Z}_m$ má vlastnost α, podle **19·3·1** a **20·4·3** existuje právě jedna konečná nezáporná aditivní funkce φ v oboru $\mathfrak{T}_m$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{Z}_m}$ jest identická s λ_m. Bez obavy z nedorozumění pišme λ_m místo φ, takže λ_m je nyní aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{T}_m$.

20·4·4. *Nechť* $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ *Když ve* **20·3** *za* P, Q, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, μ_1, μ_2 *volíme resp.* E_m, E_n, $\mathfrak{T}_m$, $\mathfrak{T}_n$, λ_m, λ_n, *pak jest* $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{T}_{m+n}$ *a* $\mu_{12} = \lambda_{m+n}$.

Důkaz. Jest (v. cvič. *18·19*)

$$\mathfrak{Z}_{m+n} = (\mathfrak{Z}_m, \mathfrak{Z}_n) \subset (\mathfrak{T}_m, \mathfrak{T}_n) = (t(\mathfrak{Z}_m), t(\mathfrak{Z}_n)) \subset t(\mathfrak{Z}_m, \mathfrak{Z}_n) = t(\mathfrak{Z}_{m+n}),$$

tedy

$$\mathfrak{Z}_{m+n} \subset (\mathfrak{T}_m, \mathfrak{T}_n) \subset t(\mathfrak{Z}_{m+n}),$$

takže (v. **18·2·3**)

$$t(\mathfrak{T}_m, \mathfrak{T}_n) = t(\mathfrak{Z}_{m+n}) = \mathfrak{T}_{m+n}.$$

Obě funkce μ_{12} a λ_{m+n} jsou aditivní v množinovém tělese $\mathfrak{T}_{m+n}$. Máme dokázati, že jsou identické. Ježto $\mathfrak{T}_{m+n} = t(\mathfrak{Z}_{m+n})$ a ježto systém $\mathfrak{Z}_{m+n}$ má vlastnost α, podle **19·3·1** stačí dokázati, že jsou identické parciální funkce

$$(\mu_{12})_{\mathfrak{Z}_{m+n}} \text{ a } (\lambda_{m+n})_{\mathfrak{Z}_{m+n}}.$$

To je však zcela zřejmé.

20·4·5. λ_m *je σ-aditivní množinová funkce v oboru* $\mathfrak{T}_m$.

Důkaz. Pro $m = 1$ to platí podle **20·4·2**, a platí-li to pro $m = n$, podle **20·3·2** a **20·4·4** to platí i pro $m = n + 1$.

Nyní můžeme aplikovati teorii odst. **20·1** na euklidovský prostor $P = \mathsf{E}_m$, volíce $\mu = \lambda_m$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_m$.*) Míra, ke které takto dospějeme, nazývá se *Lebesgueova*. V teorii Lebesgueovy míry mluvíme stručně o (*horní*) *míře* a o (*shora*) *měřitelných* a *nulových* množinách místo o (horní) μ-míře a o (shora) μ-měřitelných a μ-nulových množinách a píšeme $|L|$ a $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$, $\mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ místo $|L|_\mu$ a $\mathfrak{L}_\mu$, $\mathfrak{N}_\mu$. Následující věty **20·4·5**—**20·4·8** se vztahují na Lebesgueovu míru v E_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

20·4·5. *Každá množina* $M \subset \mathsf{E}_m$ *je shora měřitelná a jest*

$$d(M) < \infty \Rightarrow |M| < \infty.$$

To je zřejmé.

20·4·6. *Každá spočetná množina* $M \subset \mathsf{E}_m$ *je nulová.*

To platí pro jednobodovou množinu podle **20·1·10**, tedy pro každou spočetnou množinu podle **20·1·6**.

20·4·7. *Nechť* $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. *Nechť* $\varepsilon > 0$. *Pak existuje otevřená množina* $G \subset \mathsf{E}_m$ *taková, že* $L \subset G$, $|G - L| < \varepsilon$.

*) Připomeňme si (v. **18·6·4**), že $\tau(\mathfrak{T}_m)$ *je systém všech Borelových množin.*

Důkaz. I. Nechť $L \in \mathfrak{J}_m$. Když $L = \emptyset$, stačí voliti $G = \emptyset$. Když $L \neq \emptyset$, jest $L = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, kde pro $1 \leqq i \leqq m$ je buďto $A_i = (a_i) = (b_i)$ nebo $A_i = \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i < t < b_i]$. Jest $|L| = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$. Existuje $\delta > 0$ takové, že $\prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i + 2\delta) < |L| + \varepsilon$. Položme $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, kde $G_i = \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i - \delta < t < b_i + \delta]$. Pak množina G jest otevřená a jest $|G| = \lambda_m(G) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i + 2\delta)$. Jest $G \in \mathfrak{T}_m$, $L \in \mathfrak{T}_m$, $L \subset G$, tedy $G - L \in \mathfrak{T}_m$ a $|L| + |G - L| = |G| < |L| + \varepsilon$, tedy $|G - L| < \varepsilon$.

II. Nechť $L \in \mathfrak{T}_m$. Pak jest $L = \sum_{i=1}^{n} A_i$ s disjunktními $A_i \in \mathfrak{J}_m$. Podle I existují otevřené množiny $G_i \supset A_i$ takové, že $|G_i - A_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Nechť $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$. Množina G jest otevřená, jest $G \supset L$ a jest $G - L \subset \sum_{i=1}^{n}(G_i - A_i)$, tedy $|G - L| \leqq \sum_{i=1}^{n} |G_i - A_i| < \varepsilon$.

III. Nechť $L \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_m)$. Pak existují množiny $A_n \in \mathfrak{T}_m$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \supset L$ a $|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podle II existují otevřené množiny $G_n \supset A_n$ takové, že $|G_n - A_n| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Nechť $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak G jest otevřená, jest $G \supset L$ a $G - L \subset \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(G_n - A_n)$, tedy $|G - L| \leqq |\sum_{n=1}^{\infty} A_n - L| + \sum_{n=1}^{\infty}|G_n - A_n| < \varepsilon$.

20·4·8. *Nechť* $L \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_m)$. *Nechť* $\varepsilon > 0$. *Pak existuje uzavřená množina* $F \subset \mathbf{E}_m$ *taková, že* $F \subset L$, $|L - F| < \varepsilon$.

Důkaz. Jest $\mathbf{E}_m \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_m)$, tedy (v. **20·1·14**) $\mathbf{E}_m - L \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_m)$. Podle **20·4·7** existuje otevřená množina G taková, že $G \supset \mathbf{E}_m - L$ a $|G - (E_m - L)| = |GL| < \varepsilon$. Nechť $F = \mathbf{E}_m - G$. Pak F jest uzavřená, $F \subset L$ a $L - F = GL$, tedy $|L - F| < \varepsilon$.

Když za P, Q, $P \times Q$ dosadíme resp. $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{E}_{m+n}$, máme (v. **20·4·4**) ve větách **20·3·4—20·3·6** důležité vztahy mezi Lebesgueovými měrami v prostorech $\mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_n$ a $\mathbf{E}_{m+n}$.

20·4·9. *V* $\mathbf{E}_1$ *existují* (lebesgueovsky) *neměřitelné množiny.**)

---

*) V. obecnější větu **21·4·3**.

Důkaz. Rozdělme reálná čísla do skupin tak, že dvě čísla x a y dáme do stejné skupiny, když a jen když číslo $x - y$ je racionální. Vybereme z každé skupiny právě jedno číslo x, a to tak, že $0 \leqq x \leqq 1$. Nechť A je množina všech vybraných čísel a pro každé racionální z nechť $A(z) = \underset{t}{\mathrm{E}}[t - z \in A]$, takže $A = A(0)$. Lehko se dokáže, že množiny $A(z)$ jsou disjunktní, $|A(z)| = |A|$ pro každé racionální z. Nechť $\{r_n\}_1^\infty$ je prostá posloupnost, jejíž členy tvoří množinu $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1;\ t$ je racionální$]$. Jest

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t \leqq 1] \subset \sum_{n=1}^{\infty} A(r_n) \subset \underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 2],$$

takže podle **20·1·5** jest

$$1 \leqq \left| \sum_{n=1}^{\infty} A(r_n) \right| \leqq 3.$$

Kdyby množina A byla měřitelná, zřejmě by každá množina $A(z)$ byla měřitelná, takže podle **20·1·17** by bylo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} A(r_n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} | A(r_n) |.$$

Ježto $|A(r_n)| = |A|$, bylo by $\left| \sum_{n=1}^{\infty} A(r_n) \right|$ rovné 0 nebo ∞ podle toho, zda $|A| = 0$ či $|A| > 0$ a oboje je spor.

Cvičení.

20·1. Když $P \in \mathfrak{M}_\mu$, pak $\mathfrak{M}_\mu = \mathfrak{P}$.

20·2. Nechť $L \in \mathfrak{M}_\mu$; nechť $AL \in \mathfrak{L}_\mu$ pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$. Pak $L \in \mathfrak{L}_\mu$.

20·3. Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$; nechť $|L|_\mu < \infty$. Nechť $L = L_1 + L_2$; nechť $|L_1|_\mu + |L_2|_\mu = |L|_\mu$. Pak $L_1 \in \mathfrak{L}_\mu$, $L_2 \in \mathfrak{L}_\mu$. Předpoklad $|L|_\mu < \infty$ je podstatný.

20·4. Předpoklad $|M|_\mu < \infty$ ve **20·1·19** je podstatný.

20·5. Množiny $L_1 \in \mathfrak{L}_\mu$, $L_2 \in \mathfrak{L}_\mu$ nazveme ekvivalentní, když $L_1 - L_2 \in \mathfrak{N}_\mu$, $L_2 - L_1 \in \mathfrak{N}_\mu$. Systém $\mathfrak{L}_\mu$ lze rozděliti ve třídy tak, že každá $L \in \mathfrak{L}_\mu$ je právě v jedné třídě a že dvě množiny $L_1 \in \mathfrak{L}_\mu$ a $L_2 \in \mathfrak{L}_\mu$ jsou tehdy a jen tehdy ve stejné třídě, když jsou ekvivalentní. Když množina $L_i \in \mathfrak{L}_\mu$ je ekvivalentní s $L'_i \in \mathfrak{L}_\mu$, pak $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$ a $\sum_{i=1}^{\infty} L'_i$ jsou ekvivalentní, $\prod_{i=1}^{\infty} L_i$ a $\prod_{i=1}^{\infty} L'_i$ jsou ekvivalentní, $L_1 - L_2$ a $L'_1 - L'_2$ jsou ekvivalentní. Když $L_1 \in \mathfrak{L}_\mu$ a $L_2 \in \mathfrak{L}_\mu$, nechť

$$\varrho(L_1, L_2) = \min\left(|L_1 - L_2|_\mu + |L_2 - L_1|_\mu,\ 1\right).$$

Když L_1 a L'_1 jsou ekvivalentní a když L_2 a L'_2 jsou ekvivalentní, pak

$\varrho(L_1, L'_1) = \varrho(L_2, L'_2)$. Nechť $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}_\mu$ obsahuje právě jednu množinu z každé třídy mezi sebou ekvivalentních množin. Pak ϱ je metrika v $\mathfrak{K}$.

20·6. Nechť $\{L_n\}_1^\infty$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $(\mathfrak{K}, \varrho)$ (v. cvič. *20·5*). Z $\{L_n\}$ lze vybrati posloupnost $\{L'_n\}_1^\infty$ tak, že $\varrho(L'_n, L'_m) < \frac{1}{2^n}$ pro $1 \leqq n < m$. Položme

$$M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=n}^{\infty} L'_i, \quad M_2 = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} L'_i.$$

Pak jest

$$\varrho(L_n, M_1) \to 0, \ \varrho(L_n, M_2) \to 0, \ \varrho(M_1, M_2) = 0.$$

Tedy $(\mathfrak{K}, \varrho)$ je úplný prostor.

*20·7.** V oboru $\mathfrak{L}_\mu$ nemusí býti μ-míra jednoznačně stanovena vlastnostmi [1] a [2] vyslovenými na začátku odst. **20·2**. Nechť $P = \mathbf{E}_1$, $K = \underset{t}{\mathrm{E}}[0 < t < 1]$, $H = \underset{t}{\mathrm{E}}[t \leqq 0] + \underset{t}{\mathrm{E}}[t \geqq 1]$. Nechť systém $\mathfrak{A}_0$ se skládá ze všech těch $A \in \mathfrak{T}_1$ (v **18·3**), pro něž $A \subset K$; nechť systém $\mathfrak{A}$ se skládá ze všech množin některého z obou tvarů A a $A + H$, kde $A \in \mathfrak{A}_0$. Pro $A \in \mathfrak{A}_0$ nechť $\mu(A) = \mu(A + H) = \lambda_1(A)$ (v. **20·4**). Pak $\mathfrak{A}$ je množinové těleso a μ je konečná nezáporná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Systém $\mathfrak{L}_\mu$ se skládá z těch množin $L \subset \mathbf{E}_1$, pro něž $KL \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$, a pro každou $L \in \mathfrak{L}_\mu$ je $|L|_\mu = |KL|$ (na pravo je Lebesgueova míra). Pro $L \in \mathfrak{L}_\mu$ položme: [1] $\varphi(L) = |L|_\mu$, když buďto současně $0 \in L$ a $1 \in L$ nebo současně $0 \in \mathbf{E}_1 - L$ a $1 \in \mathbf{E}_1 - L$; [2] $\varphi(L) = |L|_\mu + 1$, když $0 \in \mathbf{E}_1 - L$, $1 \in L$; [3] $\varphi(L) = |L|_\mu - 1$, když $0 \in L$, $1 \in \mathbf{E}_1 - L$. Funkce φ má vlastnosti [1] a [2].

20·8. Nechť μ_1 a μ_2 jsou konečné nezáporné σ-aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Pro každou $A \in \mathfrak{A}$ nechť $\mu_1(A) \leqq \mu_2(A)$. Pak je $\mathfrak{L}_{\mu_1} \supset \mathfrak{L}_{\mu_2}$. $\mathfrak{N}_{\mu_1} \supset \mathfrak{N}_{\mu_2}$ a

$$L \in \mathfrak{L}_{\mu_2} \Rightarrow |L|_{\mu_1} \leqq |L|_{\mu_2}.$$

20·9. Tvrzení věty **20·3·8** lze zostřiti takto: Existují $A \in \tau(\mathfrak{A})$, $B \in \tau(\mathfrak{B})$ takové, že $M \subset A \times B$.

*20·10.** Nechť $M \subset \mathbf{E}_m$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{E}_m$ taková, že $M \subset G$, $|G| \leqq |M| + \varepsilon$.

20·11. Lebesgueova míra Cantorova diskontinua je rovná nule.

20·12. Nechť $a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$, $a < b$. Nechť $0 \leqq c < b - a$. Pak existuje disjunktní posloupnost $\{Q_n\}_1^\infty$ intervalů

$$Q_n = \underset{t}{\mathrm{E}}[u_n < t < v_n] \subset \underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$$

taková, že: [1] každé racionální číslo intervalu $\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$ náleží do $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$, [2] $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(Q_n) = b - a - c$. Z toho následuje podle **17·8·3**: Ke každému c takovému, že $0 \leqq c < b - a$, existuje kompaktní množina K řídká v $\underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b]$ a taková, že $|K| = c$.

20·13. Pro $X \subset \mathbf{E}_m$ nechť $\varrho(X) = |\overline{X}|$. Pak ϱ je aditivní množinová funkce v oboru všech částí prostoru $\mathbf{E}_m$. ϱ není σ-aditivní; ani parciální funkce $\varrho_{\mathfrak{S}}$ není σ-aditivní, je-li $\mathfrak{S}$ systém všech otevřených podmnožin prostoru E_m.

§ 21. Obecná teorie integrálu.

21·1. Pro celý odstavec učiníme stejný předpoklad jako v odst. **20·1.** Opět $\mathfrak{L}_\mu$ znamená systém všech μ-měřitelných množin.

Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$ a nechť f je funkce v oboru L. Pravíme, že funkce f je *μ-měřitelná*, když pro každé $c \in \mathsf{E}_1$ množina

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$$

je μ-měřitelná. Následující tři věty jsou zřejmé (v. **20·1·14**):

21·1·1. *Konstanta je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$.*

21·1·2. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ a nechť $M \subset L$, $M \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak parciální funkce f_M je μ-měřitelná.*

21·1·3. *Nechť $L_n \in \mathfrak{L}_\mu$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; pro každé n nechť f_n je μ-měřitelná funkce v oboru L_n. Když $x \in L_m \,.\, L_n$, nechť $f_m(x) = f_n(x)$, takže existuje funkce f v oboru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ taková, že $f(x) = f_n(x)$, kdykoli $x \in L_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak f je μ-měřitelná funkce.*

Z **20·1·7** a **20·1·11** plyne:

21·1·4. *Když N je μ-nulová množina, pak každá funkce v oboru N je μ-měřitelná.*

21·1·5. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť B je Borelova množina v prostoru E_1. Pak množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \in B]$ je μ-měřitelná.*

Důkaz. I. Když $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$, $a < b$, pak množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[a \leqq f(x) < b]$ je μ-měřitelná, neboť (v. **20·1·14**) je rovná množině

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < b] - \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < a].$$

II. Nechť G jest otevřená množina v prostoru E_1. Každému $z \in G$ lze přiřaditi číslo $\delta(z) > 0$ tak, že

$$u \in \mathsf{E}_1, \quad |\, u - z \,| \leqq \delta(z) \Rightarrow u \in G.$$

Množiny $\underset{u}{\mathrm{E}}[\,|u - z\,| < \delta(z)]$ jsou otevřené v G. Podle **16·1·2** a **16·1·5** G je separabilní prostor, takže podle **16·2·2** existuje v G bodová posloupnost $\{z_n\}$ taková, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underset{u}{\mathrm{E}}[|u - z_n\,| < \delta(z_n)] = G$, takže tím spíše

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{u}{\mathrm{E}}[z_n - \delta(z_n) \leqq u < z_n + \delta(z_n)] = G,$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[z_n - \delta(z_n) \leqq f(x) < z_n + \delta(z_n)] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \in G],$$

takže $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \in G]$ je μ-měřitelná podle I a **20·1·14.**

III. Označme $\mathfrak{G}$ systém všech otevřených množin v prostoru $\mathbf{E}_1$, takže (v. **18·6·1**) $\tau(\mathfrak{G})$ je systém všech Borelových množin v $\mathbf{E}_1$. Označme $\mathfrak{C}$ systém těch $B \in \tau(\mathfrak{G})$, pro něž $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \in B]$ je μ-měřitelná. Máme dokázati, že $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{G})$. Když $B_n \in \mathfrak{C}$, podle **20·1·14** je $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{C}$. Když $B \in \mathfrak{C}$, $B' \in \mathfrak{C}$, podle **20·1·14** je $B - B' \in \mathfrak{C}$. Tedy $\mathfrak{C}$ je množinové σ-těleso. Podle II je $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{C}$, tedy $\tau(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{C}$. Ježto také $\mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{G})$, jest $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{G})$.

21·1·6. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak* $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = \infty]$ *a* $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = -\infty]$ *jsou μ-měřitelné množiny.*

Důkaz. To je (v. **18·4·3** a **20·1·14**) důsledek identit

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = \infty] = L - \sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) < n],$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = -\infty] = \prod_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) < -n].$$

21·1·7. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak*

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > g(x)],\ \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq g(x)],\ \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = g(x)]$$

jsou μ-měřitelné množiny.

Důkaz. Nechť (v. cvič. *3·1*) $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá posloupnost, jejíž členy tvoří množinu všech racionálních čísel. Pak tvrzení je (v. **20·1·14**) důsledkem identit

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > g(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathop{\mathrm{E}}_{x}[g(x) < r_n] - \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) < r_n]),$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq g(x)] = L - \mathop{\mathrm{E}}_{x}[g(x) > f(x)],$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) = g(x)] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \geqq g(x)] - \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) > g(x)].$$

V následujícím opět $0 . \infty = 0 . (-\infty) = 0$, $c . \infty = (-c) . (-\infty) = \infty$, $c . (-\infty) = (-c) . \infty = -\infty$ pro $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

21·1·8. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Pak cf je μ-měřitelná funkce.*

Důkaz. Pro $c = 0$ podle **21·1·1**, pro $c > 0$ podle identity ($a \in \mathbf{E}_1$)

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[cf(x) < a] = \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) < \frac{a}{c}\right],$$

pro $c < 0$ podle identity

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[c\,f(x) < a] = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[f(x) > \frac{a}{c}\right],$$

neboť množina napravo je μ-měřitelná podle **21·1·5** a **21·1·6.**

21·1·9. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pro $x \in L$ nechť:* [1] $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, *když součet napravo není bezvýznamný,* [2] $\varphi(x) = 0$, *když součet $f(x) + g(x)$ je bezvýznamný. Pak φ je μ-měřitelná funkce.*

Důkaz. Označme M množinu těch $x \in L$, pro něž součet $f(x) + g(x)$ není bezvýznamný. Jest

$$L - M = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \infty] \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) = -\infty] + \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = -\infty] \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) = \infty],$$

takže množina $L - M$, a tudíž i množina M, je μ-měřitelná. Podle **21·1·1** a **21·1·3** stačí dokázati, že parciální funkce φ_M je μ-měřitelná. Nechť opět $\{r_n\}$ je prostá posloupnost všech racionálních čísel. Pak je pro $c \in \mathbf{E}_1$

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi_M(x) < c] = \sum_{n=1}^{\infty} \{\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < r_n] \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) < c - r_n]\},$$

takže $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi_M(x) < c]$ je μ-měřitelná.

V následujícím $|\infty| = |-\infty| = \infty$ a pro $\alpha \in \mathbf{E}_1$, $\alpha > 0$ jest $\infty^\alpha = \infty$.

21·1·10. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $\alpha \in \mathbf{E}_1$, $\alpha > 0$. Pak funkce $|f|^\alpha$ je μ-měřitelná.*

Důkaz. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Když $c > 0$, pak

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[|f(x)|^\alpha < c] = \underset{x}{\mathrm{E}}[0 \leqq f(x) < c^{\frac{1}{\alpha}}] + \underset{x}{\mathrm{E}}[0 > f(x) > -c^{\frac{1}{\alpha}}],$$

takže (v. **21·1·5**) množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[|f(x)|^\alpha < c]$ je μ-měřitelná; a to platí i pro $c \leqq 0$, neboť pak $\underset{x}{\mathrm{E}}[|f(x)|^\alpha < c] = \emptyset$.

21·1·11. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak $f \,.\, g$ je μ-měřitelná funkce.*

Důkaz. Položme

$$M_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \,.\, g(x) = 0], \quad M_2 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \,.\, g(x) = \infty],$$

$$M_3 = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \,.\, g(x) = -\infty], \quad M_4 = L - (M_1 + M_2 + M_3).$$

Snadno se přesvědčíme, že množiny M_1, M_2 a M_3 (a tudíž i M_4) jsou μ-měřitelné, takže podle **21·1·1** a **21·1·3** stačí dokázati, že parciální funkce $(fg)_{M_4}$ je μ-měřitelná, tedy že pro $c \in \mathbf{E}_1$ množina $M_4 \,.\, \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \,.\, g(x) < c]$ je μ-měřitelná. To však plyne z vět **21·1·7** až **21·1·10**, neboť

$$M_4 \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f(x) \,.\, g(x) < c] = M_4 \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{x}\{[f(x) + g(x)]^2 < [f(x) - g(x)]^2 + 4c\}.$$

21·1·12. *Nechť* $\{f_n\}_1^\infty$ *je posloupnost* μ*-měřitelných funkcí v oboru* $L \in \mathfrak{L}_\mu$. *Pro* $x \in L$ *nechť* $F_1(x) = \sup f_n(x)$, $F_2(x) = \inf f_n(x)$. *Pak* F_1 a F_2 *jsou* μ*-měřitelné funkce.*

Důkaz. To je důsledek identit

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x}[F_2(x) < c] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{x}[f_n(x) < c],$$

$$F_1(x) = -\inf\,[-f_n(x)].$$

21·1·13. *Nechť* $\{f_n\}_1^\infty$ *je posloupnost* μ*-měřitelných funkcí v oboru* $L \in \mathfrak{L}_\mu$. *Pro* $x \in L$ *nechť* $F_1(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$, $F_2(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$. *Pak* F_1 *a* F_2 *jsou* μ*-měřitelné funkce.*

Důkaz. Nechť $g_n(x) = \sup_{i \geq n} f_i(x)$, $h_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$. Podle **21·1·12** g_n a h_n jsou μ-měřitelné funkce. Zřejmě však $F_1(x) = \inf g_n(x)$, $F_2(x) = \sup h_n(x)$, takže podle **21·1·12** také F_1 a F_2 jsou μ-měřitelné funkce.

21·1·14. *Nechť* f *je* μ*-měřitelná funkce v oboru* $L \in \mathfrak{L}_\mu$. *Pak existuje posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí v oboru* L *taková, že:* [1] f_n *jsou konečné* μ*-měřitelné funkce a množiny* $f_n(L)$ *jsou konečné* (t. j. každá funkce f_n nabývá jen konečného počtu hodnot), [2] $f(x) = \lim f_n(x)$ *pro každý* $x \in L$, [3] *když* $x \in L$, $f(x) \geq 0$, *pak* $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$; *když* $x \in L$, $f(x) \leq 0$, *pak* $0 \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

Důkaz. Když $0 \leq i < 2^{2n}$, $\frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}$, nechť $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$; když $0 \leq i < 2^{2n}$, $-\frac{i}{2^n} \geq f(x) > -\frac{i+1}{2^n}$, nechť $f_n(x) = -\frac{i}{2^n}$; když $f(x) \geq 2^n$, nechť $f_n(x) = 2^n$; když $f(x) \leq -2^n$, nechť $f_n(x) = -2^n$. Pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ množina $\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f_n(x) < c]$ jest rovná některé z množin

$$\emptyset,\ \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) \leq -\frac{i}{2^n}\right]\ (1 \leq i \leq 2^{2n}),\qquad \mathop{\mathrm{E}}_{x}\left[f(x) < \frac{i}{2^n}\right]\ (1 \leq i \leq 2^{2n}),\ L,$$

které jsou vesměs μ-měřitelné, takže funkce f_n jsou μ-měřitelné. Ostatní vlastnosti funkcí f_n jsou zřejmé.

21·1·15. *Nechť* $L \in \mathfrak{L}_\mu$, $|L|_\mu < \infty$. *Nechť* f *je konečná funkce v oboru* L; *nechť* $\{f_n\}_1^\infty$ *je posloupnost konečných* μ*-měřitelných funkcí v oboru* L *taková, že* $f_n(x) \to f(x)$ *pro každý* $x \in L$. *Nechť* $\varepsilon > 0$. *Pak existuje množina* $M \subset L$ *taková, že* $M \in \mathfrak{L}_\mu$, $|L - M|_\mu < \varepsilon$ *a že parciální funkce* f_M *je stejnoměrnou limitou* (v. **14·2**) *posloupnosti* $\{(f_n)_M\}$.

Důkaz. I. Funkce f je μ-měřitelná podle **21·1·13.**

II. Nechť jsou dána čísla $\delta > 0$ a $\eta > 0$. Nechť $A_n = \underset{x}{\mathrm{E}}[|f_n(x) - - f(x)| < \delta]$. Pak $A_n \subset L$ a podle vět **21·1·7** až **21·1·10** jest $A_n \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $B_n = \prod_{i=n}^{\infty} A_i$, takže $B_n \subset L$, $B_n \subset B_{n+1}$ a $B_n \in \mathfrak{L}_\mu$ (v. **18·4·3** a **20·1·14**). Ježto $f_n(x) \to f(x)$ pro každý $x \in L$, jest $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = L$. Podle **19·2·2** a **20·1·14** jest $\infty > |L|_\mu = \lim |B_n|_\mu$, takže existuje index p takový, že $|L - B_p|_\mu < \eta$.

III. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ lze podle II určiti množinu C_m a index k_m tak, že $C_m \in \mathfrak{L}_\mu$, $C_m \subset L$ a že: [1] $|C_m|_\mu < \frac{\varepsilon}{2^m}$,

$$[2]\; n > k_m,\; x \in L - C_m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m}.$$

Nechť $M = L - \sum_{m=1}^{\infty} C_m$. Pak $M \in \mathfrak{L}_\mu$, $M \subset L$, $|L - M|_\mu = |\sum_{m=1}^{\infty} C_m|_\mu \leqq \leqq \sum_{m=1}^{\infty} |C_m|_\mu < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon$ a mimo to

$$n > k_m,\; x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^m},$$

takže f_M je stejnoměrná limita posloupnosti $\{(f_n)_M\}$.

21·2. I v tomto odstavci učiňme stejný předpoklad jako v odst. **20·1.** Z množinových funkcí μ v oboru $\mathfrak{A}$ a λ_1 v oboru $\mathfrak{T}_1$ (v. odst. **20·4**) odvoďme množinovou funkci ν v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{T}_1)$ stejně, jako jsme v odst. **20·3** odvodili množinovou funkci μ_{12} v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ z množinových funkcí μ_1 v oboru $\mathfrak{A}$ a μ_2 v oboru $\mathfrak{B}$.

21·2·1. *Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť f je nezáporná μ-měřitelná funkce v oboru L. Položme*

$$M = \underset{(x,\,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\; 0 \leqq t < f(x)] \subset P \times \mathbf{E}_1.$$

Pak množina M je ν-měřitelná.

Důkaz. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{f_n\}_1^{\infty}$ nezáporných konečných μ-měřitelných funkcí v oboru L taková, že množiny $f_n(L)$ jsou konečné a že pro každý $x \in L$ jest $f_n(x) \leqq f(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a $f_n(x) \to f(x)$. Jest

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n,\quad M_n = \underset{(x,\,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\; 0 \leqq t < f_n(x)],$$

takže (v. **20·1·14**) stačí dokázati, že $M_n \in \mathfrak{L}_\nu$. To však plyne podle **20·3·5** a **21·1·5** z fakta, že, když c_i $(1 \leqq i \leqq k_n)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá funkce f_n, jest

$$M_n = \sum_{i=1}^{k_n} \{\mathop{\mathrm{E}}_{x}[f_n(x) = c_i] \times \mathop{\mathrm{E}}_{t}[0 \leqq t < c_i]\}.$$

21·2·2. *Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru L. Položme*

$$N = \mathop{\mathrm{E}}_{(x,t)}[x \in L,\ t = f(x) \neq \pm \infty].$$

Pak jest $N \in \mathfrak{N}_\nu$.

Důkaz. Podle **20·1·16** existuje posloupnost $\{L_n\}_1^\infty$ taková, že $L \in \mathfrak{L}_\mu$, $0 \leqq |L|_\mu < \infty$ a $L = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$. Jest

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n,\ N_n = \mathop{\mathrm{E}}_{(x,t)}[x \in L_n,\ t = f(x) \neq \pm \infty].$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Jest

$$N_n = \sum_{i=1}^{\infty} N_{ni},\ N_{ni} = \mathop{\mathrm{E}}_{(x,t)}[x \in L_n,\ t = f(x),\ (i-1)\,\varepsilon \leqq |t| < i\varepsilon].$$

Položme

$$L_{ni} = \mathop{\mathrm{E}}_{x}[x \in L_n,\ (i-1)\,\varepsilon \leqq |f(x)| < i\varepsilon],$$

takže

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_{ni} \subset L_n$$

a

$$N_{ni} \subset L_{ni} \times \mathop{\mathrm{E}}_{t}[(i-1)\,\varepsilon \leqq |t| < i\varepsilon].$$

Podle **21·1·2** a **21·1·5** je $L_{ni} \in \mathfrak{L}_\mu$, takže podle **20·1·5** a **20·3·5** je $|N_{ni}|_\nu \leqq 2\varepsilon\,.\,|L_{ni}|_\mu$. Podle **20·1·5** a **20·1·6** jest

$$|N_n|_\nu \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |N_{ni}|_\nu \leqq 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |L_{ni}|_\mu.$$

Ježto součet $\sum_{i=1}^{\infty} L_{ni}$ je disjunktní, podle **20·1·17** je $\sum_{i=1}^{\infty} |L_{ni}|_\mu = \left|\sum_{i=1}^{\infty} L_{ni}\right|_\mu \leqq |L_n|_\mu$, takže $0 \leqq |N_n|_\nu \leqq 2\varepsilon\,|L_n|_\mu$. Ježto $0 \leqq |L_n|_\mu < \infty$ a ježto číslo $\varepsilon > 0$ je libovolné, jest $|N_n|_\nu = 0$, tedy $0 \leqq |N|_\nu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |N_n|_\nu = 0$, tedy $|N|_\nu = 0$, t. j. $N \in \mathfrak{N}_\nu$.

Pro každou funkci f v oboru $L \subset P$ nechť f^+ a f^- jsou funkce v oboru L takto definované:

když $f(x) \geqq 0$, nechť $f^+(x) = f(x)$, $f^-(x) = 0$,
když $f(x) \leqq 0$, nechť $f^+(x) = 0$, $f^-(x) = -f(x)$,

takže pro každý $x \in L$ jest

$$f^+(x) \geqq 0, \quad f^-(x) \geqq 0, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Zřejmá je věta:

21·2·3. *Když f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$, pak f^+ a f^- jsou μ-měřitelné funkce.*

Nechť nyní f je daná μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Podle **21·2·1** a **21·2·3** množiny

$$M^+ = \underset{(x,\,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f^+(x)]$$

a

$$M^- = \underset{(x,\,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f^-(x)]$$

jsou ν-měřitelné. Když není současně $|M^+|_\nu = |M^-|_\nu = \infty$, pak číslo $|M^+|_\nu - |M^-|_\nu$ nazýváme *integrálem* (určitěji: *μ-integrálem*) funkce f v oboru L (říkává se, že L jest *integrační obor*) a značíme je

$$\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu.$$

Když $|M^+|_\nu = |M^-|_\nu = \infty$, řekneme, že $\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu$ *neexistuje*. Když netoliko $\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu$ existuje, nýbrž je také $-\infty < \int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu < \infty$, pak řekneme, že $\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu$ je *konvergentní*. Když $M \subset L$, $M \in \mathfrak{L}_\mu$, pak místo $\int_M f_M(x)\, \mathrm{d}\mu$ (v. **2·4**) píšeme $\int_M f(x)\, \mathrm{d}\mu$.

Zřejmá je věta:

21·2·4. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak jest*

$$\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_L f^+(x)\, \mathrm{d}\mu - \int_L f^-(x)\, \mathrm{d}\mu$$

za předpokladu, že buďto levá nebo pravá strana existuje.

21·2·5. *Nechť $c \in \mathbf{E}_1$, $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pak*

$$\int_L c\, \mathrm{d}\mu = c\, |L|_\mu.$$

Důkaz. Podle **21·2·4** stačí dokazovati pro $c \geqq 0$. Pak je však podle **20·3·5**

$$\int_L c\, \mathrm{d}\mu = \Big|\underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < c]\Big|_\nu = \Big|L \times \underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t < c]\Big|_\nu = c\, |L|_\mu.$$

21·2·6. *Nechť f je libovolná funkce v oboru $N \in \mathfrak{N}_\mu$. Pak $\int_N f(x)\, \mathrm{d}\mu = 0$.*

Důkaz. Funkce f je μ-měřitelná podle **21·1·4.** Podle **20·3·4** jest $N \times \mathbf{E}_1 \in \mathfrak{N}_\nu$, takže podle **20·1·7** je $|M^+|_\nu = |M^-|_\nu = 0$, tedy $\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu = 0$.

21·2·7. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ taková, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ existuje. Pak pro každou množinu $X \subset L$, $X \in \mathfrak{L}_\mu$ existuje $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \varphi(X)$ a φ* je *σ-aditivní množinová funkce v množinovém σ-tělese* (v. cvič. *18·13*) $\underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset L,\ X \in \mathfrak{L}_\mu]$.

Důkaz. I. Nechť f je nezáporná funkce. Pro $X \subset L$, $X \in \mathfrak{L}_\mu$ jest $\varphi(X) = |\,M(X)\,|_\nu$, kde

$$M(X) = \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in X,\ 0 \leqq t < f(x)].$$

Je-li $X_n \subset L$, $X_n \in \mathfrak{L}_\mu$ a jsou-li množiny X_n disjunktní, pak také množiny $M(X_n)$ jsou disjunktní a jest $M\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n)$, takže podle **20·1·17** a **21·2·1** jest $\left|M\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)\right|_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} |\,M(X_n)\,|_\nu$, t. j. $\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(X_n)$.

II. Opusťme předpoklad, že $f(x) \geqq 0$. Pak se důkaz snadno dokončí podle **19·1·2**, **21·2·4**, cvič. *19·4* a I.

21·2·8. *Nechť f a g jsou funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť f je μ-měřitelná. Nechť* $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \neq g(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$. *Nechť existuje $\int_L f(x)\,d\mu$. Pak g je μ-měřitelná a*

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Funkce g je μ-měřitelná podle **21·1·2**, **21·1·3** a **21·1·4**. Položme $N = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) \neq g(x)]$. Podle **21·2·6** a **21·2·7** jest

$$\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} g^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L g^+(x)\,\mathrm{d}\mu$$

a podobně

$$\int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L g^-(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

takže stačí aplikovati **21·2·4**.

21·2·9. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$; nechť existuje $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$. Pak*

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu > -\infty \Rightarrow \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = -\infty] \in \mathfrak{N}_\mu, \tag{1}$$

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \infty] \in \mathfrak{N}_\mu, \tag{2}$$

takže (v. **20·1·9**)

$$-\infty < \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \pm\infty] \in \mathfrak{N}_\mu.$$

Důkaz. Nechť $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = \infty] = \underset{x}{\mathrm{E}}[f^+(x) = \infty]$. Jest

$$M^+ = \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f^+(x)] \supset \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in A,\ 0 \leqq t < f^+(x)] = = A \times \underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t],$$

takže podle **20·1·5**, **20·3·5** a **21·1·6** jest

$$\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = |\,M^+\,|_\nu \geqq |\,A\,|_\mu \,.\, \infty.$$

Když předpokládáme, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty$, jest $\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty$, tedy $\infty > |\,A\,|_\mu \,.\, \infty$, tedy $|\,A\,|_\mu = 0$; tím je dokázáno (2). Stejně se dokáže i (1).

21·2·10. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť existují integrály*

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu,\ \int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

a nechť součet těchto dvou integrálů není bezvýznamný. Nechť φ je funkce v oboru L taková, že $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ pro každý $x \in L$takový, že součet $f(x) + g(x)$ není bezvýznamný. Pak funkce φ je μ-měřitelná a jest

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Důkaz. I. Nechť funkce f a g jsou konečné a nezáporné a nechť každá z nich nabývá jen konečného počtu hodnot. Nechť a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá f; nechť b_j $(1 \leqq j \leqq n)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá g. Nechť $A_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = a_i]$ $(1 \leqq i \leqq m)$; nechť $B_j = \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) = b_j]$. Jest $A_iB_j \in \mathfrak{L}_\mu$ a $L = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} A_iB_j$ s disjunktními sčítanci, takže podle **21·2·5** a **21·2·7** jest

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i\,|\,A_iB_j\,|_\mu,$$

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_j\,|\,A_iB_j\,|_\mu,$$

$$\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_i + b_j)\,|\,A_iB_j\,|_\mu,$$

z čehož následuje (4).

II. Nechť funkce f a g jsou nezáporné, takže $\varphi = f + g$. Podle **21·1·14** existují posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ konečných μ-měřitelných funkcí v oboru L, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, takové, že pro každý $x \in L$ jest $0 \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq f(x)$, $0 \leqq g_n(x) \leqq g_{n+1}(x) \leqq g(x)$, $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$, tedy také $0 \leqq f_n(x) + g_n(x) \leqq f_{n+1}(x) + g_{n+1}(x) \leqq \varphi(x)$, $f_n(x) + g_n(x) \to \varphi(x)$. Tedy

$$\underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f_n(x)],$$
$$\underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f_n(x)] \subset \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f_{n+1}(x)], \tag{5}$$

takže podle **19·2·2** je

$$\int_L f_n(x)\, \mathrm{d}\mu \to \int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu.$$

Podobně je

$$\int_L g_n(x)\, \mathrm{d}\mu \to \int_L g(x)\, \mathrm{d}\mu,\ \int_L [f_n(x) + g_n(x)]\, \mathrm{d}\mu \to \int_L \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu.$$

Avšak podle I je pro každý index n:

$$\int_L f_n(x)\, \mathrm{d}\mu + \int_L g_n(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_L [f_n(x) + g_n(x)]\, \mathrm{d}\mu,$$

takže platí (4).

III. Nechť f a g jsou libovolné μ-měřitelné funkce v oboru L. Ježto součet integrálů (3) není bezvýznamný, není ani

$$\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu = -\int_L g(x)\, \mathrm{d}\mu = \infty,$$

ani

$$-\int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_L g(x)\, \mathrm{d}\mu = \infty,$$

takže podle **21·2·9** (v. též **20·1·7** a **20·1·9**) jest $N \in \mathfrak{N}_\mu$, kde

$$N = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = -g(x) = \infty] + \underset{x}{\mathrm{E}}[-f(x) = g(x) = \infty].$$

Tedy parciální funkce φ_N je μ-měřitelná podle **21·1·4.** Parciální funkce φ_{L-N} je μ-měřitelná podle **21·1·9**, neboť $L - N \in \mathfrak{L}_\mu$ podle **20·1·11** a **20·1·14.**

Zřejmě

$$x \in L - N \Rightarrow 0 \leqq \varphi^+ \leqq f^+ + g^+,\ 0 \leqq \varphi^- \leqq f^- + g^-.$$

Když $x \in L - N$, $\varphi^+(x) < \infty$, smíme položiti

$$u(x) = f^+(x) + g^+(x) - \varphi^+(x);$$

když $x \in L - N$, $\varphi^-(x) < \infty$, smíme položiti

$$v(x) = f^-(x) + g^-(x) - \varphi^-(x);$$

když $x \in L - N$, $\varphi^+(x) < \infty = \varphi^-(x)$, je definováno $u(x)$ a položme $v(x) = u(x)$; když $x \in L - N$, $\varphi^-(x) < \infty = \varphi^+(x)$, je definováno $v(x)$ a položme $u(x) = v(x)$; když $x \in N$, položme $u(x) = v(x) = 0$.*)

*) Zřejmě není nikdy $\varphi^+(x) = \varphi^-(x) = \infty$, takže $u(x)$ a $v(x)$ je definováno pro každý $x \in L$.

Z **21·1·3** a **21·1·9** vychází snadno, že u a v jsou μ-měřitelné funkce v oboru L. Snadno se přesvědčíme, že

$$x \in L - N \Rightarrow \begin{cases} f^+(x) + g^+(x) = \varphi^+(x) + u(x), \\ f^-(x) + g^-(x) = \varphi^-(x) + v(x). \end{cases} \tag{6}$$

Mimo to jest zřejmě

$$x \in L \Rightarrow u(x) = v(x) \geqq 0. \tag{7}$$

Ze (6) a (7) následuje podle II, že

$$\begin{aligned} \int_{L-N} \varphi^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} u(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{L-N} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} g^+(x)\,\mathrm{d}\mu, \\ \int_{L-N} \varphi^-(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} u(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{L-N} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} g^-(x)\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{8}$$

Ježto integrály (3) existují a jejich součet není bezvýznamný, není možné, aby pravé strany obou rovnic (8) byly rovné ∞. Ježto $u(x) \geqq 0$, je tedy

$$0 \leqq \int_{L-N} u(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty. \tag{9}$$

Podle **21·2·6** a **21·2·7** jest $\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$ a stejně pro funkce g^+, f^-, g^-, φ^+, φ^-, takže (8) lze psáti

$$\begin{aligned} \int_{L} \varphi^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} u(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{L} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L} g^+(x)\,\mathrm{d}\mu, \\ \int_{L} \varphi^-(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N} u(x)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{L} f^-(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L} g^-(x)\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{10}$$

Z (9), (10) a **21·2·4** následuje (4), máme-li na paměti, že integrály (3) existují a že jejich součet není bezvýznamný.

21·2·11. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ takové, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu$ existují. Nechť $N = \mathrm{E}_x[f(x) > g(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$. Pak*

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{11}$$

Důkaz. Podle **21·2·6** a **21·2·7** jest $\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$ a stejně pro funkci g^+. Ježto

$$x \in L - N \Rightarrow f(x) \leqq g(x),$$

podle **20·1·5** jest $\int_{L-N} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_{L-N} g^+(x)\,\mathrm{d}\mu$, t. j.

$$0 \leqq \int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L g^+(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Stejně se dokáže, že

$$0 \leqq \int_L g^-(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud a z **21·2·4** následuje (11).

21·2·12. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť buďto je $|L|_\mu < \infty$ nebo nechť existuje $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$. Nechť $m \in \mathsf{E}_1$. Pak*

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) < m] \in \mathfrak{N}_\mu \Rightarrow \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq m\,.\,|L|_\mu, \tag{12}$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > m] \in \mathfrak{N}_\mu \Rightarrow \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq m\,.\,|L|_\mu.$$

Důkaz proveďme třeba pro (12). V případě $|L|_\mu = \infty$ můžeme souditi takto: Podle **21·2·11** jest $\int_L m\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$; ale podle **21·2·5** je $\int_L m\,\mathrm{d}\mu = m\,.\,|L|_\mu$.

V případě $|L|_\mu < \infty$ není podaný důkaz úplný, neboť je třeba ještě dokázati, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ existuje. Položme $N = \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) < m]$. Podle **21·2·6** a **21·2·7** jest

$$\int_L [f(x) - m]^-\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} [f(x) - m]^-\,\mathrm{d}\mu = \int_{L-N} 0\,.\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

takže podle **21·2·4** existuje $\int_L [f(x) - m]\,\mathrm{d}\mu$ a jest

$$\int_L [f(x) - m]\,\mathrm{d}\mu \geqq 0.$$

Podle **21·2·5** je však

$$\int_L m\,\mathrm{d}\mu = m\,|L|_\mu,\ \text{tedy}\ -\infty < \int_L m\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Tedy podle **21·2·10** existuje $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ a jest

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L [f(x) - m]\,\mathrm{d}\mu + \int_L m\,\mathrm{d}\mu \geqq \int_L m\,\mathrm{d}\mu = m\,|L|_\mu.$$

21·2·13. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Integrál $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní, když a jen když je konvergentní integrál $\int_L |f(x)|\,\mathrm{d}\mu$. Mimo to je pak*

$$\left|\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| \leqq \int_L |f(x)|\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. To plyne z **21·2·4** a z fakta, že podle **21·2·10** je

$$\int_L |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

21·2·14. *Nechť f a φ jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $\mathop{\mathrm{E}}_x[|f(x)| > \varphi(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$. Nechť $\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní. Pak $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní.*

Důkaz. To plyne z **21·2·4** a z fakta, že podle **21·2·11** je

$$0 \leqq \int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

$$0 \leqq \int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

21·2·15. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $|L|_\mu < \infty$. Nechť existuje množina $N \in \mathfrak{N}_\mu$ taková, že parciální funkce f_{L-N} je omezená. Pak $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní.*

To plyne z **21·2·5** a **21·2·14.**

21·2·16. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť existuje $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Pak*

$$\int_L c\,f(x)\,\mathrm{d}\mu = c\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{13}$$

Důkaz. I. Nechť funkce f je konečná a nabývá jen konečného počtu hodnot. Nechť a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty funkce f a nechť $A_i = \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) = a_i]$. Pak jest $A_i \in \mathfrak{L}_\mu$ a $\sum_{i=1}^{m} A_i = L$ s disjunktními sčítanci, takže podle **21·2·5** a **21·2·7** jest

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i\,|A_i|_\mu, \quad \int_L c\,f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} c a_i\,|A_i|_\mu,$$

z čehož plyne (13).

II. Nechť funkce f je nezáporná a nechť $c \geqq 0$. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{f_n\}$ konečných μ-měřitelných funkcí, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, taková, že pro každý $x \in L$ jest $0 \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq f(x)$. Tedy platí (5), takže podle **19·2·2** jest $\int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \to \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$. Podobně $\int_L c\,f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \to \int_L c\,f(x)\,\mathrm{d}\mu$. Avšak podle I je $\int_L c\,f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = c\int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$, takže platí (13).

III. Nechť funkce f je nezáporná. Když $c \geqq 0$, platí (13) podle II. Když $c < 0$, podle **21·2·4** jest $\int_L c\,f(x)\,\mathrm{d}\mu = -\int_L |c|\,f(x)\,\mathrm{d}\mu$, takže opět platí (13).

IV. Opustíme-li předpoklad, že f je nezáporná, platí (13) podle III a **21·2·4.**

21·2·17. *Nechť f a φ jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť $\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní. Nechť $\mathop{\mathrm{E}}_x[\varphi(x) < 0] \in \mathfrak{N}_\mu$. Nechť $m \in \mathsf{E}_1$. Pak*

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) < m] \in \mathfrak{N}_\mu \Rightarrow \int_L f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq m\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{14}$$

$$\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) > m] \in \mathfrak{N}_\mu \Rightarrow \int_L f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq m\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz proveďme třeba pro (14). Podle **20·1·7** a **20·1·9** jest
$$N = \underset{x}{\mathrm{E}}[(f(x) - m)\,\varphi(x) < 0] \in \mathfrak{N}_\mu,$$
takže podle **21·2·6** a **21·2·7** je
$$\int_L [(f(x) - m)\,\varphi(x)]^- \,\mathrm{d}\mu \lessgtr \int_{L-N} [(f(x) - m)\,\varphi(x)]^- \,\mathrm{d}\mu = 0,$$
takže podle **21·2·4** jest
$$\int_L (f(x) - m)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq 0.$$
Podle **21·2·16** je však
$$\int_L m\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = m \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu, \text{ tedy } -\infty < \int_L m\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty,$$
takže podle **21·2·8** a **21·2·10** je*)
$$\int_L f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L (f(x) - m)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L m\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq m \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

21·2·18. *Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost μ-měřitelných funkcí v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Pro $x \in L$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$. Nechť existuje $\int_L f_1(x)\,\mathrm{d}\mu$ a jest $\neq -\infty$. Pak jest*
$$\lim \int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L \lim f_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Ježto $f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$, pro každý $x \in L$ existuje $\lim f_n(x) = \varphi(x)$ a jest $f_n(x) \leqq \varphi(x)$.

Položme $N = \underset{x}{\mathrm{E}}[f_1(x) = -\infty]$, takže $N \in \mathfrak{N}_\mu$ podle **21·2·9.** Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$ Pro $x \in N$ nechť $u_n(x) = 0$; pro $x \in L - N$ nechť $u_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, když $f_1(x) < \infty$ a $u_n(x) = 0$, když $f_1(x) = \infty$. Podle ***21·1·1, 21·1·2,*** **21·1·3, 21·1·6** a **21·1·9** jsou $u_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ μ-měřitelné funkce v oboru L. Pro $x \in L - N$ jest $f_n(x) = f_1(x) + u_n(x)$. Pro $x \in L$ jest $0 \leqq u_n(x) \leqq u_{n+1}(x)$, takže existuje $\lim u_n(x) = u(x)$ a jest $u(x) \geqq 0$. Pro $x \in L - N$ jest $\varphi(x) = f_1(x) + u(x)$. Podle **21·1·13** u je μ-měřitelná funkce v oboru L. Ježto $u_n(x) \geqq 0$, $u(x) \geqq 0$, jest
$$\int_L u_n(x)\,\mathrm{d}\mu = |\,A_n\,|_\nu, \quad \int_L u(x)\,\mathrm{d}\mu = |\,B\,|_\nu,$$
kde
$$A_n = \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < u_n(x)],$$
$$B = \underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < u(x)].$$
Jest $A_n \subset A_{n+1}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, takže podle **19·2·2** a **21·2·1** jest $|\,B\,|_\nu =$

*) Dle **21·2·9** je $\underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) = \pm\infty] \in \mathfrak{N}_\mu$ a zřejmě $f(x)\,\varphi(x) = [f(x) - m]\varphi(x) + m\varphi(x)$ pro $\varphi(x) \neq \pm\infty$.

$= \lim |A_n|_\nu$. Podle **21·2·8** a **21·2·10** a ježto $\int_L f_1(x)\,d\mu > -\infty$, $|A_n|_\nu \geqq 0$, $|B|_\nu \geqq 0$, jest

$$\int_L f_n(x)\,d\mu = |A_n|_\nu + \int_L f_1(x)\,d\mu,$$

$$\int_L \varphi(x)\,d\mu = |B|_\nu + \int_L f_1(x)\,d\mu,$$

takže

$$\int_L \varphi(x)\,d\mu = \lim \int_L f_n(x)\,d\mu.$$

21·2·19. *Nechť φ je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ taková, že $\int_L \varphi(x)\,d\mu$ je konvergentní. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost μ-měřitelných funkcí v oboru L taková, že pro $x \in L$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$. Pak jest*

$$\underline{\lim} \int_L f_n(x)\,d\mu \geqq \int_L \underline{\lim}\, f_n(x)\,d\mu, \tag{15}$$

$$\overline{\lim} \int_L f_n(x)\,d\mu \leqq \int_L \overline{\lim}\, f_n(x)\,d\mu.$$

Důkaz proveďme třeba pro (15). Položme $g_n(x) = \inf_{i \geqq n} f_i(x)$, takže $g_n(x) \leqq g_{n+1}(x)$ a $\lim g_n(x) = \underline{\lim}\, f_n(x)$. Ježto $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$, je také $|g_n(x)| \leqq \varphi(x)$, takže podle **21·2·14** (v. též **21·1·12**) integrály

$$\int_L f_n(x)\,d\mu,\ \int_L g_n(x)\,d\mu$$

jsou konvergentní. Podle **21·2·11** jest

$$i \geqq n \Rightarrow \int_L g_n(x)\,d\mu \leqq \int_L f_i(x)\,d\mu,$$

takže také

$$\int_L g_n(x)\,d\mu \leqq \inf_{i \geqq n} \int_L f_i(x)\,d\mu = v_n. \tag{16}$$

Jest $\underline{\lim} \int_L f_n(x)\,d\mu = \lim v_n$. Podle **21·2·18** je však

$$\int_L \lim g_n(x)\,d\mu = \lim \int_L g_n(x)\,d\mu$$

a pravá strana je $\leqq \lim v_n$ podle (16). Tedy

$$\int_L \lim g_n(x)\,d\mu \leqq \lim v_n,$$

což dává (15).

21·2·20. *Nechť φ je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ taková, že $\int_L \varphi(x)\,d\mu$ je konvergentní. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost μ-měřitelných funkcí v oboru L taková, že pro $x \in L$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$. Nechť $N \subset L$, $N \in \mathfrak{N}_\mu$. Nechť F je funkce v oboru L taková, že*

$$x \in L - N \Rightarrow f_n(x) \to F(x).$$

Pak je

$$\lim \int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L F(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Podle **21·2·19** je

$$\int_L \varliminf f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \varliminf \int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \varlimsup \int_L f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_L \varlimsup f_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Podle **21·2·8** je však

$$\int_L \varliminf f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L F(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L \varlimsup f_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

21·2·21. *Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť* $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) < g(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$. *Nechť*

$$-\infty < \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Pak $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) \neq g(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$.

Důkaz. Položme $N_1 = \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) < g(x)]$, $N_2 = \mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) = \pm\infty]$, $N_3 = \mathop{\mathrm{E}}_x[g(x) = \pm\infty]$, $N = N_1 + N_2 + N_3$. Jest $N_1 \in \mathfrak{N}_\mu$ a podle **21·2·9** jest $N_2 \in \mathfrak{N}_\mu$, $N_3 \in \mathfrak{N}_\mu$, tedy $N \in \mathfrak{N}_\mu$ podle **20·1·9.** Pro $x \in L - N$ položme $\varphi(x) = f(x) - g(x)$; pro $x \in N$ položme $\varphi(x) = 0$. Pak φ je nezáporná μ-měřitelná funkce (v. **21·1·2, 21·1·3** a **21·1·9**) v oboru L. Podle **21·2·10** jest $\int_L [g(x) + \varphi(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_L g(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$. Avšak $N \in \mathfrak{N}_\mu$ a pro $x \in L - N$ jest $g(x) + \varphi(x) = f(x)$; tedy $\int_L [g(x) + \varphi(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ podle **21·2·8** (v. též **20·1·7**). Ježto $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu \neq \pm\infty$, jest $\int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$.

Nechť $N'_n = \mathop{\mathrm{E}}_x\left[\varphi(x) > \dfrac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, takže $N'_n \in \mathfrak{L}_\mu$. Ježto φ je nezáporná funkce, jest (v. **21·2·7**)

$$\int_{N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq 0,\ \int_{L-N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq 0,\ \int_{N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_L \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = 0,$$

tedy $\int_{N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu = 0$. Avšak podle **21·2·5** a **21·2·11** jest

$$\int_{N'_n} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu \geqq \int_{N'_n} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\,|\,N'_n\,|_\mu.$$

Tedy $|\,N'_n\,|_\mu = 0$, t. j. $N'_n \in \mathfrak{N}_\mu$. Zřejmě však $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) \neq g(x)] \subset N + \sum_{n=1}^{\infty} N'_n$, takže $\mathop{\mathrm{E}}_x[f(x) \neq g(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$ podle **20·1·9.**

21·3. Jako v odst. **20·3** předpokládejme: Jsou dány prostory P a Q, množinová tělesa $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ a $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{Q}$ a konečné nezáporné σ-aditivní množinové funkce μ_1 v oboru $\mathfrak{A}$ a μ_2 v oboru $\mathfrak{B}$. Jako ve **20·3** definujme konečnou nezápornou σ-aditivní množinovou funkci μ_{12} v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Jako ve **20·3** pišme

$$| A |_1, \quad | B |_2, \quad | C |_{12}, \; \mathfrak{L}_1, \; \mathfrak{L}_2, \; \mathfrak{L}_{12}, \; \mathfrak{N}_1, \; \mathfrak{N}_2, \; \mathfrak{N}_{12}$$

resp. místo $| A |_{\mu_1}$ atd. Když $C \subset P \times Q$, $x \in P$, $y \in Q$, definujme množiny $\sigma'_y(C)$ a $\sigma''_x(C)$ jako ve **20·3** (str. 158 dole).

21·3·1. *Nechť* $A \in \mathfrak{L}_1$, $C \in \mathfrak{L}_{12}$, $C \subset A \times Q$.*). *Pro* $x \in A$ *položme* $\varphi(x) = |\sigma''_x(C)|_2$ (to lze podle **20·3·7**). *Pak* φ *je* μ_1-*měřitelná funkce v oboru* A *a jest*

$$\int_A \varphi(x) \, d\mu_1 = | C |_{12}.$$

Důkaz. I. Zvolme množiny $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$ tak, že $| A |_1 < \infty$, $B |_2 < \infty$ a položme

$$\mathfrak{L}^*_1 = \mathop{E}_X[X \in \mathfrak{L}_1, \; X \subset A], \; \mathfrak{L}^*_2 = \mathop{E}_Y[Y \in \mathfrak{L}_2, \; Y \subset B].$$

Podle cvič. *18·22* je

$$\tau(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2) = \mathop{E}_Z[Z \in \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2), \; Z \subset A \times B].$$

Označme (při daných množinách A a B) $\mathfrak{C}$ systém těch $C \in \tau(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2)$, pro něž tvrzení naší věty je správné. Pak jest $\mathfrak{C} \subset \tau(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2)$ a podle **20·3·5** a **21·2·5** jest $(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2) \subset \mathfrak{C}$.

Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a $C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ s disjunktními sčítanci. Dokažme, že $C \in \mathfrak{C}$. Pro $x \in A$ nechť $\varphi(x) = | \sigma''_x(C) |_2$, $\varphi_n(x) = | \sigma''_x(C_n) |_2$. Zřejmě $\sigma''_x(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma''_x(C_n)$ s disjunktními sčítanci, takže podle **20·1·17** a **20·3·6** jest $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ pro každý $x \in A$. Podle **21·2·10** jest

$$\sum_{i=1}^{n} \int_A \varphi_i(x) \, d\mu_1 = \int_A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \, d\mu_1$$

a podle **21·2·18** jest

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \, d\mu_1 = \int_A \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \, d\mu_1.$$

---

*) K dané množině $C \in \mathfrak{L}_{12}$ existuje vždy (v. **20·1·15** a **20·3·8**) množina A taková, že $A \in \mathfrak{L}_1$, $C \subset A \times Q$.

Tedy

$$\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\,C_n\,|_{12} = |\,C\,|_{12},$$

kde poslední rovnost je důsledek věty **20·1·17**. Tedy $C \in \mathfrak{C}$.

Nechť $C_n \in \mathfrak{C}$, $C_n \supset C_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $C = \prod_{n=1}^{\infty} C_n$. Dokažme, že $C \in \mathfrak{C}$. Podle **20·1·5** a **20·3·5** jest $|\,C_1\,|_{12} \leqq |\,A \times B\,|_{12} = |\,A\,|_1\,|\,B\,|_2 < \infty$. Opět nechť $\varphi(x) = |\,\sigma''_x(C)\,|_2$, $\varphi_n(x) = |\,\sigma''_x(C_n)\,|_2$ pro $x \in A$. Ježto $C_1 \in \mathfrak{C}$, je $C_1 \subset A \times B$, tedy $\sigma''_x(C_1) \subset B$, tedy $0 \leqq \varphi_1(x) = |\,\sigma''_x(C_1)\,|_2 \leqq |\,B\,|_2 < \infty$. Zřejmě $\sigma''_x(C_n) \supset \sigma''_x(C_{n+1})$, $\sigma''_x(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \sigma''_x(C_n)$, takže podle **19·2·3**, **20·1·17** a **20·3·6** jest

$$x \in A - N \Rightarrow \varphi(x) = \lim \varphi_n(x).$$

Ježto $0 \leqq \varphi_n(x) \leqq \varphi_1(x)$ pro $x \in A$ a ježto $\int_A \varphi_1(x)\,\mathrm{d}\mu_1$ je konvergentní, podle **21·2·20** jest

$$\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \lim \int_A \varphi_n(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \lim\,|\,C_n\,|_{12} = |\,C\,|_{12},$$

kde poslední rovnost je důsledkem vět **19·2·3** a **20·1·17**. Tedy $C \in \mathfrak{C}$.

Nyní následuje z **18·5·5**,*) že $\mathfrak{C} = \tau(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2)$. Tím je dokázáno, že naše věta je správná, když předpoklad $A \in \mathfrak{L}_1$, $C \in \mathfrak{L}_{12}$, $C \subset A \times Q$ nahradíme předpokladem $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$, $C \in \tau(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$, $C \subset A \times B$, $|\,A\,|_1 < \infty$, $|\,B\,|_2 < \infty$.

II. Nechť $A \in \mathfrak{L}_1$, $C \in \mathfrak{L}_{12}$, $C \subset A \times Q$. Podle **20·1·22** existují množiny $C_1 \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a $N_1 \in \mathfrak{N}_{12}$ takové, že $C_1 = C + N_1$. Podle **20·1·23** existují množiny $C_2 \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a $N_2 \in \mathfrak{N}_{12}$ takové, že $C = C_2 + N_2$. Ježto $A \in \mathfrak{L}_1$, existuje množina $A^{(0)} \in \tau(\mathfrak{A})$ taková, že $A^{(0)} \supset A$. Položme $C_0 = C_1\,.\,(A^{(0)} \times Q)$. Jest $C_0 \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $C_2 \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a $C_2 \subset C \subset C_0$, $C_0 - C_2 \subset N_1 + N_2$, takže (v. **20·1·7** a **20·1·9**) jest $C_0 - C_2 \in \mathfrak{N}_{12}$. Ježto $C_0 \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, jest (v. **20·1·15**) $C_0 \in \mathfrak{L}_{12}$, takže existuje posloupnost $\{D_n\}_1^{\infty}$ taková, že $D_n \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} D_n \supset C_0$. Položme $E_1 = D_1$, $E_{n+1} = D_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} D_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pak posloupnost $\{E_n\}_1^{\infty}$ je disjunktní, jest $E_n \in t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ a $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \supset C_0$. Ježto $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ jsou množinová tělesa, mají vlastnost α (v. str. 126 dole), takže systém $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ má (v. **18·2·5**) vlastnost α; tedy (v. **18·2·4**) pro každé n jest $E_n =$

---

*) Do **18·5·5** je dosaditi $(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2)$ za $\mathfrak{A}$. Ježto $\mathfrak{L}^*_1$ a $\mathfrak{L}^*_2$ jsou množinová tělesa, má (v. **18·2·5**) systém $(\mathfrak{L}^*_1, \mathfrak{L}^*_2)$ vlastnost α (v. str. 126 dole), tedy tím spíše vlastnost, která se v **18·5·5** požaduje na systému $\mathfrak{A}$.

$= \sum_{i=1}^{k_n} (A'_{in} \times B'_{in})$ s disjunktními sčítanci, kde $A'_{in} \in \mathfrak{A}$, $B'_{in} \in \mathfrak{B}$.
Jest $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} (A'_{in} \times B'_{in}) \supset C_0$. S malou změnou označení můžeme říci: existují posloupnosti $\{A_n\}_1^{\infty}$ a $\{B_n\}_1^{\infty}$ takové, že $A_n \in \mathfrak{A}$, $B_n \in \mathfrak{B}$ a $C_0 \subset \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)$, kde součet napravo je disjunktní. Pro $x \in A^{(0)}$ nechť

$$\varphi(x) = |\sigma''_x(C)|_2,\ \psi(x) = |\sigma''_x(C_0)|_2,\ \chi(x) = |\sigma''_x(C_2)|_2;$$

pro $x \in A^{(0)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ nechť

$$\psi_n(x) = |\sigma''_x[C_0 \,.\, (A_n \times B_n)]|_2,\ \chi_n(x) = |\sigma''_x[C_2 \,.\, (A_n \times B_n)]|_2.$$

Podle **20·1·15**, **20·1·17** a **20·3·6** jest pro $x \in A^{(0)}$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x),\ \chi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x).$$

Podle I je pro každé n

$$\int_{A^{(0)}A_n} \psi_n(x) d\mu_1 = |C_0 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12},$$

$$\int_{A^{(0)}A_n} \chi_n(x) d\mu_1 = |C_2 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12}.$$

Podle **20·1·5**, **20·1·10** a **20·3·3** je $0 \leqq |C_0 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12} \leqq |A_n \times B_n|_{12} = \mu_1(A_n) \,.\, \mu_2(B_n) < \infty$. Ježto $C_0 \supset C_2$, $C_0 - C_2 \in \mathfrak{N}_{12}$, je také $|C_0 \,.\, (A_n \times B_n) - C_2 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12} \in \mathfrak{N}_{12}$, tedy $|C_0 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12} = |C_2 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12}$. Mimo to pro každý $x \in A^{(0)}$ je $0 \leqq \chi_n(x) \leqq \psi_n(x)$, takže podle **21·2·21** je $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)}A_n,\ \psi_n(x) \neq \chi_n(x)] \in \mathfrak{N}_1$. Pro $x \in A^{(0)} - A_n$ je $\chi_n(x) = \psi_n(x) = 0$, takže $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)},\ \psi_n(x) \neq \chi_n(x)] \in \mathfrak{N}_1$.

Zřejmě $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)},\ \psi(x) \neq \chi(x)] \subset \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)},\ \psi_n(x) \neq \chi_n(x)]$, takže $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)},\ \psi(x) \neq \chi(x)] \in \mathfrak{N}_1$. Zřejmě $\chi(x) \leqq \varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro $x \in A^{(0)}$, takže $\underset{x}{\mathrm{E}}[x \in A^{(0)},\ \psi(x) \neq \varphi(x)] \in \mathfrak{N}_1$. Podle **20·1·17** jest

$$|C_0|_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} |C_0 \,.\, (A_n \times B_n)|_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^{(0)}A_n} \psi_n(x)\, d\mu_1.$$

Pro $x \in A^{(0)} - A_n$ je $\psi_n(x) = 0$, tedy podle **21·2·7** je

$$\int_{A^{(0)}} \psi_n(x)\, d\mu_1 = \int_{A^{(0)}A_n} \psi_n(x)\, d\mu_1,$$

takže

$$| C_0 |_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^{(0)}} \psi_n(x) \, d\mu_1 .$$

Podle **21·2·10** je však pro každé n

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A^{(0)}} \psi_i(x) \, d\mu_1 = \int_{A^{(0)}} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \, d\mu_1$$

a podle **21·2·18** jest

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A^{(0)}} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \, d\mu_1 = \int_{A^{(0)}} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \, d\mu_1,$$

takže

$$\int_{A^{(0)}} \psi(x) \, d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^{(0)}} \psi_n(x) \, d\mu_1 = | C_0 |_{12} .$$

Podle **21·2·8** je $\int_{A^{(0)}} \psi(x) \, d\mu_1 = \int_{A^{(0)}} \varphi(x) \, d\mu_1$. Pro $x \in A^{(0)} - A$ je $\varphi(x) = 0$, takže podle **21·2·7** je $\int_{A^{(0)}} \varphi(x) \, d\mu_1 = \int_{A} \varphi(x) \, d\mu_1$. Ježto $C_2 \subset \subset C \subset C_0$, $C_0 - C_2 \in \mathfrak{N}_{12}$, je $| C |_{12} = | C_0 |_{12}$. Tedy $\int_{A} \varphi(x) \, d\mu_1 = | C |_{12}$.

21·3·2. *Nechť $C \in \mathfrak{N}_{12}$. Nechť M je množina těch $x \in P$, pro něž $\sigma''_x(C) \in \mathfrak{N}_2$. Pak $P - M \in \mathfrak{N}_1$.*

Důkaz. Podle **20·3·8** (v. též **20·1·15**) existuje množina $A \in \mathfrak{L}_1$ taková, že $C \subset A \times Q$. Když $x \in P - A$, zřejmě $\sigma''_x(C) = \emptyset$, tedy $P - A \subset M$, tedy $P - M = A - M$. Pro $x \in A$ nechť $\varphi(x) = | \sigma''_x(C) |_2$, takže $A - M = \underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > 0]$. Podle **21·3·1** jest

$$\int_A \varphi(x) \, d\mu_1 = | C |_{12} = 0 = \int_A 0 \, d\mu_1,$$

takže podle **21·2·21** jest $| \underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi(x) > 0] |_1 = 0$, t. j. $A - M \in \mathfrak{N}_1$.

21·3·3. *Nechť $C \in \mathfrak{L}_{12}$. Nechť je M množina těch $x \in P$, pro něž $\sigma''_x(C) \in \mathfrak{L}_2$. Pak $P - M \in \mathfrak{N}_1$.*

Důkaz. Podle **20·1·23** jest $C = U + N$, $U \in \tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, $N \in \mathfrak{N}_{12}$. Podle **20·3·6** jest $\sigma''_x(U) \in \mathfrak{L}_2$ pro každý $x \in Q$. Mimo to zřejmě $\sigma''_x(C) = = \sigma''_x(U) + \sigma''_x(N)$, takže podle **20·1·11** a **20·1·14**

$$\sigma''_x(N) \in \mathfrak{N}_2 \Rightarrow \sigma''_x(C) \in \mathfrak{L}_2 .$$

Tedy $P - M \in \mathfrak{N}_1$ podle **21·3·2**.

21·3·4. *Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $C \in \mathfrak{L}_{12}$. Pro každý $x \in P$ definujme funkci f_x v oboru $\sigma_x''(C)$ takto: $f_x(y) = f(x, y)$. Nechť* *je M množina těch $x \in P$, pro něž:* [1] $\sigma''_x(C) \in \mathfrak{L}_2$, [2] f_x *je μ_2-měřitelná funkce v oboru* $\sigma''_x(C)$.*) *Pak* $P - M \in \mathfrak{N}_1$.

Důkaz. Nechť $\{r_n\}_1^\infty$ je posloupnost všech racionálních čísel. Množina $\underset{(x,y)}{\mathrm{E}} [f(x, y) < r_n]$ je μ_{12}-měřitelná. Tedy podle **21·3·3** existuje množina $N_n \in \mathfrak{N}_1$ taková, že

$$x \in P - N_n \Rightarrow \underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < r_n] \in \mathfrak{L}_2.$$

Podle **21·3·3** také existuje množina $N_0 \in \mathfrak{N}_1$ taková, že

$$x \in P - N_0 \Rightarrow \sigma''_x\,(C) \in \mathfrak{L}_2.$$

Nechť $N = \sum_{n=0}^{\infty} N_n$, tedy $N \in \mathfrak{N}_1$ (v. **20·1·9**). Stačí (v. **20·1·7**) dokázati, že $P - N \subset M$. Nechť tedy $x \in P - N$. Ježto $N_0 \subset N$, jest $\sigma''_x(C) \in \mathfrak{L}_2$. Nechť $c \in \mathrm{E}_1$. Stačí dokázati, že $\underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < c] \in \mathfrak{L}_2$. Existují indexy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ $(n_1 \geqq 1)$ takové, že $r_{n_i} < c$, $\lim r_{n_i} = c$. Ježto $N_{n_i} \subset N$, jest $\underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < r_{n_i}] \in \mathfrak{L}_2$. Avšak

$$\underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < c] = \sum_{i=1}^{\infty} \underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < r_{n_i}].$$

Tedy $\underset{y}{\mathrm{E}}[f_x(y) < c] \in \mathfrak{L}_2$ podle **20·1·14.**

21·3·5. *Nechť $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$. Nechť f je μ_{12}-měřitelná funkce v oboru $A \times B$ taková, že $\int_{A\times B} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12}$ existuje. Pro každý $x \in A$ definujme funkci f_x v oboru B takto: $f_x(y) = f(x, y)$. Nechť K je množina těch $x \in A$, pro něž funkce f_x je μ_2-měřitelná a $\int_B f_x(y)\, \mathrm{d}\mu_2$ existuje. Nechť φ je funkce v oboru A taková, že $\varphi(x) = \int_B f_x(y)\, \mathrm{d}\mu_2$ pro každý $x \in K$. Pak*

$$\int_{A\times B} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_A \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu_1. \tag{1}$$

Poznámka. Zpravidla se píše $\int_B f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_2$ místo $\int_B f_x(y)\, \mathrm{d}\mu_2$.

Důkaz. Nechť f nabývá pouze hodnot 0 a 1. Nechť $C = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[f(x, y) = 1]$. Pak $C \in \mathfrak{L}_{12}$, $C \subset A \times B$ a (v. **21·2·5** a **21·2·7**)

$$\int_{A\times B} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_C 1 \,.\, \mathrm{d}\mu_{12} = |\, C\,|_{12},$$

takže podle **21·3·1**

$$\int_{A\times B} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_A \psi(x)\, \mathrm{d}\mu_1,$$

---

*) Ty body $x \in P$, pro něž $\sigma''_x(C) = \emptyset$, počítáme do množiny M.

kde $\psi(x) = |\sigma''_x(C)|_2$. Ježto f je nezáporná funkce, K je množina těch $x \in A$, pro něž funkce f_x je μ_2-měřitelná. Podle věty **21·3·4** (do které za C dosadíme $A \times B$) jest $A - K \in \mathfrak{N}_1$. Nechť M je množina těch $x \in A$, pro něž $\sigma''_x(C) \in \mathfrak{L}_2$. Podle **21·3·3** jest $A - M \in \mathfrak{N}_1$. Pro $x \in MK$ jest podle **21·2·5** a **21·2·7**

$$\varphi(x) = \int_B f_x(y)\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{\sigma''_x(C)} 1\,\mathrm{d}\mu_2 = \psi(x).$$

Podle **20·1·9** jest $A - MK = (A - M) + (A - K) \in \mathfrak{N}_1$. Tedy podle **21·2·8**

$$\int_A \psi(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1,$$

takže platí (1).

II. Nechť funkce f je konečná, nezáporná a nabývá pouze konečného počtu hodnot. Nechť c_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty funkce f; nechť $C_i = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[f(x, y) = c_i]$. Nechť f_i $(1 \leqq i \leqq m)$ je funkce v oboru $A \times B$ taková, že $f_i(x, y) = 1$ pro $(x, y) \in C_i$ a $f_i(x, y) = 0$ pro $(x, y) \in (A \times B) - C_i$, takže $f = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$. Nechť K_i $(1 \leqq i \leqq m)$ je množina, která odpovídá funkci f_i tak, jako množina K odpovídá funkci f. Nechť φ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ je funkce v oboru A taková, že $\varphi_i(x) = \int_B f_i(x, y)\,\mathrm{d}\mu_2$ pro $x \in K_i$. Podle **20·1·9** a **21·3·4** je $A - K\,.\prod_{i=1}^{m} K_i = A - K + \sum_{i=1}^{m}(A - K_i) \in \mathfrak{N}_1$. Pro $x \in K\,.\prod_{i=1}^{m} K_i$ je

$$\varphi(x) = \int_B f(x, y)\,\mathrm{d}\mu_2, \quad \varphi_i(x) = \int_B f_i(x, y)\,\mathrm{d}\mu_2,$$

tedy $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)$ podle **21·2·10** a **21·2·16**. Podle týchž vět je

$$\int_{A\times B} f(x, y)\,\mathrm{d}\mu_{12} = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_{A\times B} f_i(x, y)\,\mathrm{d}\mu_{12},$$

$$\int_A \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_A \varphi_i(x)\,\mathrm{d}\mu_1.$$

Podle **21·2·8** jest

$$\int_A \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i(x)\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1.$$

Podle I jest

$$\int_{A\times B} f_i(x, y)\,\mathrm{d}\mu_{12} = \int_A \varphi_i(x)\,\mathrm{d}\mu_1.$$

Tedy platí (1).

III. Nechť funkce f je nezáporná. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ konečných μ_{12}-měřitelných funkcí v oboru $A \times B$, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, taková, že pro každý bod $(x, y) \in A \times B$ jest $0 \leqq f_n(x, y) \leqq f_{n+1}(x, y)$, $f_n(x, y) \to f(x, y)$. Nechť K_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ je množina, která odpovídá funkci f_n tak, jako množina K odpovídá funkci f. Nechť φ_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ je funkce v oboru A taková, že $\varphi_n(x) = \int\limits_B f_n(x, y)\, d\mu_2$ pro $x \in K_n$. Podle **20·1·9** a **21·3·4** je $A - K \,.\, \prod\limits_{n=1}^{\infty} K_n = (A - K) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A - K_n) \in \mathfrak{N}_1$. Podle II jest

$$\int\limits_{A \times B} f_n(x, y)\, d\mu_{12} = \int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu_1.$$

Nechť ψ a ψ_n jsou funkce v oboru A takové, že: [1] pro $x \in K \,.\, \prod\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ jest $\psi(x) = \varphi(x)$, $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$, [2] pro $x \in A - K \,.\, \prod\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ jest $\psi(x) = 0 = \psi_n(x)$. Podle **21·2·18** jest $\psi_n(x) \to \psi(x)$ pro každý $x \in A$ a podle **21·2·11** jest $0 \leqq \psi_n(x) \leqq \psi_{n+1}(x)$ pro každý $x \in A$. Tedy podle **21·2·18** jest

$$\int\limits_A \psi_n(x)\, d\mu_1 \to \int\limits_A \psi(x)\, d\mu_1.$$

Podle téže věty jest

$$\int\limits_{A \times B} f_n(x, y)\, d\mu_{12} \to \int\limits_{A \times B} f(x, y)\, d\mu_{12}.$$

Podle **21·2·8** jest

$$\int\limits_A \psi(x)\, d\mu_1 = \int\limits_A \varphi(x)\, d\mu_1, \quad \int\limits_A \psi_n(x)\, d\mu_1 = \int\limits_A \varphi_n(x)\, d\mu_1.$$

Tedy platí (1).

IV. Obraťme se posléze k obecnému případu. Nechť K_1 a K_2 jsou množiny, které odpovídají funkcím f^+ a f^- stejně, jako množina K odpovídá funkci f. Podle **21·3·4** jest $A - K_1 \in \mathfrak{N}_1$, $A - K_2 \in \mathfrak{N}_1$. Nechť φ_1 a φ_2 jsou funkce v oboru A takové, že $\varphi_1(x) = \int\limits_B f^+(x, y)\, d\mu_2$ pro každý $x \in K_1$ a $\varphi_2(x) = \int\limits_B f^-(x, y)\, d\mu_{12}$ pro každý $x \in K_2$. Podle III jest

$$\int\limits_{A \times B} f^+(x, y)\, d\mu_{12} = \int\limits_A \varphi_1(x)\, d\mu_1, \quad \int\limits_{A \times B} f^-(x, y)\, d\mu_{12} = \int\limits_A \varphi_2(x)\, d\mu_1.$$

Podle **21·2·4** jest

$$\int\limits_{A \times B} f(x, y)\, d\mu_{12} = \int\limits_{A \times B} f^+(x, y)\, d\mu_{12} - \int\limits_{A \times B} f^-(x, y)\, d\mu_{12}.$$

Ježto integrál nalevo existuje, aspoň jeden z obou integrálů napravo je konvergentní. Pro určitost nechť třeba $\int\limits_{A\times B} f^-(x, y)\, d\mu_{12}$ je konvergentní. Pak $\int\limits_A \varphi_2(x)\, d\mu_1$ je konvergentní, takže podle **21·2·9** $N = \underset{x}{\mathrm{E}}[\varphi_2(x) = \infty] \in \mathfrak{N}_1$. Podle **20·1·9** jest $N + (A - K_1K_2) = N + (A - K_1) + (A - K_2) \in \mathfrak{N}_1$. Pro $x \in K_1K_2 - N = A - [N + (A - K_1K_2)]$ podle **21·2·4** jest $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, takže podle **21·2·10** jest

$$\int\limits_A \varphi(x)\, d\mu_1 = \int\limits_A \varphi_1(x)\, d\mu_1 - \int\limits_A \varphi_2(x)\, d\mu_1.$$

Tedy platí (1).

21·4. Nechť nyní $P = \mathsf{E}_m$. Ve **21·1** volme $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_m$ (v. **18·3**) a $\mu = \lambda_m$ (v. **20·4**). λ_m-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_{\lambda_m} = \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ nazývají se krátce *měřitelné* (určitěji *lebesgueovsky měřitelné*) funkce.

21·4·1. *Nechť f je spojitá funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Pak f je měřitelná funkce.*

Důkaz. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ podle **9·5** jest otevřená v L, tedy (v. **8·7·5** a **20·1·14**) je měřitelná.

21·4·2. *Nechť f je funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. f je měřitelná, když a jen když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina F uzavřená v E_m a taková, že $F \subset L$, $|L - F| < \varepsilon$ a že parciální funkce f_F je spojitá.*

Důkaz. I. Nechť pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje uzavřená množina $F_n \subset L$ taková, že $|L - F_n| < \dfrac{1}{n}$ a že parciální funkce f_{F_n} je spojitá. Položme $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak jest $F_n \subset M$, tedy $L - M \subset L - F_n$, tedy $|L - M| \leqq |L - F_n| < \dfrac{1}{n}$, tedy $|L - M| = 0$, tedy $L - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Pak jest

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c] = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{\mathrm{E}}[f_{F_n}(x) < c] + \underset{x}{\mathrm{E}}[f_{L-M}(x) < c].$$

Jest $\underset{x}{\mathrm{E}}[f_{F_n}(x) < c] \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ podle **21·4·1**, $\underset{x}{\mathrm{E}}[f_{L-M}(x) < c] \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ podle **20·1·5**, tedy $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c] \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ podle **20·1·11** a **20·1·14**. Tedy f je měřitelná funkce.

II. Nechť f je měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ a nechť f je konečná a nabývá jen konečného počtu hodnot. Nechť a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá f. Nechť $A_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = a_i]$, takže $A_i \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ a $L = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$ s disjunktními sčítanci. Nechť $\varepsilon > 0$.

Podle **20·4·8** existuje uzavřená množina F_i $(1 \leqq i \leqq m)$ taková, že $F_i \subset A_i$ a $|A_i - F_i| < \frac{\varepsilon}{m}$. Nechť $F = \sum_{i=1}^{m} F_i$. Množina F jest uzavřená (v. **8·3·4**), jest $F \subset L$ a $L - F \subset \sum_{i=1}^{m} (A_i - F_i)$, tedy $|L - F| \leqq \leqq \sum_{i=1}^{m} |A_i - F_i| < \varepsilon$. Parciální funkce f_{F_i} jsou konstanty a tedy jsou spojité. Ježto množiny F_i jsou uzavřené, ježto $F = \sum_{i=1}^{m} F_i$ a ježto parciální funkce f_{F_i} jsou spojité, podle cvič. *9·5* také parciální funkce f_F je spojitá.

III. Nechť f je libovolná měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ konečných měřitelných funkcí v oboru L, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, taková, že $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro každý $x \in L$. Podle II existují uzavřené množiny $F_n \subset L$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $|L - F_n| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ a že parciální funkce $(f_n)_{F_n}$ jsou spojité. Nechť (v. cvič. *9·18*) φ je homeomorfní zobrazení prostoru R na interval $\underset{t}{\mathrm{E}}[-1 \leqq t \leqq 1]$. Pro $x \in L$ nechť $g_n(x) = \varphi[f_n(x)]$, $g(x) = \varphi[f(x)]$. Nechť $\Phi = \prod_{n=1}^{\infty} F_n$. Množina Φ jest uzavřená (v. **8·3·5**), jest $\Phi \subset L$ a $L - \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} (L - F_n)$, tedy $|L - \Phi| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |L - F_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Parciální funkce $(f_n)_\Phi$ jsou spojité, takže zřejmě i funkce $(g_n)_\Phi$ jsou spojité. Ježto $f_n(x) \rightarrow f(x)$, zřejmě $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Funkce $(g_n)_\Phi$ jsou konečné a podle **21·4·1** jsou měřitelné; funkce g_Φ je konečná. Tedy podle **20·4·8** a **21·1·15** existuje uzavřená množina $F \subset \Phi$ taková, že $|\Phi - F| < \frac{\varepsilon}{2}$ a že funkce g_F je stejnoměrnou limitou posloupnosti $\{(g_n)_F\}$. Podle **14·5·1** funkce g_F je spojitá, takže zřejmě i funkce f_F je spojitá. Ježto $L - F = (L - - \Phi) + (\Phi - F)$, jest $|L - F| \leqq |L - \Phi| + |\Phi - F| < \varepsilon$.

V případě $P = \mathsf{E}_m$, $\mu = \lambda_m$ se μ-integrál nazývá *Lebesgueův integrál*. Lebesgueův integrál se značí zpravidla

$$\int_L f(x)\,\mathrm{d}x \text{ místo } \int_L f(x)\,\mathrm{d}\lambda_m.$$

Často se také píše $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a

$$\int_L f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_m \text{ místo } \int_L f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Základní věty o Lebesgueově integrálu se dostanou z vět odst. **21·2**, volíme-li $P = \mathsf{E}_m$, $\mu = \lambda_m$ (a $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_m$).*) Věta **21·3·5** (s volbou $P = \mathsf{E}_m$, $Q = \mathsf{E}_n$, $P \times Q = \mathsf{E}_{m+n}$, $\mu_1 = \lambda_m$, $\mu_2 = \lambda_n$, $\mu_{12} = \lambda_{m+n}$) je t. zv. *Fubiniova věta.* Pomocí této věty se výpočet integrálu v E_m redukuje na (m-krát provedený) výpočet integrálu v E_1. Tomu je zdánlivě na překážku, že integračním oborem na levé straně není libovolná množina $C \in \mathfrak{L}_{12}$, nýbrž množina tvaru $A \times B$, $A \in \mathfrak{L}_1$, $B \in \mathfrak{L}_2$; to však nevadí, neboť obecně (v. **21·1·3** a **21·2·7**) pro $C \subset A \times B$ jest

$$\int_C f(x)\, d\mu_{12} = \int_{A \times B} \varphi(x)\, d\mu_{12},$$

kde $\varphi(x) = f(x)$ pro $x \in C$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \in (A \times B) - C$.

21·4·3. *V* E_m *existují* (lebesgueovsky) *neměřitelné množiny.*

Důkaz. Pro E_1 je to pravda podle **20·4·9.** Nechť při určitém m je to pravda pro E_m a dokažme, že je to pravda pro $\mathsf{E}_{m+1} = \mathsf{E}_m \times \mathsf{E}_1$. Podle **20·4·9** existuje neměřitelná množina $A \subset \mathsf{E}_1$. Nechť $M = \mathsf{E}_m \times A$. Stačí dokázati, že M je neměřitelná. Předpokládejme opak. Ježto $|\mathsf{E}_m| = \infty > 0$, podle **21·3·3** (kde klademe E_m, E_1, M místo P, Q, C), jest A měřitelná, což je spor.

Cvičení.

21·1. Nechť H je nějaká množina hustá v E_1 (na př. množina všech racionálních čísel). Nechť f je funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Funkce f je μ-měřitelná, když a jen když množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je μ-měřitelná pro každé $c \in H$.

21·2. Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Množina těch $c \in \mathsf{E}_1$, pro něž $|\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) = c]|_\mu > 0$, je spočetná.

21·3. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost μ-měřitelných funkcí v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť C je množina těch $x \in L$, v nichž existuje a je konečná $\lim f_n(x)$. Pak $C \in \mathfrak{L}_\mu$.

21·4. Nechť $p > 1$. Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ takové, že integrály

$$\int_L |f(x)|^p\, d\mu \quad \text{a} \quad \int_L |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, d\mu$$

jsou konvergentní. Pak také

$$\int_L f(x)\, g(x)\, d\mu$$

je konvergentní a jest (*Hölderova nerovnost pro integrály*)

$$\left|\int_L f(x)\, g(x)\, d\mu\right| \leqq \left[\int_L |f(x)|^p\, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_L |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} d\mu\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Důkaz se provede napřed podle (2) v **7·2** pro případ, že funkce f a g jsou konečné a nabývají jen konečného počtu hodnot.

*) Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem (pro $m = 1$) je (ve zobecněném tvaru) objasněn větami **23·5·6** a **23·5·7**.

21·5. Nechť $p \geqq 1$. Nechť f a g jsou μ-měřitelné funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ takové, že integrály

$$\int_L |f(x)|^p \, d\mu \quad \text{a} \quad \int_L |g(x)|^p \, d\mu$$

jsou konvergentní. Nechť φ je funkce v oboru L taková, že $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ pro každý $x \in L$, v němž pravá strana má význam. Pak

$$\int_L |\varphi(x)|^p \, d\mu$$

je konvergentní a jest (*Minkowského nerovnost pro integrály*)

$$[\int_L |\varphi(x)|^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}} \leqq [\int_L |f(x)|^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}} + [\int_L |g(x)|^p d\mu]^{\frac{1}{p}}.$$

Při důkaze se užije (3) v **7·2**.

21·6. Nechť $p \geqq 1$. Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť Φ_p je systém všech μ-měřitelných funkcí f v oboru L, pro něž $\int_L |f(x)|^p d\mu$ je konvergentní. Když $f_1 \in \Phi_p$, $f_2 \in \Phi_p$, zvolme funkci f_{12} v oboru L tak, že $f_{12}(x) = f_1(x) - f_2(x)$ pro každý $x \in L$, v němž pravá strana má význam, a položme

$$\varrho(f_1, f_2) = [\int_L |f_{12}(x)|^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}}.$$

Číslo $\varrho(f_1, f_2)$ je funkcemi f_1, f_2 jednoznačně určeno. Funkce $f_1 \in \Phi_p$ a $f_2 \in \Phi_p$ nazveme ekvivalentní, když $\mathrm{E}_x[f_1(x) \neq f_2(x)] \in \mathfrak{N}_\mu$. Jest $\varrho(f_1, f_2) = 0$, když a jen když f_1 a f_2 jsou ekvivalentní. Když $f_1 \in \Phi_p$ a $g_1 \in \Phi_p$ jsou ekvivalentní a když $f_2 \in \Phi_p$ a $g_2 \in \Phi_p$ jsou ekvivalentní, jest $\varrho(f_1, f_2) = \varrho(g_1, g_2)$. Systém Φ_p lze rozděliti ve třídy tak, že každá $f \in \Phi_p$ je právě v jedné třídě a že dvě funkce $f_1 \in \Phi_p$ a $f_2 \in \Phi_p$ jsou tehdy a jen tehdy ekvivalentní, když jsou ve stejné třídě. Nechť $\Psi_p \subset \Phi_p$ obsahuje právě jednu funkci z každé třídy mezi sebou ekvivalentních funkcí. Pak ϱ je metrika ve Ψ_p.

21·7. Nechť f je μ-měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}_\mu$ taková, že $\int_L f(x) \, d\mu$ je konvergentní. Nechť φ je σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathrm{E}_X[X \in \mathfrak{L}_\mu, X \subset L]$ taková, že

$$X \in \mathfrak{L}_\mu, \; X \subset L, \; a \in \mathbf{E}_1, \; b \in \mathbf{E}_1, \; a < b, \; Y = \mathrm{E}_x[x \in X, a < f(x) < b]$$

implikuje

$$a \, |Y|_\mu \leqq \varphi(Y) \leqq b \, |Y|_\mu.$$

Pak $\varphi(X) = \int_X f(x) \, d\mu$ pro každou $X \in \mathfrak{L}_\mu$, $X \subset L$.

21·8. Ve **21·2·19** vynechme předpoklad $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$ a nahraďme jej předpokladem $f_n(x) \geqq 0$. Pak z obou nerovností l. c. tvrzených prvá je správná, ale druhá může býti nesprávná.

21·9. Z **21·4·2** lze odvoditi tuto větu. Nechť f je funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_m)$. f je měřitelná, když a jen když existuje množina $M \subset L$ taková, že: [1] M je $\mathbf{G}_\delta(\mathbf{E}_m)$; [2] $L - M \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_m)$; [3] parciální funkce f_M je prvé třídy.

*21·10.** Nechť μ a ν mají stejný význam jako ve **21·2**. Nechť $L \in \mathfrak{L}_\mu$. Nechť f je nezáporná funkce v oboru L. Nechť množina

$$\underset{(x,t)}{\mathrm{E}}[x \in L,\ 0 \leqq t < f(x)]$$

je ν-měřitelná. Pak funkce f je μ-měřitelná. Důkaz se provede pomocí **21·3·3** (v. též cvič. *21·1*).

Nechť nyní P je metrický prostor a nechť $B \subset P$ je Borelova množina. Nechť f je funkce v oboru B. Pravíme, že f je *Baireova funkce*, když pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ množina $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < c]$ je Borelova.

21·11. Funkce první třídy (speciálně spojitá funkce) v oboru $B \in \mathbf{B}(P)$ je Baireova funkce.

21·12. Baireova funkce v oboru $B \in \mathbf{B}\,(\mathbf{E}_m)$ je (lebesgueovsky) měřitelná.

21·13. Ve větách **21·1·1—21·1·3**, **21·1·5—21·1·14** a ve cvič. *21·1* a *21·* lze nahraditi μ-měřitelné funkce Baireovými funkcemi, když současně nahradíme μ-měřitelné množiny Borelovými množinami.

§ 22. Množinové funkce s konečnou variací.

22·1. V celém odstavci předpokládáme: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$ je dané množinové těleso; f je daná aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{A}$.

Pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$ položme

$$\overline{V}(A) = \sup f(X),\quad \underline{V}(A) = -\inf f(X),$$

kde X probíhá všecky množiny takové, že $X \in \mathfrak{A}$, $X \subset A$. Tím jsou funkci f přiřazeny dvě nové množinové funkce $\overline{V}$ a $\underline{V}$ v oboru $\mathfrak{A}$. Určitěji píšeme $\overline{V} = \overline{V}_f$, $\underline{V} = \underline{V}_f$. Funkce $\overline{V}$ a $\underline{V}$ se nazývají resp. *horní* a *dolní variace* funkce f.

Z **18·1·2** a **19·1·1** plyne:

22·1·1. *Jest*

$$0 \leqq \overline{V}(A) \leqq \infty,\ 0 \leqq \underline{V}(A) \leqq \infty$$

pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$.

22·1·2. $\overline{V}$ *a* $\underline{V}$ *jsou aditivní množinové funkce v oboru* $\mathfrak{A}$.

Důkaz proveďme třeba pro $\overline{V}$. Nechť $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$, $AB = \emptyset$. Máme dokázati, že $\overline{V}(A+B) = \overline{V}(A) + \overline{V}(B)$. Nechť X probíhá všecky množiny takové, že $X \in \mathfrak{A}$, $X \subset A$; nechť Y probíhá všecky množiny takové, že $Y \in \mathfrak{A}$, $Y \subset B$. Pak jest

$$\overline{V}(A) = \sup f(X),\quad \overline{V}(B) = \sup f(Y).$$

Jest $X + Y \in \mathfrak{A}$, $X + Y \subset A + B$. Obráceně, když $Z \in \mathfrak{A}$, $Z \subset A + B$,

$$X = AZ,\quad Y = BZ$$

jest

$$X \in \mathfrak{A},\ X \subset A,\ Y \in \mathfrak{A},\ Y \subset B,\ X + Y = Z.$$

Tedy

$$\overline{V}(A+B) = \sup f(X+Y).$$

Ježto $AB = \emptyset$, jest $XY = \emptyset$, tedy

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y) \leqq \overline{V}(A) + \overline{V}(B),$$

takže

$$\overline{V}(A + B) \leqq \overline{V}(A) + \overline{V}(B).$$

Na druhé straně

$$f(X) + f(Y) = f(X + Y) \leqq \overline{V}(A + B),$$

tedy

$$f(X) + \overline{V}(B) = f(X) + \sup f(Y) \leqq \overline{V}(A + B),$$

takže

$$\overline{V}(A) + \overline{V}(B) = \sup f(X) + \overline{V}(B) \leqq \overline{V}(A + B).$$

Tedy

$$\overline{V}(A + B) = \overline{V}(A) + \overline{V}(B).$$

Pro každou $A \in \mathfrak{A}$ položme

$$V(A) = \overline{V}(A) + \underline{V}(A);$$

to lze, neboť podle **22·1·1** pravá strana není bezvýznamná. Tím je definována nová množinová funkce $V = V_f$ v oboru $\mathfrak{A}$. Nazýváme ji *totální variací* funkce f. Z **22·1·1** plyne:

22·1·3. *Jest*

$$0 \leqq V(A) \leqq \infty$$

pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$.

Z **22·1·2** plyne podle **22·1·1** a cvič. *19·2*:

22·1·4. *V je aditivní množinová funkce v oboru* $\mathfrak{A}$.

22·1·5. *Pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$, pro kterou rozdíl $\overline{V}(A) - \underline{V}(A)$ není bezvýznamný, jest*

$$f(A) = \overline{V}(A) - \underline{V}(A).$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathfrak{A}$ a nechť rozdíl $\overline{V}(A) - \underline{V}(A)$ není bezvýznamný, takže podle **22·1·1** buďto $\overline{V}(A) \in \mathbf{E}_1$ nebo $\underline{V}(A) \in \mathbf{E}_1$. Nechť X probíhá všecky množiny takové, že $X \in \mathfrak{A}$, $X \subset A$, takže

$$\overline{V}(A) = \sup f(X), \quad -\underline{V}(A) = \inf f(X).$$

Ježto $\mathfrak{A}$ je množinové těleso, probíhá $A - X$ stejné množiny jako X, takže

$$\overline{V}(A) = \sup f(A - X), \quad -\underline{V}(A) = \inf f(A - X).$$

Ježto f jest aditivní funkce, jest

$$f(A) = f(X) + f(A - X) \leqq f(X) + \sup f(A - X) = f(X) + \overline{V}(A),$$

tedy

$$f(A) \leqq \overline{V}(A) + \inf f(X) = \overline{V}(A) - \underline{V}(A).$$

Podobně

$$f(A) = f(X) + f(A - X) \geqq f(X) + \inf f(A - X) = f(X) - \underline{V}(A),$$

tedy

$$f(A) \geqq \sup f(X) - \underline{V}(A) = \overline{V}(A) - \underline{V}(A).$$

Tedy $f(A) = \overline{V}(A) - \underline{V}(A)$.

Pravíme, že f má *konečnou variaci* (nebo že je to *funkce s konečnou variací*), když totální variace V_f je konečná funkce, nebo, což je zřejmě totéž, když horní i dolní variace $\overline{V}_f$ a $\underline{V}_f$ jsou konečné funkce. Z **22·1·5** plyne:

22·1·6. *Funkce s konečnou variací je konečná.*

Dokonce podle **22·1·1** a **22·1·5**:

22·1·7. *Když f má konečnou variaci, existují konečné nezáporné aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{A}$ takové, že $f = f_1 - f_2$. Lze voliti na př. $f_1 = \overline{V}_f$, $f_2 = \underline{V}_f$.*

22·1·8. *Nechť f_1 a f_2 jsou konečné nezáporné aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{A}$. Nechť $f = f_1 - f_2$. Pak jest pro každou množinu $A \in \mathfrak{A}$:*

$$f_1(A) \geqq \overline{V}(A), \quad f_2(A) \geqq \underline{V}(A),$$

takže (v. **22·1·1**) *f má konečnou variaci.*

Důkaz. Nechť X probíhá všecky množiny takové, že $X \in \mathfrak{A}$, $X \subset A$. Jest

$$f(X) = f_1(X) - f_2(X) \leqq f_1(X) \leqq f_1(X) + f_1(A - X) = f_1(A),$$

tedy

$$\overline{V}(A) = \sup f(X) \leqq f_1(A).$$

Podobně

$$-f(X) = -f_1(X) + f_2(X) \leqq f_2(X) \leqq f_2(X) + f_2(A - X) = f_2(A),$$

tedy

$$\underline{V}(A) = -\inf f(X) \leqq f_2(A).$$

22·1·9. *Nechť f je konečná aditivní funkce v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Nechť existuje σ-aditivní funkce φ v množinovém σ-tělese $\tau(\mathfrak{A})$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{A}}$ je identická s f. Pak f má konečnou variaci.*

Důkaz. Nechť naopak existuje množina $A \in \mathfrak{A}$ taková, že třeba $\overline{V}_f(A) = \infty$. Ježto $\varphi(A) = f(A) \neq \pm\infty$, podle **19·1·2** je $\varphi(B) \neq \pm\infty$ pro každou množinu B takovou, že $B \in \tau(\mathfrak{A})$, $B \subset A$.

Sestrojíme rekurentně posloupnost $\{A_n\}_1^\infty$ takovou, že

$$A_n \in \mathfrak{A}, \ A_n \subset A, \ A_{n+1} \subset A_n, \ \overline{V}_f(A_n) = \infty, \ |f(A_n)| \geqq n - 1$$

Volme $A_1 = A$. Nechť při určitém n je již sestrojena $A_n \epsilon \mathfrak{A}$. Jest $\overline{V}_f(A_n) = \infty$, takže existuje množina C taková, že

$$C \epsilon \mathfrak{A},\ C \subset A_n,\ f(C) > |f(A_n)| + n.$$

Jest (v. **22·1·2**)

$$\overline{V}_f(C) + \overline{V}_f(A_n - C) = \overline{V}_f(A_n) = \infty,$$

takže buďto $\overline{V}_f(C) = \infty$ nebo $\overline{V}_f(A_n - C) = \infty$. V prvém případě lze voliti $A_{n+1} = C$, ve druhém $A_{n+1} = A_n - C$.*)

Ježto $A_n \epsilon \mathfrak{A}$, jest $B = \prod_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon\, \tau(\mathfrak{A})$ podle **18·4·3**. Ježto $A_{n+1} \subset A_n$, $\varphi(A_n) = f(A_n) \neq \pm \infty$, podle **19·2·3** jest

$$|\varphi(B)| = \lim |\varphi(A_n)| = \lim |f(A_n)| \geqq \lim (n-1) = \infty,$$

což je spor, neboť $B \epsilon\, \tau(\mathfrak{A})$, $B \subset A$.

22·1·10. *Nechť f je konečná σ-aditivní funkce s konečnou variací v množinovém tělese $\mathfrak{A}$. Pak $\overline{V}_f$ a $\underline{V}_f$ jsou σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{A}$.*

Důkaz. Dokažme třeba, že $\overline{V}$ je σ-aditivní. Nechť tedy $A_n \epsilon \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A \epsilon \mathfrak{A}$ a $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci. Máme dokázati, že $\overline{V}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(A_n)$. Podle **22·1·2** jest $\sum_{i=1}^{n} \overline{V}(A_i) = \overline{V}(\sum_{i=1}^{n} A_i)$. Podle **22·1·1** a podle cvič. *19·8* jest $\overline{V}(\sum_{i=1}^{n} A_i) \leqq \overline{V}(A)$. Tedy $\sum_{i=1}^{n} \overline{V}(A_i) \leqq \overline{V}(A)$, takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(A_n) \leqq \overline{V}(A).$$

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(A_n) = c < \overline{V}(A).$$

Pak existuje množina B taková, že $B \epsilon \mathfrak{A}$, $B \subset A$, $f(B) > c$. Jest $B = \sum_{n=1}^{\infty} A_n B$ s disjunktními $A_n B \epsilon \mathfrak{A}$. Ježto f je σ-aditivní, jest

$$c < f(B) = \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n B).$$

---

*) Jest

$$|f(A_n)| \geqq f(A_n) = f(C) + f(A_n - C) > |f(A_n)| + n + f(A_n - C),$$

tedy

$$f(A_n - C) < -n,\quad |f(A_n - C)| > n.$$

Ježto $A_n B \in \mathfrak{A}$, $A_n B \subset A_n$, jest $f(A_n B) \leqq \overline{V}(A_n)$. Tedy

$$c < \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{V}(A_n) = c,$$

což je spor.

22·2. V tomto odstavci činíme stejný předpoklad jako v odst. **20·1.** Mimo to je dána množina $L \in \mathfrak{L}_\mu$ a množinové σ-těleso $\mathfrak{K}$ takové, že $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}_\mu$ a že

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow AL \in \mathfrak{K}.^{*})$$

22·2·1. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Existuje množina $L_0 \in \mathfrak{K}$ taková, že pro $X \in \mathfrak{K}$ platí:*

$$\begin{aligned} X \subset L_0 &\Rightarrow \varphi(X) \geqq 0, \\ X \subset L - L_0 &\Rightarrow \varphi(X) \leqq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Důkaz. Podle **22·1·9** [kde místo f, $\mathfrak{A}$, $\tau(\mathfrak{A})$ vezmeme resp. φ, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}$] φ má konečnou variaci. Podle **22·1·10** $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ jsou konečné σ-aditivní funkce v množinovém σ-tělese $\mathfrak{K}$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existují množiny $A_n \in \mathfrak{K}$, $A_n \subset L$ takové, že $\varphi(A_n) > \overline{V}_\varphi(L) - \frac{1}{2^n}$. Když $X \in \mathfrak{K}$, $X \subset A_n$, jest

$$\overline{V}_\varphi(L) - \frac{1}{2^n} < \varphi(A_n) = \varphi(X) + \varphi(A_n - X) \leqq \varphi(X) + \overline{V}_\varphi(L),$$

tedy $\varphi(X) \geqq -\frac{1}{2^n}$. Tedy

$$\underline{V}_\varphi(A_n) \leqq \frac{1}{2^n}.$$

Když $X \in \mathfrak{K}$, $X \subset L - A_n$, jest

$$\overline{V}_\varphi(L) \geqq \varphi(A_n + X) = \varphi(A_n) + \varphi(X) > \overline{V}_\varphi(L) - \frac{1}{2^n} + \varphi(X),$$

tedy $\varphi(X) < \frac{1}{2^n}$. Tedy

$$\overline{V}_\varphi(L - A_n) \leqq \frac{1}{2^n}.$$

Nechť $B_n = \prod_{i=n}^{\infty} A_i$. Pak jest $B_n \in \mathfrak{K}$, $B_n \subset B_{n+1}$. Mimo to $B_n \subset A_n$, takže

$$\underline{V}_\varphi(B_n) \leqq \underline{V}_\varphi(A_n) \leqq \frac{1}{2^n}. \tag{2}$$

---

*) Zřejmě také

$$A \in \tau(\mathfrak{A}) \Rightarrow AL \in \mathfrak{K},$$

takže také $L \in \mathfrak{K}$.

Dále jest $L - B_n = \sum_{i=n}^{\infty} (L - A_i)$, tedy pro $p = n, n+1, n+2, \ldots$ jest podle cvič. *19·8* a *19·10*:

$$\overline{V}_\varphi\left[\sum_{i=n}^{p} (L - A_i)\right] \leqq \sum_{i=n}^{p} \overline{V}_\varphi (L - A_i) \leqq \sum_{i=n}^{p} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}};$$

avšak podle **19·2·2** jest $\overline{V}_\varphi(L - B_n) = \lim_{p\to\infty} \overline{V}_\varphi\left[\sum_{i=n}^{p} (L - A_i)\right]$, takže

$$\overline{V}_\varphi(L - B_n) \leqq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{3}$$

Nechť $L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Ježto $B_n \subset B_{n+1}$, podle **19·2·2** jest $\underline{V}_\varphi(L_0) = \lim \underline{V}_\varphi(B_n)$, tedy podle (2): $\underline{V}_\varphi(L_0) \leqq 0$, takže podle **22·1·1**

$$\underline{V}_\varphi(L_0) = 0. \tag{4}$$

Mimo to podle **19·2·3** jest $\overline{V}_\varphi(L - L_0) = \lim \overline{V}_\varphi(L - B_n)$, tedy podle (3): $\overline{V}_\varphi(L - L_0) \leqq 0$, takže podle **22·1·1**

$$\overline{V}_\varphi(L - L_0) = 0. \tag{5}$$

Rovnice (4) a (5) znamenají, že platí (1).

22·2·2. *Nechť φ je konečná nezáporná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existují množiny A_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) takové, že:* [1] $A_n \in \mathfrak{R}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$); [2] $A_0 \in \mathfrak{N}_\mu$; [3] $L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ *s disjunktními sčítanci,* [4] *pro* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *jest*

$$X \in \mathfrak{R},\ X \subset A_n \Rightarrow \varepsilon(n-1) \mid X \mid_\mu \leqq \varphi(X) \leqq \varepsilon n \mid X \mid_\mu.$$

Důkaz. I. Nechť $\mid L \mid_\mu < \infty$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ definujme množinovou funkci ψ_n v oboru $\mathfrak{R}$ takto: $\psi_n(X) = \varphi(LX) - \varepsilon n \mid LX \mid_\mu$. Pak ψ_n je konečná σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{R}$, takže podle **22·2·1** existuje množina $B_n \in \mathfrak{R}$ taková, že pro $X \in \mathfrak{R}$, $X \subset L$ platí:

$$X \subset B_n \Rightarrow \varphi(X) \geqq \varepsilon n \mid X \mid_\mu,$$
$$X \subset L - B_n \Rightarrow \varphi(X) \leqq \varepsilon n \mid X \mid_\mu.$$

Nechť $A_1 = L - \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_{n+1} = B_n - \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $A_0 = L - \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak jest $A_n \in \mathfrak{R}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) a $L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci.

Zřejmě A_0 je množina těch bodů $x \in L$, které náležejí do nekonečně mnoha z množin B_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), takže pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

jest $A_0 \subset \sum_{i=n}^{\infty} B_i$. Tedy $A_0 = \sum_{i=n}^{\infty} C_{ni}$ s disjunktními $C_{ni} \in \mathfrak{K}$, $C_{ni} \subset B_i$, takže

$$\varphi(A_0) = \sum_{i=n}^{\infty} \varphi(C_{ni}) \geqq \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon i \mid C_{ni} \mid_\mu \geqq n\varepsilon \sum_{i=n}^{\infty} \mid C_{ni} \mid_\mu = n\varepsilon \mid A_0 \mid_\mu.$$

Ježto $\varphi(A_0) < \infty$, $\varepsilon > 0$, jest $\mid A_0 \mid_\mu = 0$, t. j. $A_0 \in \mathfrak{N}_\mu$.

Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$, $X \in \mathfrak{K}$, $X \subset A_n$. Pak je *předně* $X \subset B_{n-1}$ (je-li zatím $n \geqq 2$), tedy $\varphi(X) \geqq \varepsilon(n-1) \mid X \mid_\mu$ (a to platí i pro $n = 1$, ježto φ je nezáporná funkce); *za druhé* je $X \subset L - B_n$, takže $\varphi(X) \leqq \leqq \varepsilon n \mid X \mid_\mu$.

II. Nechť $\mid L \mid_\mu = \infty$. Podle věty **20·1·16** a podle poznámky k cit. větě existují množiny $L_i \in \mathfrak{K}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $\mid L_i \mid_\mu < < \infty$ a že $L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i$ s disjunktními sčítanci. Podle I pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ existují množiny A_{in} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ takové, že $A_{in} \in \mathfrak{K}$, $A_{i0} \in \mathfrak{N}_\mu$, $L_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in}$ s disjunktními sčítanci a že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$X \in \mathfrak{K},\ X \subset A_{in} \Rightarrow \varepsilon(n-1) \mid X \mid_\mu \leqq \varphi(X) \leqq \varepsilon n \mid X \mid_\mu.$$

Nechť $A_n = \sum_{i=1}^{\infty} A_{in}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Pak jest $A_n \in \mathfrak{K}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a $L = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci. Podle **20·1·9** jest $A_0 \in \mathfrak{N}_\mu$. Nechť $X \in \mathfrak{K}$, $X \subset A_n$. Pak je $X = \sum_{i=1}^{\infty} XL_i$ s disjunktními $XL_i \subset A_{in}$. Jest

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(XL_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon n \mid XL_i \mid_\mu = \varepsilon n \mid X \mid_\mu,$$

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(XL_i) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(n-1) \mid XL_i \mid_\mu = \varepsilon(n-1) \mid X \mid_\mu.$$

22·2·3. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Pak existuje konečná μ-měřitelná bodová funkce f v oboru L taková, že $\int_L f(x)\,d\mu$ je konvergentní a množina $N \in \mathfrak{N}_\mu$, $N \in \mathfrak{K}$ taková, že pro každou $X \in \mathfrak{K}$ jest*

$$\varphi(X) = \varphi(NX) + \int_X f(x)\,d\mu. \tag{6}$$

Důkaz. I. Nechť funkce φ je nezáporná. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ podle **22·2·2** existují množiny $A_{ni} \in \mathfrak{K}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ takové, že $A_{n0} \in \mathfrak{N}_\mu$,

$L = \sum_{i=0}^{\infty} A_{ni}$ s disjunktními sčítanci a že pro $i = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$X \in \mathfrak{R},\ X \subset A_{ni} \Rightarrow \frac{i-1}{2^n} \mid X \mid_\mu \leqq \varphi(X) \leqq \frac{i}{2^n} \mid X \mid_\mu. \tag{7}$$

Nechť indexy n, $i \geqq 1$, $j \geqq 1$ jsou takové, že $\mid A_{ni} \,.\, A_{n+1,j} \mid_\mu > 0$. Podle věty **20·1·16** a podle poznámky k cit. větě existují množiny $B_k \in \mathfrak{R}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $\mid B_k \mid_\mu < \infty$ a $A_{ni} \,.\, A_{n+1,j} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$. Podle **20·1·6** existuje index k takový, že $\mid B_k \mid_\mu > 0$. Podle (7) jest

$$\frac{i-1}{2^n} \mid B_k \mid_\mu \leqq \varphi(B_k) \leqq \frac{i}{2^n} \mid B_k \mid_\mu,$$

$$\frac{j-1}{2^{n+1}} \mid B_k \mid_\mu \leqq \varphi(B_k) \leqq \frac{j}{2^{n+1}} \mid B_k \mid_\mu.$$

Ježto $0 < \mid B_k \mid_\mu < \infty$, jest $2\,(i-1) \leqq j$, $j - 1 \leqq 2i$. Tedy

$$i \geqq 1,\ j \geqq 1,\ \mid A_{ni} \,.\, A_{n+1,j} \mid_\mu > 0 \Rightarrow \mid j - 2i \mid \leqq 2. \tag{8}$$

Ježto $L = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni}$ s disjunktními sčítanci, lze pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ definovati bodovou funkci f_n v oboru L takto:

$$x \in A_{n0} \Rightarrow f_n(x) = 0,\ x \in A_{ni}\ (i = 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}.$$

Zřejmě f_n je konečná nezáporná μ-měřitelná funkce v oboru L.

Položme

$$N_n = A_{n0} + A_{n+1,0} + \sum_{i,j} A_{ni} \,.\, A_{n+1,j},$$

kde součet $\sum_{i,j}$ se vztahuje na ty páry indexů i, j, pro něž jest $i \geqq 1$, $j \geqq 1$, $\mid j - 2i \mid > 2$. Jest $N_n \in \mathfrak{R}$; ježto $A_{n0} \in \mathfrak{N}_\mu$ a ježto platí (8), jest $N_n \in \mathfrak{N}_\mu$. Položme $N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$. Pak jest $N \in \mathfrak{R}$, $N \in \mathfrak{N}_\mu$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $N \supset A_{n0}$.

Nechť $x \in L - N$. Nechť $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ježto $L - N \subset L - A_{n0} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ni}$, existuje index $i \geqq 1$ takový, že $x \in A_{ni}$. Podobně existuje index $j \geqq 1$ takový, že $x \in A_{n+1,j}$. Ježto $L - N \subset L - N_n$, jest $\mid j - 2i \mid \leqq 2$. Jest $f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, $f_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}}$, tedy $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{j - 2i + 1}{2^{n+1}}$, takže $\mid f_{n+1}(x) - f_n(x) \mid \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$. Tedy pro

$p = 1, 2, 3, \ldots$ jest $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$, takže posloupnost $\{f_n(x)\}_1^\infty$ je cauchyovská a tudíž konvergentní (v prostoru $\mathbf{E}_1$). Tedy existuje konečná bodová funkce f v oboru L taková, že

$$x \in N \Rightarrow f(x) = 0, \; x \in L - N \Rightarrow f(x) = \lim f_n(x).$$

Ježto f_n jsou nezáporné funkce, také f je nezáporná. Ježto f_n jsou μ-měřitelné funkce, podle **21·1·13** (v. též **21·1·3**) také f je μ-měřitelná.

Přistupme k důkazu rovnice (6) předpokládajíce nejprve, že $|X|_\mu < \infty$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $L = \sum_{i=0}^{\infty} A_{ni}$ s disjunktními sčítanci a $A_{n0} \subset N$, takže

$$X = NX + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{ni}X - N)$$

s disjunktními sčítanci. Tedy

$$\varphi(X) = \varphi(NX) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_{ni}X - N) \tag{9}$$

a podle (7) jest

$$\frac{i-1}{2^n} |A_{ni}X - N|_\mu \leqq \varphi(A_{ni}X - N) \leqq \frac{i}{2^n} |A_{ni}X - N|_\mu. \tag{10}$$

Pro $x \in A_{ni}X - N$ jest $f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, tedy (v. **21·2·5**)

$$\frac{i-1}{2^n} |A_{ni}X - N|_\mu = \int_{A_{ni}X-N} f_n(x)\, d\mu. \tag{11}$$

Mimo to pro $x \in A_{ni}X - N$ jest $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{p \to \infty} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqq$ $\leqq \frac{1}{2^{n-2}}$, tedy (v. **21·2·4**, **21·2·5**, **21·2·10** a **21·2·11**)

$$\left| \int_{A_{ni}X-N} f_n(x)\, d\mu - \int_{A_{ni}X-N} f(x)\, d\mu \right| = \left| \int_{A_{ni}X-N} [f_n(x) - f(x)]\, d\mu \right| \leqq$$

$$\leqq \int_{A_{ni}X-N} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \leqq \frac{1}{2^{n-2}} |A_{ni}X - N|_\mu,$$

takže podle (10) a (11)

$$\left|\varphi(A_{ni}X - N) - \int_{A_{ni}X-N} f(x)\, d\mu\right| \leqq \frac{1}{2^{n-3}} |A_{ni}X - N|_\mu. \tag{12}$$

Podle **21·2·6** a **21·2·7** je však

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_{ni}X-N} f(x)\, d\mu,$$

takže podle (9) pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$|\,\varphi(X) - \varphi(NX) - \int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\,| \leqq \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{i=1}^{\infty} |\,A_{ni}X - N\,|_\mu \leqq \frac{1}{2^{n-3}}\,|\,X\,|_\mu,$$

z čehož následuje (6).

Zbývá dokázati (6) v případě $|\,X\,|_\mu = \infty$. Podle věty **20·1·16** a podle poznámky k cit. větě existují disjunktní množiny $X_k \in \mathfrak{K}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$, $|\,X_k\,|_\mu < \infty$. Ježto $|\,X_k\,|_\mu < \infty$, máme již dokázáno, že

$$\varphi(X_k) = \varphi(NX_k) + \int\limits_{X_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Ježto množinová funkce φ je σ-aditivní, jest

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(X_k),\quad \varphi(NX) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(NX_k)$$

a podle **21·2·7** jest

$$\int\limits_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy (6) platí, i když $|\,X\,|_\mu = \infty$.

II. Opusťme předpoklad, že φ je nezáporná. Podle **22·1·9** φ má konečnou variaci a podle **22·1·10** (v. též **22·1·1**) $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ jsou nezáporné σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Tedy podle I existují μ-nulové množiny N_1, N_2 a nezáporné μ-měřitelné bodové funkce f_1 a f_2 v oboru L takové, že pro každou množinu $X \in \mathfrak{K}$ jest

$$\begin{aligned} \overline{V}_\varphi(X) &= \overline{V}_\varphi(N_1X) + \int\limits_X f_1(x)\,\mathrm{d}\mu, \\ \underline{V}_\varphi(X) &= \underline{V}_\varphi(N_2X) + \int\limits_X f_2(x)\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{13}$$

Nechť $N = N_1 + N_2$, takže $N \in \mathfrak{N}_\mu$, $N \subset L$. Podle (13) a **21·2·6** jest

$$\overline{V}_\varphi(NX) = \overline{V}_\varphi(N_1X),\quad \underline{V}_\varphi(NX) = \underline{V}_\varphi(N_2X),$$

tedy

$$\overline{V}_\varphi(X) = \overline{V}_\varphi(NX) + \int\limits_X f_1(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\underline{V}_\varphi(X) = \underline{V}_\varphi(NX) + \int\limits_X f_2(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

takže podle **21·2·4** a **22·1·5** platí (6), volíme-li $f = f_1 - f_2$.

Nechť φ je σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Pravíme, že φ je *totálně spojitá* (také se říká *absolutně spojitá*), když φ je konečná a

$$N \in \mathfrak{K},\ |\,N\,|_\mu = 0 \Rightarrow \varphi(N) = 0. \tag{14}$$

22·2·4. *Nechť φ je množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. φ je σ-aditivní totálně spojitá funkce, když a jen když existuje μ-měřitelná bodová funkce f v oboru L taková, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní a že pro každou množinu $X \in \mathfrak{K}$ jest*

$$\varphi(X) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{15}$$

Důkaz. I. Když platí (15), pak podle **21·2·7** φ je σ-aditivní v oboru $\mathfrak{K}$. Když $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní, pak funkce φ je konečná podle **19·1·2**, takže φ je totálně spojitá podle **21·2·6.**

II. Nechť φ je σ-aditivní totálně spojitá funkce. Pak φ je konečná, takže podle **22·2·3** existuje μ-měřitelná bodová funkce f v oboru L a množina $N \in \mathfrak{N}_\mu$, $N \in \mathfrak{K}$ taková, že platí (6). Podle (14) je $\varphi\,(NX) = 0$, takže platí (15).

22·2·5. *Nechť φ je σ-aditivní totálně spojitá množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Pak existuje σ-aditivní totálně spojitá množinová funkce ψ v oboru $\underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{L}_\mu,\ X \subset L]$ taková, že parciální funkce $\psi_{\mathfrak{K}}$ jest identická s φ.*

To plyne z **21·2·7** a **22·2·4.**

22·2·6. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. φ je totálně spojitá, když a jen když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že*

$$X \in \mathfrak{K},\quad |\, X\,|_\mu < \delta \Rightarrow |\,\varphi(X)\,| < \varepsilon. \tag{16}$$

Důkaz. I. Když platí (16), zřejmě platí i (14), takže φ je totálně spojitá.

II. Nechť φ je totálně spojitá a nechť $\varepsilon > 0$. Podle **22·2·4** existuje μ-měřitelná bodová funkce f v oboru $\mathfrak{K}$ taková, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní a že pro $X \in \mathfrak{K}$ platí (15). Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ definujme funkci f_n v oboru L takto:

$$|\,f(x)\,| \leqq n \Rightarrow f_n(x) = f(x),$$
$$f(x) > n \Rightarrow f_n(x) = n,$$
$$f(x) < -n \Rightarrow f_n(x) = -n.$$

Zřejmě f_n jsou μ-měřitelné funkce v oboru L, jest $f_n{}^+(x) \to f^+(x)$, $f_n{}^-(x) \to f^-(x)$, $0 \leqq f_n{}^+(x) \leqq f^+(x)$, $0 \leqq f_n{}^-(x) \leqq f^-(x)$ pro každý $x \in L$ a integrály $\int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$, $\int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu$ jsou konvergentní, takže podle **21·2·20** jest

$$X \in \mathfrak{K} \Rightarrow \int_X f_n^+(x)\,\mathrm{d}\mu \to \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu,\ \int_X f_n^-(x)\,\mathrm{d}\mu \to \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Všecky čtyři právě napsané integrály jsou konvergentní (v. **21·2·13** a **21·2·14**). Tedy (v. též **21·2·11**) existuje index p takový, že

$$0 \leqq \int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_L f_p^+(x)\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$0 \leqq \int_L f^-(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_L f_p^-(x)\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Podle **21·2·7, 21·2·10** a **21·2·11** jest

$$0 \leqq \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f_p^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_X [f^+(x) - f_p^+(x)]\,\mathrm{d}\mu \leqq$$
$$\leqq \int_X [f^+(x) - f_p^+(x)]\,\mathrm{d}\mu + \int_{L-X} [f^+(x) - f_p^+(x)]\,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \int_L [f^+(x) - f_p^+(x)]\,\mathrm{d}\mu = \int_L f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_L f_p^+(x)\,\mathrm{d}\mu$$

a stejně s f^-, f_p^- místo f^+, f_p^+. Tedy

$$X \in \mathfrak{K} \Rightarrow 0 \leqq \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f_p^+(x)\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$X \in \mathfrak{K} \Rightarrow 0 \leqq \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_X f_p^-(x)\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Volme nyní $\delta = \frac{\varepsilon}{2p}$. Nechť $X \in \mathfrak{K}$, $|X|_\mu < \delta$. Podle (15) a **21·2·4** jest

$$|\varphi(X) - \int_X f_p(x)\,\mathrm{d}\mu| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Podle **21·2·5, 21·2·11** a **21·2·13** jest

$$|\int_X f_p(x)\,\mathrm{d}\mu| \leqq \int_X |f_p(x)|\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_X p\,\mathrm{d}\mu = p\,|X|_\mu < p\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy $|\varphi(X)| < \varepsilon$.

22·2·7. *Nechť f je μ-měřitelná bodová funkce v oboru L taková, že $\int_L f(x)\,\mathrm{d}\mu$ je konvergentní. Nechť φ je σ-aditivní totálně spojitá* (v. **22·2·4**) *množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$ taková, že pro $X \in \mathfrak{K}$ platí* (15). *Pak je pro $X \in \mathfrak{K}$*

$$\overline{V}_\varphi(X) = \int_X f^+(x)\,\mathrm{d}\mu,\quad \underline{V}_\varphi(X) = \int_X f^-(x)\,\mathrm{d}\mu,\quad V_\varphi(X) = \int_X |f(x)|\,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz proveďme třeba pro $\overline{V}_\varphi$. Zvolme $X_0 \in \mathfrak{K}$. Když $Y \in \mathfrak{K}$ a $Y \subset X_0$, pak je

$$\varphi(Y) = \int_Y f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_Y f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \int_Y f^-(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_Y f^+(x)\,\mathrm{d}\mu \leqq \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

tedy

$$\overline{V}_\varphi(X_0) \leqq \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{17}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle **22·2·4** (kde místo $\mathfrak{K}$ volíme $\underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{L}_\mu,\ X \subset L]$) a podle **22·2·6** existuje $\delta > 0$ takové, že

$$X \in \mathfrak{L}_\mu,\ X \subset L,\quad |X|_\mu < \delta \Rightarrow \left|\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

Zvolme opět $X_0 \in \mathfrak{K}$ a položme $M = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in X_0,\ f(x) \geqq 0]$. Pak jest $M \subset X_0$ a $M \in \mathfrak{L}_\mu$. Tedy existuje posloupnost $\{A_n\}_1^\infty$ taková, že $A_n \in \mathfrak{A}$, $M \subset \sum_{n=1}^\infty A_n$, $\left|\sum_{n=1}^\infty A_n - M\right|_\mu < \delta$, tedy také $M \subset \sum_{n=1}^\infty LA_n = Y \in \mathfrak{K}$, $Y \subset L$, $|Y - M|_\mu < \delta$. Jest

$$\varphi(Y) = \int_Y f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu + \int_{Y-M} f(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_M f^+(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu,\quad \left|\int_{Y-M} f(x)\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

Tedy $Y \in \mathfrak{K}$, $Y \subset X_0$ a

$$\varphi(Y) \geqq \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \varepsilon,$$

takže

$$\overline{V}_\varphi(X_0) \geqq \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu - \varepsilon. \tag{18}$$

Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, podle (17) a (18) jest $\overline{V}_\varphi(X_0) = \int_{X_0} f^+(x)\,\mathrm{d}\mu$.

Nechť φ je σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Pravíme, že φ je *singulární*, když existuje množina $N \in \mathfrak{K}$ taková, že $N \in \mathfrak{N}_\mu$ a že

$$X \in \mathfrak{K},\ XN = \emptyset \Rightarrow \varphi(X) = 0.$$

22·2·8. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Pak lze určiti právě jedním způsobem dvě konečné σ-aditivní množinové funkce φ_1 a φ_2 v oboru $\mathfrak{K}$ tak, že:* [1] $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, [2] φ_1 *jest totálně spojitá,* [3] φ_2 *je singulární.*

Důkaz. I. Určeme bodovou funkci f a množinu N podle **22·2·3.** Pro $X \in \mathfrak{K}$ položme

$$\varphi_1(X) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu,\quad \varphi_2(X) = \varphi(NX).$$

Zřejmě φ_2 je konečná σ-aditivní singulární funkce. Podle **22·2·4** φ_1 je σ-aditivní totálně spojitá funkce. Zřejmě $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

II. Nechť $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2$, kde $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ jsou konečné σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{K}$, φ_1 a ψ_1 jsou totálně spojité, φ_2 a ψ_2 jsou singulární. Lehko se dokáže, že σ-aditivní funkce $\varphi_1 - \psi_1 = \psi_2 - \varphi_2$ je současně totálně spojitá i singulární, z čehož ihned plyne, že jest identicky rovna nule.

22·3. V tomto odst. jest $P = \mathsf{E}_m$. Míra a integrál jsou míněny v Lebesgueově smyslu. Je dáno množinové σ-těleso $\mathfrak{K}$, které obsahuje všecky Borelovy množiny a jehož každá množina je měřitelná, tedy (v. **18·6·4**)

$$\tau(\mathfrak{T}_m) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m).$$

Mimo to je dána konečná množinová funkce φ v oboru $\mathfrak{R}$.

Poznámka. Výsledky, ke kterým dospějeme, se snadno přenesou na obecnější případ, kde je dána množina $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$, množinové σ-těleso $\mathfrak{R}_0$ s největším prvkem L takové, že

$$A \in \tau(\mathfrak{T}_m) \Rightarrow AL \in \mathfrak{R}_0, \quad \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m),$$

a konečná množinová funkce ψ v oboru $\mathfrak{R}_0$. Stačí za $\mathfrak{R}$ voliti systém všech množin tvaru $K_0 + M$, kde $K_0 \in \mathfrak{R}_0$, $M \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$, $LM = \emptyset$, a definovati funkci φ tak, že $\varphi(K_0 + M) = \psi(K_0)$.

Když $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathsf{E}_m$ a když s je kladné číslo, nazveme *čtvercem* o *středu* c a *straně* s a označíme $\Delta(c, s)$ množinu těch $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathsf{E}_m$, pro něž platí $|x_i - c_i| \leqq \frac{s}{2}$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Zřejmě každý čtverec náleží do $\mathfrak{T}_m$, tedy do $\mathfrak{R}$.

22·3·1.*) *Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathsf{E}_m$. Nechť $\mathfrak{D}$ je systém čtverců takový, že ke každému bodu $x \in M$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čtverec $\Delta(c, s) \in \mathfrak{D}$ takový, že $x \in \Delta(c, s)$ a $s < \varepsilon$. Pak existuje disjunktní konečná nebo nekonečná posloupnost $\{\Delta_n\}_1^k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots,$ nebo $k = \infty$) taková, že $|M - \sum_{n=1}^{k} \Delta_n| = 0$.*

Důkaz. I. Nechť množina M jest omezená. Předpokládejme, že M není podmnožinou součtu konečného počtu disjunktních čtverců systému $\mathfrak{D}$, neboť jinak věta je triviální. Označme $\mathfrak{D}_1$ systém těch $\Delta(c, s) \in \mathfrak{D}$, pro něž $s \leqq 1$. Zvolme $\Delta_1 \in \mathfrak{D}_1$ tak, že $\Delta_1 M \neq \emptyset$. Nechť při určitém n byly již zvoleny disjunktní čtverce $\Delta_i = \Delta(c_i, s_i) \in \mathfrak{D}_1$ ($1 \leqq i \leqq n$). Označme σ_n supremum množiny všech stran těch čtverců Δ systému $\mathfrak{D}_1$, pro něž $\Delta M \neq \emptyset$, $\Delta \, . \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \emptyset$; že takové čtverce existují, je zřejmé, neboť podle předpokladu $M - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \neq \emptyset$. Zřejmě $0 < \sigma_n \leqq 1$. Zvolme pak $\Delta_{n+1} = \Delta(c_{n+1}, s_{n+1})$ tak, že $\Delta_{n+1} M \neq \emptyset$, $\Delta_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \emptyset$, $\frac{1}{2}\sigma_n < s_{n+1} \leqq \sigma_n$.

Stačí dokázati, že $|M - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n| = 0$. Nechť naopak $\alpha = |M - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n| > 0$. Ježto čtverce Δ_n jsou disjunktní, jest $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| =$

*) To je t. zv. *Vitaliova věta.*

$= |\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n|$. Ježto množina M jest omezená a $M\Delta_n \neq \emptyset$, $s_n \leqq 1$, jest $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$. Tedy nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|$ je konvergentní. Tedy existuje index p takový, že $5^m . \sum_{n=p+1}^{\infty} |\Delta_n| < \alpha$. Je-li $\Delta'_n = \Delta(c_n, 5s_n)$, jest $\sum_{n=p+1}^{\infty} |\Delta'_n| < \alpha = |M - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n|$, takže (v. **20·1·5**) existuje bod $x \in M - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} \Delta'_n\right)$. Jest $x \in M - \sum_{n=1}^{p} \Delta_n$. Ježto množina $\sum_{n=1}^{p} \Delta_n$ jest uzavřená, existuje čtverec $\Delta^* = \Delta(c^*, s^*) \in \mathfrak{D}_1$ takový, že $x \in \Delta^*$ (tedy $\Delta^* M \neq \emptyset$) a $\Delta^* . \sum_{n=1}^{p} \Delta_n = \emptyset$. Kdyby bylo $\Delta^*\Delta_n = \emptyset$ pro každé n, bylo by $0 < s^* \leqq \sigma_n < 2s_{n+1}$, takže by řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^m$ byla divergentní, což je spor. Tedy existuje index q takový, že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$n < q \Rightarrow \Delta^*\Delta_n = \emptyset, \text{ ale } \Delta^*\Delta_q \neq \emptyset.$$

Ježto $\Delta^* . \sum_{n=1}^{p} \Delta_n = \emptyset$, jest $q > p$. Pro $1 \leqq n < q$ jest $\Delta^*\Delta_n = \emptyset$, $\Delta^* M \neq \emptyset$, tedy $s^* \leqq \sigma_{q-1}$. Ježto $q > p$, jest $x \in \Delta^* - \Delta'_q$. Tedy $\Delta^*\Delta_q \neq \emptyset \neq \Delta^* - \Delta'_q$. Z toho následuje snadno, že $s^* \geqq 2s_q$. Avšak $s^* \leqq \sigma_{q-1} < 2s_q$, takže máme spor.

II. Nechť $M_n = \mathrm{E}_x[x \in M, n - 1 < \varrho(x, \omega) < n]$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $\omega = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{E}_m$. Lehko se dokáže, že $|M - \sum_{n=1}^{\infty} M_n| = 0$. Pro každé n $(= 1, 2, 3, \ldots)$ nechť $\mathfrak{D}_n$ je systém těch $\Delta \in \mathfrak{D}$, pro něž $\Delta \subset \mathrm{E}_x[n - 1 < \varrho(x, \omega) < n]$. Z I snadno vychází, že existuje disjunktní spočetný systém $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{D}_n$ takový, že $|M_n - \sum_{\Delta \in \mathfrak{S}_n} \Delta| = 0$. Nechť $\mathfrak{S} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$. Pak $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ je disjunktní spočetný systém a jest $M - \sum_{\Delta \in \mathfrak{S}} \Delta \subset$
$\subset \left(M - \sum_{n=1}^{\infty} M_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - \sum_{\Delta \in \mathfrak{S}_n} \Delta)$, takže $|M - \sum_{\Delta \in \mathfrak{S}} \Delta| = 0$.

Zvolme $a \in \mathbf{E}_m$. Pro každé $\varepsilon > 0$ označme $h(\varepsilon)$ supremum a $k(\varepsilon)$ infimum množiny všech čísel $\dfrac{\varphi[\Delta(c, s)]}{|\Delta(c, s)|}$, kde $0 < s \leqq \varepsilon$ a bod $c \in \mathbf{E}_m$

je volen tak, že $a \in \Delta(c, s)$. Jest $-\infty \leqq k(\varepsilon) \leqq h(\varepsilon) \leqq \infty$. Když $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, zřejmě

$$k(\varepsilon_1) \leqq k(\varepsilon_2) \leqq h(\varepsilon_2) \leqq h(\varepsilon_1). \tag{1}$$

Nazveme *horní derivací* množinové funkce φ v bodě a a označíme $\overline{\varphi}(a)$ infimum množiny všech čísel $h(\varepsilon)$; nazveme *dolní derivací* množinové funkce φ v bodě a a označíme $\underline{\varphi}(a)$ supremum množiny všech čísel $k(\varepsilon)$.*)

Z (1) vychází, že je vždy

$$-\infty \leqq \underline{\varphi}(a) \leqq \overline{\varphi}(a) \leqq \infty. \tag{2}$$

Důležitý případ nastane, když $\underline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(a)$; pak píšeme

$$\underline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(a) = \varphi'(a)$$

a číslo $\varphi'(a)$ nazýváme *derivací* množinové funkce φ v bodě a; když $\underline{\varphi}(a) < \overline{\varphi}(a)$, pravíme, že $\varphi'(a)$ neexistuje.

Snadno se dokáže:

22·3·2. *Nechť* $a \in \mathsf{E}_m$, $\lambda \in \mathsf{R}$. *Tehdy a jen tehdy existuje* $\varphi'(a)$ *a jest* $\varphi'(a) = \lambda$, *když pro každý pár posloupností* $\{c_n\}_1^\infty$, $\{s_n\}_1^\infty$, *pro který* $c_n \in \mathsf{E}_m$, $s_n \in \mathsf{E}_1$, $s_n > 0$, $s_n \to 0$, $a \in \Delta(c_n, s_n)$, *jest*

$$\frac{\varphi[\Delta(c_n, s_n)]}{|\Delta(c_n, s_n)|} \to \lambda.$$

22·3·3. $\overline{\varphi}$ *a* $\underline{\varphi}$ *jsou měřitelné bodové funkce v oboru* E_m.

Důkaz proveďme třeba pro $\underline{\varphi}$. Zvolme $a \in \mathsf{E}_1$. Položme $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[\underline{\varphi}(x) < a]$. Máme dokázati, že $A \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ položme

$$A_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\underline{\varphi}(x) < a - \frac{1}{n}\right], \; B_n = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[\underline{\varphi}(x) \leqq a - \frac{1}{n}\right].$$

Pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $\mathfrak{D}_{nk}$ je systém všech čtverců $\Delta(c, s)$ takových, že $s < \dfrac{1}{k}$ a $\varphi[\Delta(c, s)] < \left(a - \dfrac{1}{n}\right) | \Delta(c, s) |$. Lehko se dokáže, že pro $x \in A_n$ a $\varepsilon > 0$ existuje čtverec $\Delta(c, s) \in \mathfrak{D}_{nk}$ takový, že $x \in \Delta(c, s)$, $s < \varepsilon$. Tedy podle **22·3·1** při daných indexech n, k existuje konečná nebo nekonečná disjunktní posloupnost $\{\Delta_{nki}\}_{i=1}^{u_{nk}}$ ($u_{nk} = 1, 2, 3, \ldots$ nebo $u_{nk} = \infty$) taková, že $\Delta_{nki} \in \mathfrak{D}_{nk}$, $| T_{nk} | = 0$, kde $T_{nk} = A_n - \sum_{=1}^{u_{nk}} \Delta_{nki}$. Položme

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{u_{nk}} \Delta_{nki}, \; S_n = \prod_{k=1}^{\infty} S_{nk}, \; S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n,$$

*) V obvyklém označení jest ovšem $\overline{\varphi}(a) = \lim\limits_{s \to 0+} h(\varepsilon)$, $\underline{\varphi}(a) = \lim\limits_{s \to 0+} k(\varepsilon)$.

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} T_{nk},\quad T = \prod_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Ježto $|T_{nk}| = 0$, jest $|T_n| = 0$, tedy $|T| = 0$. Ježto $\Delta_{nki} \in \mathfrak{T}_m$, jest $S \in \tau(\mathfrak{T}_m)$, tedy $S \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Jest $A_n \subset S_{nk} + T_{nk}$, tedy $A_n \subset S_n + T_n$, tedy

$$A \subset S + T. \tag{3}$$

Zvolme $x \in S_n$. Pak pro každé k existuje index i takový, že $x \in \Delta_{nki} \in \mathfrak{D}_{nk}$, takže $\varphi(\Delta_{nki}) < \left(a - \frac{1}{n}\right) |\Delta_{nki}|$. Při pevném n strany čtverců Δ_{nki} jsou menší než $\frac{1}{k}$. Ježto $\frac{1}{k} \to 0$, vychází snadno, že $\underline{\varphi}(x) \leqq a - \frac{1}{n}$, t. j. že $x \in B_n$. Tedy $S_n \subset B_n$, takže $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} B_n = A$. Tedy

$$S \subset A. \tag{4}$$

Ze (3) a (4) následuje, že

$$A = S + AT.$$

Jest $S \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ a $|T| = 0$, tedy $AT \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ podle **20·1·7** a **20·1·11**, takže $A \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$.

22·3·4. *Nechť funkce φ je nezáporná a σ-aditivní. Nechť množina $G \subset \mathsf{E}_m$ je otevřená. Nechť $A \subset G$. Nechť $a \in \mathsf{E}_1$, $a > 0$. Nechť*

$$x \in A \Rightarrow \overline{\varphi}(x) > a.$$

Pak je $\varphi(G) \geqq a\,|A|$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{D}$ je systém všech čtverců Δ takových, že $\Delta \subset G$, $\varphi(\Delta) > a\,|\Delta|$. Lehko se dokáže, že ke každému $x \in A$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čtverec systému $\mathfrak{D}$ obsahující x a mající stranu menší než ε. Tedy podle **22·3·1** existuje množina $B \subset A$ taková, že $|A - B| = 0$ a disjunktní posloupnost $\{\Delta_i\}_{i=1}^{k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$ nebo $k = \infty$) taková, že $\Delta_i \in \mathfrak{D}$, $\sum_{i=1}^{k} \Delta_i \supset B$. Jest $|B| \leqq |A| \leqq |B| + |A - B| = |B|$, tedy $0 \leqq |A| = |B| \leqq |\sum_{i=1}^{k} \Delta_i| = \sum_{i=1}^{k} |\Delta_i|$ a (v. cvič. *19·8*)

$$\varphi(G) \geqq \varphi(\sum_{i=1}^{k} \Delta_i) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\Delta_i) \geqq a \sum_{i=1}^{k} |\Delta_i| \geqq a\,|A|.$$

22·3·5. *Nechť φ je nezáporná a σ-aditivní. Nechť $M = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{\varphi}(x) = \infty]$. Pak $M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. Zvolme $a > 0$. Podle **22·3·4** (kde volíme $G = \mathsf{E}_m$, $A = M$) jest $\varphi(\mathsf{E}_m) \geqq a\,|M|$. Ježto $a > 0$ je libovolné, jest $\varphi(\mathsf{E}_m) \geqq \infty \,.\, |M|$. Ježto funkce φ je konečná, jest $|M| = 0$.

22·3·6. *Nechť φ je σ-aditivní. Nechť K je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, pro něž existuje $\varphi'(x)$ a jest $-\infty < \varphi'(x) < \infty$. Pak $\mathsf{E}_m - K \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. I. Nechť φ je nezáporná. Nechť $L = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{\varphi}(x) > \underline{\varphi}(x)]$, $M = \underset{x}{\mathrm{E}}[\overline{\varphi}(x) = \infty]$. Zřejmě $\mathsf{E}_m - K = L + M$. Podle **22·3·5** jest $|M| = 0$, takže stačí dokázati, že $|L| = 0$. Nechť naopak $|L| > 0$. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť $L_n = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in L,\ \varrho(x, \omega) < n]$, kde $\omega = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathsf{E}_m$. Jest $L = \sum\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, tedy $0 < |L| \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |L_n|$, takže existuje index n_0 takový, že $|L_{n_0}| > 0$. Položme $H = L_{n_0}$. Zřejmě $0 < |H| < \infty$. Nechť (v. **3·5·1** a **3·5·2**) $\{(r_n, s_n)\}_1^{\infty}$ je posloupnost všech párů (r, s) racionálních čísel takových, že $r > s > 0$. Zřejmě $H = \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, $H_n = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in H, \overline{\varphi}(x) > r_n > s_n > \underline{\varphi}(x)]$. Jest $0 < |H| \leqq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |H_n|$, takže existuje index p takový, že $|H_p| > 0$. Zřejmě $|H_p| < \infty$. Zvolme číslo t tak, že $r_p > t > s_p$. Podle cvič. *20·10* existuje otevřená množina G taková, že $H_p \subset G$, $t\,|H_p| > s_p\,|G|$. Označme $\mathfrak{D}$ systém všech čtverců Δ takových, že $\Delta \subset G$ a $\varphi(\Delta) < s_p\,|\Delta|$. Ježto $\underline{\varphi}(x) < s_p$ pro $x \in H_p$, zřejmě ke každému $x \in H_p$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čtverec $\Delta(c, s) \in \mathfrak{D}$ takový, že $x \in \Delta(c, s)$ a $s < \varepsilon$. Tedy podle **22·3·1** existuje množina $A \subset H_p$ taková, že $|H_p - A| = 0$, tedy $|A| = |H_p|$, a disjunktní posloupnost $\{\Delta_i\}_{i=1}^{k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$ nebo $k = \infty$) taková, že $\Delta_i \in \mathfrak{D}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \Delta_i \supset A$. Jest

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k} \Delta_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(\Delta_i) < s_p \sum_{i=1}^{k} |\Delta_i| =$$
$$= s_p \Big|\sum_{i=1}^{k} \Delta_i\Big| \leqq s_p\,|G| < t\,|H_p| = t\,|A|.$$

Nechť $D_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \Delta_j$ ($1 \leqq i \leqq k$ nebo $i = 1, 2, 3, \ldots$). Jest $AD_i \subset AD_{i+1}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} AD_i = A \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta_i = A$. Když $k < \infty$, jest $AD_k = A$, takže pro $q = k$ jest $r_p\,|AD_q| > t\,|A|$; když $k = \infty$, podle **20·1·20** jest $|A| = \lim |AD_i|$, takže zase existuje index q takový, že $r_p\,|AD_q| > t\,|A|$. Jest $D_q \subset \sum\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$, takže podle cvič. *19·8* jest $\varphi(D_q) \leqq \varphi(\sum\limits_{i=1}^{k} \Delta_i) < t\,|A|$. Množina D_q jest uzavřená, takže podle **13·2** existují otevřené množiny Γ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) takové, že $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$ a $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = D_q$.

Podle **19·2·3** jest $\varphi(\Gamma_n) \to \varphi(D_q) < t \mid A \mid$. Tedy existuje index v takový, že $\varphi(\Gamma_v) < t \mid A \mid$. Ježto $AD_q \subset H_p$, jest $\overline{\varphi}(x) > r_p$ pro $x \in AD_q$; ježto $AD_q \subset \Gamma_v$, podle **22·3·4** jest $\varphi(\Gamma_v) \geqq r_p \mid AD_q \mid$. Tedy

$$t \mid A \mid < r_p \mid AD_q \mid \leqq \varphi(\Gamma_v) < t \mid A \mid,$$

což je spor.

II. Opusťme předpoklad, že funkce φ je nezáporná. Podle **22·1·9** má φ konečnou variaci a podle **22·1·1** a **22·1·10** jsou $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ nezáporné σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Nechť množiny K_1 a K_2 mají k funkcím $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ stejný vztah, jako množina K k funkci φ. Podle I jest $\mid \mathsf{E}_m - K_1 \mid = \mid \mathsf{E}_m - K_2 \mid = 0$. Podle **22·3·2** jest $K \supset K_1 K_2$, tedy $\mathsf{E}_m - K \subset (\mathsf{E}_m - K_1) + (\mathsf{E}_m - K_2)$, takže $\mid \mathsf{E}_m - K \mid = 0$.

22·3·7. *Nechť $\{\varphi_n\}_1^\infty$ je posloupnost konečných nezáporných σ-aditivních množinových funkcí taková, že $\varphi_n(\mathsf{E}_m) \to 0$ a že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a pro každou $X \in \mathfrak{K}$ jest $\varphi_n(X) \geqq \varphi_{n+1}(X)$. Nechť M je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, v nichž pro všecka n existují a jsou konečné $\varphi'_n(x)$ a jest $\varphi'_n(x) \to 0$. Pak $\mathsf{E}_m - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ nechť M_n je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, v nichž existuje $\varphi'_n(x)$ a jest $\mid \varphi'_n(x) \mid < \infty$. Nechť $M^* = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$. Podle **20·1·9** a **22·3·6** jest $\mathsf{E}_m - M^* \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Lehko se dokáže, že pro $x \in M^*$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest $\infty > \varphi'_n(x) \geqq \varphi'_{n+1}(x) \geqq 0$, takže pro každý $x \in M^*$ existuje $\psi(x) = \lim \varphi'_n(x)$ a jest $0 \leqq \psi(x) < \infty$. Nechť $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in M^*, \psi(x) > 0]$. Stačí dokázati, že $\mid A \mid = 0$. Nechť naopak $\mid A \mid > 0$. Jest $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[x \in M^*, \psi(x) > \frac{1}{i}\right]$. Pak existuje index j takový, že $\mid A_j \mid > 0$. Pro každé n a pro $x \in M^*$ jest $\varphi'_n(x) \geqq \psi(x)$, takže pro $x \in A_j$ je $\varphi'_n(x) > \frac{1}{j}$ pro všecka n. Tedy podle **22·3·4** jest $\varphi_n(\mathsf{E}_m) \geqq \frac{1}{j} \mid A_j \mid > 0$ pro všecka n, což je spor.

22·3·8. *Nechť $\{\varphi_n\}_1^\infty$ je posloupnost konečných σ-aditivních množinových funkcí v oboru $\mathfrak{K}$. Pro každou $X \in \mathfrak{K}$ nechť $\varphi_n(X) \to \varphi(X)$ a $\varphi_n(X) \leqq \varphi_{n+1}(X)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť M je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, v nichž existují a jsou konečné derivace $\varphi'(x)$ a $\varphi'_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a jest $\varphi'_n(x) \to \varphi'(x)$. Pak jest $\mathsf{E}_m - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. O funkci φ stále předpokládáme, že je konečná. Položme $\psi_n = \varphi_n - \varphi_1$, $\psi = \varphi - \varphi_1$. Pak jsou ψ_n a ψ konečné nezáporné množinové funkce v oboru $\mathfrak{K}$ a funkce ψ_n jsou σ-aditivní. Mimo to pro každou $X \in \mathfrak{K}$ je $\psi(X) \geqq \psi_{n+1}(X) \geqq \psi_n(X) \geqq 0$, $\psi_n(X) \to \psi(X)$. Nechť $\{X_i\}_1^\infty$ je disjunktní posloupnost množin $X_i \in \mathfrak{K}$. Pak je *předně* pro všecka n

$$\psi_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_n(X_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \psi(X_i),$$

tedy také

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \lim_{n\to\infty} \psi_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \psi(X_i).$$

Za druhé je pro všecka n a m

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) \geqq \psi_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_n(X_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} \psi_n(X_i),$$

tedy také

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) \geqq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \psi_n(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \psi(X_i),$$

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) \geqq \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \psi(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi(X_i).$$

Tedy $\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi(X_i)$, takže funkce ψ je σ-aditivní; tedy také $\varphi = \psi + \varphi_1$ je σ-aditivní. Podle **22·3·6** existuje množina $N_1 \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_m)$ taková, že pro $x \in \mathbf{E}_m - N_1$ existuje a je konečná derivace $\varphi_1'(x)$. Položme $\chi_n = \varphi - \varphi_n$. Pak jsou χ_n konečné nezáporné σ-aditivní funkce v oboru $\mathfrak{K}$ a pro $X \in \mathfrak{K}$ je $\varphi_n(X) \to 0$, $\varphi_n(X) \geqq \varphi_{n+1}(X)$. Tedy podle **22·3·7** existuje množina $N_2 \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_m)$ taková, že pro $x \in \mathbf{E}_m - N_2$ existují a jsou konečné derivace $\chi'_n(x)$ a jest $\chi'_n(x) \to 0$. Zřejmě $\mathbf{E}_m - M \subset \subset N_1 + N_2$, tedy $\mathbf{E}_m - M \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_m)$.

Nechť M je libovolná podmnožina prostoru $\mathbf{E}_m$ a nechť $x \in \mathbf{E}_m$. Pravíme, že x je *bod metrické horní hustoty množiny* M, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že, když $x \in \varDelta(c, s)$ a $s < \delta$, horní míra $|M\varDelta|$ množiny $M\varDelta$ je větší než $(1 - \varepsilon) \,.\, |\varDelta|$.*) Pravíme, že x je *bod metrické řídkosti množiny* M, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že, když $x \in \varDelta(c, s)$ a $s < \delta$, horní míra $|M\varDelta|$ množiny $M\varDelta$ je menší než $\varepsilon\,|\varDelta|$. Pravíme, že x je *bod metrické hustoty* množiny M, když x je bod metrické řídkosti množiny $\mathbf{E}_m - M$.

22·3·9. *Každý bod metrické hustoty množiny $M \subset \mathbf{E}_m$ je bodem metrické horní hustoty množiny M.*

Neboť

$$|M\varDelta| + |(\mathbf{E}_m - M)\varDelta| \geqq |\varDelta|.$$

22·3·10. *Když $M \subset \mathbf{E}_m$ je měřitelná množina, pak každý bod metrické horní hustoty množiny M je bodem metrické hustoty množiny M.*

Neboť nyní je (v. **20·1·17**)

$$|M\varDelta| + |(\mathbf{E}_m - M)\varDelta| = |\varDelta|.$$

---

*) Při tom ovšem nemusí býti $x \in M$.

22·3·11. *Nechť $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Nechť A je množina všech bodů metrické hustoty množiny L; nechť B je množina všech bodů metrické řídkosti množiny L. Pak $L - A \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$, $(\mathsf{E}_m - L) - B \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. I. Z **20·4·7** následuje snadno, že existuje posloupnost $\{G_n\}_1^\infty$ otevřených množin taková, že

$$G_n \supset G_{n+1}, \ \prod_{n=1}^{\infty} G_n \supset L, \ \left| \prod_{n=1}^{\infty} G_n - L \right| = 0.$$

Zvolme $i = 1, 2, 3, \ldots$ a položme $\Gamma_i = \mathop{\mathrm{E}}_x[\varrho(x, \omega) < i]$, kde $\omega = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathsf{E}_m$. Pro $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ nechť $\psi_n(X) = | G_n X |$, $\varphi_{in}(X) = \psi_n(X\Gamma_i)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\psi(X) = | LX |$, $\varphi_i(X) = \psi(X\Gamma_i)$. Snadno se přesvědčíme, že $A = \mathop{\mathrm{E}}_x[\psi'(x) = 1]$. Zřejmě φ_{in}, ψ_n, φ_i a ψ jsou nezáporné σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$; mimo to funkce φ_{in} a φ_i jsou konečné a jest $\varphi_{i,n+1}(X) \leqq \varphi_{i,n}(X)$ pro každou $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Dále jest

$$\psi(X) = | LX | \leqq \left| X \prod_{n=1}^{\infty} G_n \right| \leqq | LX | + \left| \prod_{n=1}^{\infty} G_n - L \right| = | LX | = \psi(X),$$

tedy podle **19·2·3**, **20·1·14** a **20·1·17**

$$\psi(X) = \left| X \prod_{n=1}^{\infty} G_n \right| = \lim | XG_n | = \lim \psi_n(X)$$

pro každou $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ takovou, že $| X | < \infty$; ježto

$$X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m) \Rightarrow X\Gamma_i \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m), \ | X\Gamma_i | \leqq | \Gamma_i | < \infty,$$

jest $\varphi_i(X) = \lim \varphi_{in}(X)$ pro každou $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$.

Tedy podle věty **22·3·8** (do které dosadíme $-\varphi_{in}$ a $-\varphi_i$ za φ_n a φ) existuje množina C_i taková, že $\mathsf{E}_m - C_i \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ a že pro každý $x \in C_i$ existují derivace $\varphi'_{in}(x)$ a $\varphi'_i(x)$ a jest $\lim \varphi'_{in}(x) = \varphi'_i(x)$. Nechť $C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\Gamma_i$.

Nechť $x \in LC$. Pak existuje index i takový, že $x \in LC_i\Gamma_i$. Ježto x náleží do otevřené množiny Γ_i, existuje číslo $\alpha > 0$ takové, že

$$x \in \Delta(c, s), \ s < \alpha \Rightarrow \Delta(c, s) \subset \Gamma_i. \tag{5}$$

Ježto $x \in C_i$, existují derivace $\varphi'_{in}(x)$ a $\varphi'_i(x)$ a jest $\varphi'_{in}(x) \to \varphi'_i(x)$. Z (5) následuje snadno, že $\varphi'_{in}(x) = \psi'_n(x)$, $\varphi'_i(x) = \psi'(x)$, takže $\psi'_n(x) \to \psi'(x)$. Ježto $x \in L \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, jest $x \in G_n$ pro každý index n. Ježto množiny G_n jsou otevřené, dokáže se snadno, že $\psi'_n(x) = 1$. Tedy $\psi'(x) = 1$, takže $x \in \mathop{\mathrm{E}}_x[\psi'(x) = 1]$, tedy $x \in A$. Tím je dokázáno, že

$LC \subset A$, takže

$$L - A \subset \mathsf{E}_m - C = \sum_{i=1}^{\infty} (\Gamma_i - C) \subset \sum_{i=1}^{\infty} (\mathsf{E}_m - C_i),$$

takže $L - A \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.

II. Když množinu L nahradíme množinou $\mathsf{E}_m - L$, pak množina A přejde v množinu B, takže podle I jest $(\mathsf{E}_m - L) - B \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.

22·3·12. *Nechť $M \subset \mathsf{E}_m$. Nechť A je množina všech bodů metrické horní hustoty množiny M. Pak $M - A \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. Podle **20·1·21** existuje množina $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ taková, že $M \subset L$ a že $|MX| = |LX|$ pro každou $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Z toho následuje snadno, že A je množina všech bodů metrické horní hustoty množiny L. Podle **22·3·9** a **22·3·11** jest $|L - A| = 0$. Ježto $M \subset L$, jest $|M - A| = 0$.

22·3·13. *Nechť f je měřitelná bodová funkce v oboru E_m taková, že $\int_{\mathsf{E}_m} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pro $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ nechť $\varphi(X) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x$.*) Nechť $M(f)$ je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, v nichž $\varphi'(x) = f(x) \neq \pm\infty$. Pak $\mathsf{E}_m - M(f) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. I. Nechť f nabývá pouze hodnot 0 a 1. Nechť $L = \mathrm{E}_x[f(x) = 1]$, tedy $L \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Nechť A je množina všech bodů metrické hustoty množiny L; nechť B je množina všech bodů metrické řídkosti množiny L. Snadno se dokáže, že

$$x \in A \Rightarrow \varphi'(x) = 1, \quad x \in B \Rightarrow \varphi'(x) = 0,$$

takže $AL + (B - L) \subset M(f)$, tedy

$$\mathsf{E}_m - M(f) \subset (L - A) + [(\mathsf{E}_m - L) - B],$$

takže $\mathsf{E}_m - M(f) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ podle **22·3·11**.

II. Nechť f nabývá pouze konečného počtu hodnot vesměs konečných. Nechť a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá L. Nechť $A_i = \mathrm{E}_x[f(x) = a_i]$ $(1 \leqq i \leqq m)$, takže $A_i \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Nechť $f_i(x) = 1$ pro $x \in A_i$ a $f_i(x) = 0$ pro $x \in \mathsf{E}_m - A_i$. Snadno se dokáže, že

$$M(f) \supset \prod_{i=1}^{m} M(f_i),$$

takže $\mathsf{E}_m - M(f) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ podle I.

III. Nechť funkce f je nezáporná. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ konečných měřitelných funkcí v oboru E_m, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, taková, že $0 \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ a $f_n(x) \to f(x)$ pro každý $x \in \mathsf{E}_m$. Nechť $\varphi_n(X) = \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pro každou

*) Tento integrál konverguje podle **19·1·2** a **21·2·7**.

$X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ Podle II jest $\mathsf{E}_m - M(f_n) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Podle **21·2·7** a **22·3·8***) existuje množina M_0 taková, že $\mathsf{E}_m - M_0 \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ a že pro $x \in M_0$ existují a jsou konečné derivace $\varphi'_n(x)$ a $\varphi'(x)$ a jest $\varphi'_n(x) \rightarrow \varphi'(x)$. Zřejmě

$$M(f) \subset M_0 \prod_{n=1}^{\infty} M(f_n),$$

takže $\mathsf{E}_m - M(f) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.

IV. Přistupme k obecnému případu. Zřejmě $M(f) \supset M(f^+) \,.\, M(f^-)$, takže $\mathsf{E}_m - M(f) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ podle III.

22·3·14. *Nechť φ je σ-aditivní totálně spojitá množinová funkce v oboru $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$. Nechť f je bodová funkce v oboru E_m taková, že existuje množina $M \in \mathsf{E}_m$ taková, že $\mathsf{E}_m - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ a že pro $x \in M$ jest $f(x) = \varphi'(x)$. Pak pro každou množinu $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$ je $\varphi(X) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. Podle **22·2·4** existuje měřitelná bodová funkce g v oboru E_m taková, že $\varphi(X) = \int_X g(x)\,\mathrm{d}x$. Avšak $\int_X g(x)\,\mathrm{d}x = \int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ podle **21·2·8** a **22·3·13.**

22·3·15. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Nechť $M(\varphi)$ je množina těch $x \in \mathsf{E}_m$, v nichž $\varphi'(x)$ existuje a jest rovná nule. Funkce φ je singulární, když a jen když $\mathsf{E}_m - M(\varphi) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.*

Důkaz. I. Nechť φ je nezáporná a singulární. Nechť $|A| > 0$, kde $A = \mathop{\mathrm{E}}_x[\overline{\varphi}(x) > 0]$. Máme dojíti ke sporu. Jest $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n = \mathop{\mathrm{E}}_x\left[\overline{\varphi}(x) > \frac{1}{n}\right]$; ježto $|A| > 0$, existuje index p takový, že $|A_p| > 0$. Zřejmě existuje množina $B \subset A_p$ taková, že $0 < |B| < \infty$. Ježto φ je singulární, existuje množina $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$ taková, že

$$X \in \mathfrak{K},\ XN = \emptyset \Rightarrow \varphi(X) = 0.$$

Ježto $|N| = 0 < |B|$, podle **20·4·7** existuje otevřená množina G taková, že $N \subset G$, $2\,|G| < |B|$. Podle **13·2** existuje posloupnost $\{\Gamma_n\}_1^{\infty}$ otevřených množin taková, že $\Gamma_n \supset \Gamma_{n+1}$, $\prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n = \mathsf{E}_m - G$. Jest

$$|B| \leqq |B\Gamma_n| + |G| < |B\Gamma_n| + \tfrac{1}{2}\,|B_p|,$$

tedy $|B| < 2\,|B\Gamma_n|$. Podle **22·3·4** jest $\varphi(\Gamma_n) \geqq \frac{1}{p}\,|B\Gamma_n| > \frac{1}{2p}\,|B|$.

*) Abychom mohli užíti věty **22·3·8**, musíme věděti, že funkce φ_n jsou konečné, t. j. že $\int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergují. To plyne z předcházející poznámky pod čarou podle **21·2·14**. Podle **21·2·11** je $\varphi_n(X) \leqq \varphi(X)$ a podle **21·2·18** je $\varphi_n(X) \rightarrow \varphi(X)$.

Podle **19·2·3** jest $\varphi(\mathsf{E}_m - G) = \lim \varphi(\Gamma_n)$, tedy $\varphi(\mathsf{E}_m - G) \geqq \frac{1}{2p} \mid B \mid >$ > 0, což je spor, neboť $(\mathsf{E}_m - G)\, N = \emptyset$.

II. Nechť φ je singulární. Podle **22·1·9** φ má konečnou variaci. Podle **22·1·10** $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ jsou konečné σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Ježto φ je singulární, nahlédneme snadno, že $\overline{V}_\varphi$ a $\underline{V}_\varphi$ jsou také singulární. Podle **22·1·1** a podle I jest $\mathsf{E}_m - M(\overline{V}_\varphi) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$, $\mathsf{E}_m - M(\underline{V}_\varphi) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Podle **22·1·5** jest $M(\varphi) \supset M(\overline{V}_\varphi) \,.\, M(\underline{V}_\varphi)$, takže $\mathsf{E}_m - M(\varphi) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$.

III. Nechť $\mathsf{E}_m - M(\varphi) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Podle **22·2·8** existují konečné σ-aditivní množinové funkce φ_1 a φ_2 v oboru $\mathfrak{K}$ takové, že $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, že φ_1 jest totálně spojitá a že φ_2 je singulární. Podle II jest $\mathsf{E}_m - M(\varphi_2) \in \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Zřejmě $M(\varphi_1) \supset M(\varphi) \,.\, M(\varphi_2)$, tedy $\mathsf{E}_m - M(\varphi_1) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$, takže podle **22·3·14***) (v. též **21·2·8**) pro každou $X \in \mathfrak{K}$ jest $\varphi_1(X) = 0$. Tedy $\varphi = \varphi_2$, t. j. φ je singulární.

22·3·16. *Nechť φ je σ-aditivní totálně spojitá množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Nechť N je množina těch $x \in P$, v nichž existuje $\varphi'(x)$ a jest $\varphi'(x) < 0$. Když $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$, pak φ je nezáporná funkce.*

Důkaz. Má-li funkce f týž význam jako ve **22·3·14****), pak podle **22·3·13** jest $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < 0] \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_m)$. Tedy pro každou $X \in \mathfrak{K}$ jest $\int_X f(x)\mathrm{d}x \geqq$ $\geqq 0$ podle **21·2·11**, tedy $\varphi(X) \geqq 0$ podle **22·3·14**.

Cvičení.

22·1. Nechť P je množina všech přirozených čísel. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je absolutně konvergentní řada. Když $A \subset P$, nechť: [1] $\varphi_n(A) = c_n$, když $n \in A$; [2] $\varphi_n(A) = 0$, když $n \in P - A$. Když $A \subset P$, nechť $f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(A)$. Pak f je σ-aditivní funkce s konečnou variací v oboru $\mathfrak{P}$ a pro každou $A \subset P$ jest $\overline{V}(A) = f(A^+)$, $\underline{V}(A) = -f(A^-)$, kde

$$A^+ = \underset{n}{\mathrm{E}}[n \in A,\ c_n > 0],\quad A^- = \underset{n}{\mathrm{E}}[n \in A,\ c_n < 0].$$

22·2. Pojem totální spojitosti závisí na volbě funkce μ; mluvme určitěji o totální μ-spojitosti. Jsou-li μ_1 a μ_2 dvě volby funkce μ, pak nutná a postačující podmínka, aby se pojem totální μ_1-spojitosti kryl s pojmem totální μ_2-spojitosti, jest***): Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$A \in \mathfrak{A},\ \mu_1(A) < \delta \Rightarrow \mu_2(A) < \varepsilon,$$
$$A \in \mathfrak{A},\ \mu_2(A) < \delta \Rightarrow \mu_1(A) < \varepsilon.$$

*) Aby se mohlo užíti věty **22·3·14**, je třeba definici funkce φ_1 rozšířiti z oboru $\mathfrak{K}$ na obor $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_m)$; to se stane podle **22·2·5** (v tomto odst. je totiž $L = \mathsf{E}_m$).

) f existuje podle **22·3·6.

***) Předpokládáme, že $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{K}$ (v. **22·2**).

22·3. Vitaliova věta (**22·3·1**) zůstane v platnosti, když $\Delta(c, s)$ neznamená čtverec, nýbrž kouli, tedy množinu těch $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{E}_m$, pro něž platí $\sum_{i=1}^{m} (x_i - c_i)^2 \leqq s^2$.

Ve cvič. *22·4* je $P = \mathbf{E}_2$, $\mu = \lambda_2$ a $\mathfrak{K}$ je systém všech Borelových množin v $\mathbf{E}_2$.

22·4. Nechť $K_1 \subset \mathbf{E}_2$ a $K_2 \subset \mathbf{E}_2$ jsou disjunktní konečné množiny. Nechť $M_1 = \underset{(x, y)}{\mathrm{E}} [(x + 1)^2 + y^2 \leqq 1]$, $M_2 = \underset{(x, y)}{\mathrm{E}} [(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1]$. Když $B \in \mathfrak{K}$, nechť: [1] $f_1(B)$ znamená diferenci mezi počtem bodů množiny K_1B a počtem bodů množiny K_2B; [2] $f_2(B)$ znamená diferenci mezi Lebesgueovými měrami množin $M_1B \subset \mathbf{E}_2$ a $M_2B \subset \mathbf{E}_2$; [3] $f_3(B)$ znamená Lebesgueovu míru množiny $\underset{x}{\mathrm{E}}[0 \leqq x \leqq 1, (x, x) \in B]$. Pak f_1, f_2 a f_3 jsou σ-aditivní množinové funkce s konečnou variací v oboru $\mathfrak{K}$. Funkce f_1 a f_3 jsou singulární, funkce f_2 je totálně spojitá. Když $a \in \mathbf{E}_2 - (K_1 + K_2)$, je $f'_1(a) = 0$; když $a \in K_1$, je $f'_1(a) = \infty$; když $a \in K_2$, je $f'_1(a) = -\infty$. Když $a \in \mathbf{E}_2 - (M_1 + M_2)$, je $f'_2(a) = 0$; když $a \in M_1 - M_2$, je $\overline{f_2}(a) = 1$, $\underline{f_2}(a) = 0$; když $a \in M_2 - M_1$, je $\overline{f_2}(a) = 0$, $\underline{f_2}(a) = -1$; když $a = (0, 0)$, je $\overline{f_2}(a) = 1$, $\underline{f_2}(a) = -1$. Když $a = (x, y)$, kde buďto $x \neq y$ nebo $x < 0$ nebo $x > 1$, je $f'_3(a) = 0$; když $a = (x, x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, je $\overline{f_3}(a) = \infty$, $\underline{f_3}(a) = 0$.

§ 23. Bodové funkce s konečnou variací; Stieltjesův integrál.

23·1. V celé kapitole nechť jsou pevně dána čísla $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\beta \in \mathbf{R}$ taková, že $\alpha < \beta$. Položíme $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[t \in \mathbf{R}, \alpha \leqq t \leqq \beta]$. V celé kapitole nechť je pevně dána konečná funkce f v oboru P.

V tomto odst. nechť $\mathfrak{J}^0(P)$ je systém skládající se jednak z množiny $\emptyset$, jednak ze všech intervalů tvaru $\underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t < b]$, kde $\alpha \leqq a < b \leqq \beta$. Snadno se přesvědčíme, že systém $\mathfrak{J}^0(P)$ má vlastnost α (v. str. 126 dole), takže podle **18·2·4** množinové těleso $\mathfrak{T}^0(P) = t[\mathfrak{J}^0(P)]$ se skládá ze všech disjunktních součtů $\sum_{i=1}^{m} A_i$, $A_i \in \mathfrak{J}^0(P)$.

Definujme množinovou funkci $\Delta^0 f$ v oboru $\mathfrak{J}^0(P)$ takto:

$$\Delta^0 f(\emptyset) = 0, \ \Delta^0 f(\underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t < b]) = f(b) - f(a).$$

Podobně jako věta **20·4·1** se odvodí:

23·1·1. *$\Delta^0 f$ je konečná aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{J}^0(P)$.*

Obráceně platí, jak se lehko dokáže:

23·1·2. *Nechť φ je konečná aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{J}^0(P)$. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Pak existuje právě jedna konečná bodová funkce f v oboru P taková, že $f(\alpha) = c$ a $\Delta^0 f = \varphi$.*

Podle **19·3·1** a **23·1·1** existuje právě jedna konečná aditivní množinová funkce φ v oboru $\mathfrak{T}^0(P)$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{J}^0(P)}$ jest identická s $\Delta^0 f$. Bez obavy z nedorozumění pišme $\Delta^0 f$ místo φ, takže nyní $\Delta^0 f$ znamená (konečnou aditivní) množinovou funkci v oboru $\mathfrak{T}^0(P)$.

O bodové funkci f pravíme, že *má konečnou variaci*, když množinová funkce $\Delta^0 f$ má konečnou variaci, což se dá zřejmě vysloviti i takto: *Funkce f má konečnou variaci, když a jen když existuje $\mu \in \mathsf{E}_1$, $\mu > 0$* takové, že

$$\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_m < b_m \leqq \beta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)] \right| \leqq \mu.$$

Z **22·1·7** a **22·1·8** plyne snadno:

23·1·3. *Bodová funkce f má konečnou variaci, když a jen když existují konečné neklesající bodové funkce f_1 a f_2 v oboru P takové, že $f = f_1 - f_2$.*

Od tohoto místa předpokládáme (v celé kapitole), že f má konečnou variaci. Funkce f_1 a f_2 vyskytující se ve větě **23·1·3** můžeme (v. **23·1·2** a **22·1·8**) a budeme voliti tak, že

$$\overline{V}_{\Delta^0 f} = \Delta^0 f_1, \quad \underline{V}_{\Delta^0 f} = \Delta^0 f_2. \tag{1}$$

Nechť $i = 1, 2$. Když $a \in P$, $a \neq \alpha$, pak nechť $f_i(a - 0) = \sup\limits_{x<a} f_i(x)$; mimo to nechť $f_i(\alpha - 0) = f_i(\alpha)$. Když $a \in P$, $a \neq \beta$, pak nechť $f_i(a + 0) = \inf\limits_{x>a} f_i(x)$; mimo to nechť $f_i(\beta + 0) = f_i(\beta)$. Ježto f_1 a f_2 jsou konečné neklesající funkce, zřejmě $f_i(a \pm 0) \neq \pm \infty$. Položme

$$\begin{aligned} f(a - 0) &= f_1(a - 0) - f_2(a - 0), \\ f(a + 0) &= f_1(a + 0) - f_2(a + 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Symboly $f(a \pm 0)$ mají tento význam v celé kapitole.

Ježto f_1 a f_2 jsou konečné neklesající funkce, vychází snadno ze (2) a z definice čísel $f(a \pm 0)$:

$$\begin{aligned} x_n \in P,\ x_n < a,\ x_n \to a &\Rightarrow f(x_n) \to f(a - 0), \\ x_n \in P,\ x_n > a,\ x_n \to a &\Rightarrow f(x_n) \to f(a + 0). \end{aligned} \tag{3}$$

Číslo $f(a) - f(a - 0)$ nazveme *levým skokem* funkce f v bodě a; číslo $f(a + 0) - f(a)$ nazveme *pravým skokem* funkce f v bodě a. Zřejmě:

23·1·4. *Funkce f je spojitá v bodě $a \in P$, když a jen když oba její skoky v bodě a jsou rovné nule.*

23·1·5. *Jest*

$$f(a) - f(a - 0) \geqq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(a) - f_1(a - 0) = f(a) - f(a - 0), \\ f_2(a) - f_2(a - 0) = 0, \end{cases}$$

$$f(a) - f(a - 0) \leqq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(a) - f_1(a - 0) = 0, \\ f_2(a) - f_2(a - 0) = | f(a) - f(a - 0) |, \end{cases}$$

$$f(a + 0) - f(a) \geqq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(a + 0) - f_1(a) = f(a + 0) - f(a), \\ f_2(a + 0) - f_2(a) = 0, \end{cases}$$

$$f(a + 0) - f(a) \leqq 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(a + 0) - f_1(a) = 0, \\ f_2(a + 0) - f_2(a) = | f(a + 0) - f(a) |. \end{cases}$$

Důkaz proveďme třeba pro prvé z těchto čtyř tvrzení. V případě $a = \alpha$ je to zřejmé. Nechť tedy $\alpha < a \leqq \beta$. Položme

$$f_1(a) - f_1(a - 0) = s_1, \; f_2(a) - f_2(a - 0) = s_2,$$

takže $f(a) - f(a - 0) = s_1 - s_2$, tedy $s_1 \geqq s_2$. Ježto f_2 je neklesající funkce, zřejmě $s_2 \geqq 0$. Definujme konečné funkce φ_1 a φ_2 v oboru P takto:

$$\begin{aligned} \alpha \leqq x < a &\Rightarrow \varphi_1(x) = f_1(x), & \varphi_2(x) &= f_2(x); \\ a \leqq x \leqq \beta &\Rightarrow \varphi_1(x) = f_1(x) - s_2, & \varphi_2(x) &= f_2(x) - s_2. \end{aligned}$$

Ježto $f_1(a) - f_1(a - 0) \geqq s_2$, $f_2(a) - f_2(a - 0) = s_2$ a ježto funkce f_1 a f_2 neklesají, zřejmě ani φ_1 a φ_2 neklesají. Tedy $\Delta^0\varphi_1$ a $\Delta^0\varphi_2$ jsou nezáporné aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{T}^0(P)$. Ježto $f = \varphi_1 - \varphi_2$, zřejmě $\Delta^0 f = \Delta^0\varphi_1 - \Delta^0\varphi_2$, takže podle (1) a **22·1·8** jest

$$A \in \mathfrak{T}^0(P) \Rightarrow \Delta^0\varphi_2(A) \geqq \Delta^0 f_2(A). \tag{4}$$

Pro $A = \underset{t}{\mathrm{E}}[x \leqq t < a]$, kde $\alpha \leqq x < a$, plyne ze (4)

$$\varphi_2(a) - \varphi_2(x) \geqq f_2(a) - f_2(x),$$

takže

$$\varphi_2(a) - \varphi_2(a - 0) \geqq f_2(a) - f_2(a - 0).$$

Zřejmě však $\varphi_2(a - 0) = f_2(a - 0)$, $\varphi_2(a) = f_2(a) - s_2$, takže $-s_2 \geqq 0$. Ježto také $s_2 \geqq 0$, jest $s_2 = f_2(a) - f_2(a - 0) = 0$, tedy $f(a) - f(a - 0) = s_1 = f_1(a) - f_1(a - 0)$.

Z vět **23·1·2**—**23·1·5** plyne:

23·1·6. *Když f je spojitá funkce s konečnou variací, pak existují konečné spojité neklesající funkce f_1 a f_2 v oboru P takové, že $f = f_1 - f_2$.*

23·1·7. *Nechť $\alpha \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqq \beta$. Pak*

$$\sum_{i=1}^{m} | f(x_i) - f(x_i - 0) | + \sum_{i=1}^{m} |f(x_i + 0) - f(x_i) | \leqq V_{\Delta^0 f}(P) < \infty. \tag{5}$$

Důkaz. Zvolme čísla y_i $(1 \leqq i \leqq m - 1)$ tak, že

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < x_m$$

a položme $y_0 = \alpha$, $y_m = \beta$. Ježto funkce f_k $(k = 1, 2)$ neklesají, zřejmě $f_k(x_i + 0) - f_k(x_i - 0) \leqq f_k(y_i) - f_k(y_{i-1})$ pro $1 \leqq i \leqq m$. Odtud, z (1) a z **23·1·5** následuje, že levá strana v (5) jest

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m} [f_k(x_i) - f_k(x_i - 0)] + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m} [f_k(x_i + 0) - f_k(x_i)] = \\ &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m} [f_k(x_i + 0) - f_k(x_i - 0)] \leqq \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{m} [f_k(y_i) - f_k(y_{i-1})] = \\ &= \sum_{k=1}^{2} [f_k(\beta) - f_k(\alpha)] = \overline{V}_{\Delta^0 f}(P) + \underline{V}_{\Delta^0 f}(P) = V_{\Delta^0 f}(P). \end{aligned}$$

Z **23·1·7** následuje, že pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je jen konečný počet bodů $x \in P$, v nichž některý z obou skoků funkce f jest absolutně $> \frac{1}{n}\cdot$ Tedy (v. **23·1·4**)

23·1·8. *Množina těch $x \in P$, v nichž f je nespojitá, je spočetná.*

23·2. Stále předpokládáme, že f je daná bodová funkce s konečnou variací v oboru $P = \mathop{\mathrm{E}}\limits_t[\alpha \leqq t \leqq \beta]$.

Zvolme (v. **23·1·8**) spočetnou množinu $D \subset P$ tak, že funkce f je spojitá v každém bodě $x \in P - D$.

Definujme prostor (= množinu) P^* takto: P^* se skládá jednak ze všech bodů množiny $P - D$, jednak z nových „bodů", přiřazených jednotlivým bodům množiny D; každému bodu $a \in D$ jsou přiřazeny právě dva body množiny P^*, které označíme $a - 0$ a $a + 0$. Když $a \in P - D$, nazveme jeho *projekcí* bod a sám; když $a \in D$, nazveme bod a projekcí bodu $a + 0$ i projekcí bodu $a - 0$. Tedy projekcí každého bodu množiny P^* jest určitý bod množiny P, při čemž každý bod množiny $P - D$ je projekcí právě jednoho bodu a každý bod množiny D je projekcí právě dvou bodů.

Pro každou množinu $A \subset P$ nechť A^* znamená množinu všech těch bodů prostoru P^*, jejichž projekce náležejí do množiny A.

Označme $\mathfrak{J}(P^*)$ systém skládající se jednak z množiny $\emptyset$ a ze všech jednobodových množin obsažených v P^*, jednak ze všech množin tvaru

$$(\mathop{\mathrm{E}}\limits_t[a < t < b])^*, \tag{1}$$

kde $\alpha \leqq a < b \leqq \beta$. Snadno se přesvědčíme, že systém $\mathfrak{J}(P^*)$ má vlastnost α (v. str. 126 dole), takže podle **18·2·4** množinové těleso $\mathfrak{T}(P^*) = t[\mathfrak{J}(P^*)]$ se skládá ze všech disjunktních součtů $\sum_{i=1}^{m} A_i$, kde $A_i \in \mathfrak{J}(P^*)$.

Definujme množinovou funkci Δf v oboru $\mathfrak{J}(P^*)$ takto: [1] $\Delta f(\emptyset) = 0$, [2] když $a \in P - D$, pak $\Delta f((a)) = 0$, [3] když $a \in D$, pak $\Delta f((a - 0)) = f(a) - f(a - 0)$, $\Delta f((a + 0)) = f(a + 0) - f(a)$, [4] když A znamená množinu (1), pak $\Delta f(A) = f(b - 0) - f(a + 0)$.

Podobně jako věta **20·4·1** se odvodí:

23·2·1. *Δf je konečná aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{J}(P^*)$.*

Podle **19·3·1** a **23·2·1** existuje právě jedna konečná aditivní množinová funkce φ v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$ taková, že parciální funkce $\varphi_{\mathfrak{J}(P^*)}$ jest identická s Δf. Bez obavy z nedorozumění píšeme Δf místo φ, takže nyní Δf znamená (konečnou aditivní) množinovou funkci v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$.

Zvolme opět konečné neklesající bodové funkce f_1 a f_2 v oboru P tak, že platí formule (1) z odst. **23·1**. Vycházejíce od bodových funkcí

f_1 a f_2, odvoďme množinové funkce Δf_1 a Δf_2 v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$ tak, jako jsme z bodové funkce f odvodili množinovou funkci Δf.*)

23·2·2. *Množinová funkce Δf má konečnou variaci a jest*

$$\overline{V}_{\Delta f} = \Delta f_1, \ \underline{V}_{\Delta f} = \Delta f_2, \textit{ tedy } \Delta f = \Delta f_1 - \Delta f_2.$$

Důkaz. Zřejmě $\Delta f(A) = \Delta f_1(A) - \Delta f_2(A)$ pro $A \in \mathfrak{J}(P^*)$, tedy také pro $A \in \mathfrak{T}(P^*)$; podle **23·1·5** jsou Δf_1 a Δf_2 konečné a nezáporné, takže (v. **22·1·8**) Δf má konečnou variaci a jest

$$\overline{V}_{\Delta f}(X) \leqq \Delta f_1(X), \ \overline{V}_{\Delta f}(X) \leqq \Delta f_2(X).$$

Dokažme, že $\overline{V}_{\Delta f}(X) = \Delta f_1(X)$; to stačí, neboť $\Delta f(X) = \overline{V}_{\Delta f}(X) - \underline{V}_{\Delta f}(X) = \Delta f_1(X) - \Delta f_2(X)$. Podle **19·3·1** stačí dokazovati pro $X \in \mathfrak{J}(P^*)$. Když množina X je nejvýš jednobodová, je to zřejmé (v. **23·1·5**). Nechť tedy

$$X = (\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b])^*.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Existují čísla a', b' taková, že $a < a' < b' < b$ a

$$\Delta f_1(X) = f_1(b-0) - f_1(a+0) < f_1(b') - f_1(a') + \varepsilon = \Delta^0 f_1(X') + \varepsilon,$$

kde $X' = \underset{t}{\mathrm{E}}[a' \leqq t < b']$. Ježto $\Delta f_1(X) < \Delta^0 f_1(X') + \varepsilon$ a $\Delta^0 f_1 = \overline{V}_{\Delta^0}$ existuje množina $Y_0 \in \mathfrak{T}^0(P)$ taková, že $Y_0 \subset X'$ a

$$\Delta f_1(X) < \Delta^0 f(Y_0) + \varepsilon.$$

Lehko se nahlédne, že existuje množina $Y \in \mathfrak{T}(P^*)$ taková, že $Y \subset X$ a že $\Delta f(Y) = \Delta^0 f(Y_0)$. Tedy

$$\Delta f_1(X) < \Delta f(Y) + \varepsilon \leqq \overline{V}_{\Delta f}(X) + \varepsilon.$$

Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, je $\Delta f_1(X) \leqq \overline{V}_{\Delta f}(X) \leqq \Delta f_1(X)$, tedy $\Delta f_1(X) = \overline{V}_{\Delta f_1}(X)$.

Výhoda zde zavedené množinové funkce Δf před množinovou funkcí $\Delta^0 f$ z odst. **23·1** je (v. cvič. *23·1*) v tom, že platí věta:

23·2·3. *Δf je σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$.*

Důkaz. Ježto $\Delta f = \Delta f_1 - \Delta f_2$ a ježto funkce Δf, Δf_1 a Δf_2 jsou konečné, stačí dokázati, že množinové funkce Δf_1 a Δf_2 jsou σ-aditivní v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$. Proveďme důkaz třeba pro funkci Δf_1. Podle **19·3·2** stačí dokázati, že Δf_1 je σ-aditivní v oboru $\mathfrak{J}(P^*)$, že tedy pro $A_n \in \mathfrak{J}(P^*)$, $A \in \mathfrak{J}(P^*)$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ s disjunktními sčítanci jest $\Delta f_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta f_1(A_n)$. To je zřejmé, když množina A je prázdná nebo jednobodová. Nechť tedy

$$A = (\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b])^*,$$

kde $\alpha \leqq a < b \leqq \beta$. Připomeneme-li si definici systému $\mathfrak{J}(P^*)$ a de-

*) Množina D zůstává beze změny; všimněme si, že (v. **23·1·4** a **23·1·5**) obsahuje všecky body $x \in P$, v nichž některá z funkcí f_1 a f_2 je nespojitá.

finici množinové funkce Δf_1, vidíme, že stačí dojíti ke sporu z následujícího předpokladu: Nechť $a_i \in P$, $b_i \in P$, $a_i < b_i$; nechť $c_j \in P$; při tom každý z obou indexů i a j nabývá buďto všech hodnot 1, 2, 3, ... nebo jen konečného počtu takových hodnot; nechť

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b] = \sum_i \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i < t < b_i] + \sum_j (c_j), \tag{2}$$

kde množiny napravo jsou disjunktní. Nechť*)

$$\begin{aligned} f_1(b-0) - f_1(a+0) &= \sum_i [f_1(b_i - 0) - f_1(a_i + 0)] + \\ &+ \sum_j [f_1(c_j + 0) - f_1(c_j - 0)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Ježto funkce f_1 neklesá, vychází snadno ze (2), že číslo, které se dostane, když napravo v součtech $\sum_i$ a $\sum_j$ dáme indexu i nebo j probíhati jen konečný počet jeho hodnot, jest nejvýš rovné levé straně ve (3). Tedy ze (3) následuje, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} f_1(b-0) - f_1(a+0) - 4\varepsilon &> \sum_i [f_1(b_i - 0) - f_1(a_i + 0)] + \\ &+ \sum [f_1(c_j + 0) - f_1(c_j - 0)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Volíme-li kladná čísla u a v_j dosti malá, bude

$$f_1(b-u) > f_1(b-0) - \varepsilon, \quad f_1(a+u) < f_1(a+0) + \varepsilon,$$

$$f_1(c_j - v_j) > f_1(c_j - 0) - \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad f_1(c_j + v_j) < f_1(c_j + 0) + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

takže podle (4) bude

$$\begin{aligned} f_1(b-u) - f_1(a+u) &< \sum_i [f_1(b_i - 0) - f_1(a_i + 0)] + \\ &+ \sum_j [f_1(c_j + v_j) - f_1(c_j - v_j)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Podle (2) však bude

$$\begin{aligned} K = \underset{t}{\mathrm{E}}[a + u \leqq t \leqq b - u] \subset \\ \subset \sum_i \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i < t < b_i] + \sum_j \underset{t}{\mathrm{E}}[c_j - v_j < t < c_j + v_j]. \end{aligned} \tag{6}$$

Avšak množina K je kompaktní (v. **17·2·3**) a průniky množiny K s množinami vyskytujícími se napravo v (6) jsou otevřené v K, takže podle **17·5·4** existují indexy m a n takové, že

$$\underset{t}{\mathrm{E}}[a + u \leqq t \leqq b - u] \subset \sum_{i=1}^{m} \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i < t < b_i] + \sum_{j=1}^{n} \underset{t}{\mathrm{E}}[c_j - v_j < t < c_j + v_j]. \tag{7}$$

---

*) Ježto funkce f_1 neklesá v oboru $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t \leqq \beta)]$, vidíme snadno, že každý z obou součtů napravo ve (3), má-li vůbec nekonečně mnoho členů, je konvergentní [a má hodnotu mezi 0 a $f_1(\beta) - f_1(\alpha)$].

Ježto funkce f_1 neklesá, následuje ze (7) snadno, že

$$\begin{aligned} f_1(b-u)-f_1(a+u) \leqq \sum_{i=1}^{m}[f_1(b_i-0)-f_1(a_i+0)] + \\ + \sum_{j=1}^{n}[f_1(c_j+v_j)-f_1(c_j-v_j)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Ježto funkce f_1 neklesá, relace (5) a (8) si navzájem odporují.

Podle **23·2·3** jsou Δf_1 a Δf_2 konečné nezáporné σ-aditivní množinové funkce v množinovém tělese $\mathfrak{T}(P^*)$, takže na ně můžeme aplikovati teorii odstavce **20·1**. Zřejmě každá podmnožina prostoru P^* je shora Δf_1-měřitelná i shora Δf_2-měřitelná. Systém všech Δf_1-měřitelných množin měli bychom podle **20·1** označiti $\mathfrak{L}_{\Delta f_1}$; označme jej pohodlněji $\mathfrak{L}(f_1)$; v obdobném smyslu pišme $\mathfrak{L}(f_2)$. Místo Δf_1-měřitelná a Δf_2-měřitelná množina říkejme stručněji f_1-měřitelná a f_2-měřitelná množina. Systémy $\mathfrak{L}(f_1)$ a $\mathfrak{L}(f_2)$ podle **20·1·14** jsou množinová σ-tělesa; jejich průnik označme $\mathfrak{L}(f)$, takže zřejmě i $\mathfrak{L}(f)$ je množinové σ-těleso. Množiny systému $\mathfrak{L}(f)$ nazveme f-měřitelné. Množinové σ-těleso $\tau[\mathfrak{T}(P^*)]$ označme stručněji $\mathfrak{T}_\sigma(P^*)$. Lehko se dokáže (sr. **18·6·4** a cvič. *18·18*):

23·2·4. *Podmnožina A prostoru P^* náleží do množinového σ-tělesa $\mathfrak{T}_\sigma(P^*)$ tehdy a jen tehdy, když množina projekcí všech bodů množiny A jest Borelova množina prostoru P.*

Podle **20·1·15** jest

$$\mathfrak{T}_\sigma(P^*) \subset \mathfrak{L}(f).$$

Když $L_1 \in \mathfrak{L}(f_1)$, pak *$\Delta f_1$-míru* $|L_1|_{\Delta f_1}$ množiny L_1 označíme stručněji $|L_1|_{f_1}$ a nazveme ji stručněji *f_1-měrou* množiny L_1; obdobně máme *f_2-míru* $|L_2|_{f_2}$ množiny $L_2 \in \mathfrak{L}(f_2)$. Když $L \in \mathfrak{T}(P^*)$, jest $|L|_{f_1} = \Delta f_1(L)$, $|L|_{f_2} = \Delta f_2(L)$ podle **20·1·10**. Specielně

$$|P^*|_{f_1} = f_1(\beta) - f_1(\alpha), \quad |P^*|_{f_2} = f_2(\beta) - f_2(\alpha). \tag{9}$$

Podle (9), **20·1·17** a cvič. *19·8* f_1-míra je σ-aditivní nezáporná omezená množinová funkce v oboru $\mathfrak{L}(f_1)$ a stejně f_2-míra v oboru $\mathfrak{L}(f_2)$. Když $L \in \mathfrak{L}(f)$, položíme $|L|_f = |L|_{f_1} - |L|_{f_2}$ a číslo $|L|_f$ nazveme *f-měrou* množiny L. Tedy *f-míra je σ-aditivní omezená množinová funkce v oboru* $\mathfrak{L}(f)$, která však může nabývati i záporných hodnot. Zřejmě

$$L \in \mathfrak{T}(P^*) \Rightarrow |L|_f = \Delta f(L).$$

23·2·5. *Nechť φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v množinovém σ-tělese $\mathfrak{T}_\sigma(P)$*) taková, že $\varphi((a)) = 0$ pro každou jednobodovou množinu (a), kde $a \in P$. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Pak existuje právě jedna spojitá bodová funkce f s konečnou variací v oboru P taková, že $f(\alpha) = c$ a že $\Delta f(A) = \varphi(A)$ pro každou množinu $A \in \mathfrak{T}(P)$. Pro každou množinu $L \in \mathfrak{T}_\sigma(P)$ jest $|L|_f = \varphi(L)$.*

---

*) Volíme $D = \emptyset$, tedy $P^* = P$.

Důkaz. I. Podle **22·1·9** φ má konečnou variaci. Nechť $\psi_1 = \overline{V}_\varphi$, $\psi_2 = \underline{V}_\varphi$. Podle **22·1·1** a **22·1·10** ψ_1 a ψ_2 jsou nezáporné σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{T}_\sigma(P)$. Když $a \in P$, pak

$$\psi_1((a)) = \overline{V}_\varphi((a)) = \max(\varphi((a)), \varphi(\emptyset)) = 0,$$

a podobně $\psi_2((a)) = 0$. Pro $x \in P$ položme

$$g_1(x) = c + \psi_1(\underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < x]),\ g_2(x) = \psi_2(\underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < x]),$$

takže g_1 a g_2 jsou neklesající (v. cvič. *19·8*) konečné bodové funkce v oboru P. Lehko se dokáže (v. **19·2·3**), že g_1 a g_2 jsou spojité, takže $f = g_1 - g_2$ je spojitá funkce s konečnou variací v oboru P. Definujme f_1 a f_2 jako obvykle, volíce $f_1(\alpha) = c$, $f_2(\alpha) = 0$. Bude $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$. Z **22·1·8** se snadno odvodí, že pro každý bod $x \in P$ jest $g_1(x) \geqq \geqq f_1(x)$, tedy

$$\psi_1(\underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < x]) \geqq \Delta f_1(\underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < x]).$$

Zřejmě $f(\alpha) = c$ a $\Delta f(A) = \varphi(A)$ pro každou množinu $A \in \mathfrak{T}(P)$. Tedy f-míra a φ jsou dvě σ-aditivní množinové funkce v oboru $\mathfrak{T}_\sigma(P)$, jejichž parciální funkce v oboru $\mathfrak{T}(P)$ splynou s Δf, takže podle **20·2·3** je $\varphi(L) = |L|_f$ pro každou $L \in \mathfrak{T}_\sigma(P)$.

II. Jsou-li f a F dvě funkce vyhovující našim podmínkám, pak pro každou $A \in \mathfrak{T}(P)$ je $\Delta f(A) = \Delta F(A)$. Volíme-li $A = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < x]$, vidíme ihned, že $f = F$.

23·3. Stále předpokládáme, že f je daná bodová funkce s konečnou variací v oboru $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t \leqq \beta]$. Také $f_1, f_2, D, P^*, A^*, \mathfrak{T}(P^*), \mathfrak{T}_\sigma(P^*)$, $\mathfrak{L}(f)$ a $|L|_f$ mají stejný význam jako dosud. Definujme bodovou funkci ψ v oboru P takto:

$$\psi(x) = \sum_d [f(d+0) - f(d-0)] + f(x) - f(x-0),$$

kde d probíhá ta čísla $d \in D$, pro něž $\alpha \leqq d < x$. Podle **23·1·8** nabývá d jen spočetného počtu hodnot; když tento počet je konečný, pak význam součtu $\sum_d$ je jasný (neexistují-li vůbec čísla d, pak $\sum_d$ znamená nulu), když počet hodnot, kterých d nabývá, je nekonečný, sestavíme všecka d nějakým způsobem v posloupnost $\{d_n\}_1^\infty$ a součet $\sum_d$ znamená součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(d_n + 0) - f(d_n - 0)],$$

která podle **23·1·7** jest absolutně konvergentní, takže (v. na př. Petr, *Počet diferenciální*, str. 64) její součet nezávisí na tom, jakým způsobem sestavíme čísla d v posloupnost $\{d_n\}$.

Odvoďme funkce ψ_1 a ψ_2 z funkcí f_1 a f_2 stejně, jako jsme odvodili ψ z f. Zřejmě ψ_1 a ψ_2 jsou neklesající funkce a podle **23·1·5** jest $\psi = \psi_1 - \psi_2$, takže (v. **23·1·3**) ψ je funkce s konečnou variací.

Při daných $x \in P$, $x' \in P$ $(x < x')$ položme na okamžik $D_0 = \underset{d}{\mathrm{E}}\,[d \in D,\ x < d < x']$. Pak jest, jak se lehko přesvědčíme,

$$\begin{aligned}\psi(x') - \psi(x) = f(x+0) - f(x) + f(x') - f(x'-0) + \\ + \sum_{d \in D_0} [f(d+0) - f(d-0)],\end{aligned} \tag{1}$$

kde řada $\sum\limits_{d \in D_0}$ buďto má konečný počet členů nebo jest absolutně konvergentní. Když nyní při daném x probíhá x' nějakou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \in P$, $x_n > x$, $x_n \to x$, odvodíme z (1) snadno, že $\psi(x_n) - \psi(x) \to f(x+0) - f(x)$. Tedy pro každý $x \in P$ jest

$$\psi(x+0) - \psi(x) = f(x+0) - f(x),$$

a podobně se dokáže, že

$$\psi(x) - \psi(x-0) = f(x) - f(x-0).$$

Tedy funkce $\varphi = f - \psi$ je spojitá a podobně i funkce $\varphi_1 = f_1 - \psi_1$ a $\varphi_2 = f_2 - \psi_2$ jsou spojité. Mimo to se lehko dokáže, že φ_1 a φ_2 jsou neklesající funkce, takže $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ je spojitá funkce s konečnou variací.

Pravíme, že f je *funkce skoků*, když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi konečnou množinu $K_\varepsilon \subset P$ tak, že, když

$$\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_m < b_m \leqq \beta \tag{2}$$

a když $K_\varepsilon \,.\, \underset{t}{\mathrm{E}}\,[a_i \leqq t \leqq b_i] = \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq m$, jest $\left| \sum\limits_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \varepsilon$.

23·3·1. *ψ, ψ_1 a ψ_2 jsou funkce skoků.*

Důkaz stačí provésti pro funkci ψ. Ježto množina D je spočetná, existuje prostá posloupnost $\{d_n\}_1^\infty$ taková, že $d_n \in D$ pro všecka n a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (d_n) \supset D$. Víme (v. **23·1·7**), že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} | f(d_n+0) - f(d_n) |, \quad \sum_{n=1}^{\infty} | f(d_n) - f(d_n-0) | \tag{3}$$

jsou konvergentní. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z konvergence řad (3) následuje, že existuje index p takový, že

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} | f(d_n+0) - f(d_n) | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} | f(d_n) - f(d_n-0) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zvolme $K_\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} (d_i)$. Nechť platí (2) a $K_\varepsilon \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i \leqq t \leqq b_i] = \emptyset$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Z (1) následuje snadno, že

$$\left| \sum_{i=1}^{m} [\psi(b_i) - \psi(a_i)] \right| \leqq \sum_{n=p+1}^{\infty} | f(d_n + 0) - f(d_n) | +$$
$$+ \sum_{n=p+1}^{\infty} | f(d_n) - f(d_n - 0) | < \varepsilon.$$

23·3·2. *Nechť f je funkce s konečnou variací v oboru $P = \mathop{\mathrm{E}}_{t}[\alpha \leqq \leqq t \leqq \beta]$. Nechť $c \in \mathbf{E}_1$. Pak lze určiti právě jedním způsobem funkce φ a ψ s konečnou variací v oboru P tak, že:* [1] $\psi(\alpha) = c$, [2] $f = \varphi + \psi$, [3] *φ je spojitá,* [4] *ψ je funkce skoků.*

Důkaz. I. Jedním způsobem byly již funkce φ a ψ určeny. Při tom ovšem bylo $\psi(\alpha) = 0$, ale při libovolně daném c stačí vzíti $\varphi(x) - c$ a $\psi(x) + c$ resp. místo $\varphi(x)$ a $\psi(x)$.

II. Nechť φ_1, ψ_1 a φ_2, ψ_2 jsou dva páry funkcí s předepsanými vlastnostmi. Jest $f = \varphi_1 + \psi_1 = \varphi_2 + \psi_2$, takže lze položiti $g = \varphi_1 - \varphi_2 = \psi_2 - \psi_1$. Ježto φ_1 a φ_2 jsou spojité funkce s konečnou variací, zřejmě také g je spojitá funkce s konečnou variací. Ježto ψ_1 a ψ_2 jsou funkce skoků, zřejmě také g je funkce skoků. Ježto $\psi_1(\alpha) = \psi_2(\alpha) = c$, jest $g(\alpha) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto g je funkce skoků, existuje konečná množina K_ε taková, že, když platí (2) a když $K_\varepsilon \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i \leqq t \leqq b_i] = \emptyset$ pro $1 \leqq i \leqq m$, jest $\left| \sum_{i=1}^{m} g(b_i) - g(a_i) \right| < \varepsilon$. Zvolme $\gamma \in P$, $\alpha < \gamma$. Ježto množina $K_\varepsilon \subset P$ je konečná, existují čísla u_i $(0 \leqq i \leqq m)$ taková, že $u_0 = \alpha$, $u_m = \gamma$, $u_i > u_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq m)$, $K_\varepsilon \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{t}[\alpha \leqq t \leqq \gamma] \subset \sum_{i=0}^{m} (u_i)$. Zvolme $\delta > 0$ a položme $a_i = u_{i-1} + \delta$, $b_i = u_i - \delta$. Existuje $\delta_0 > 0$ takové, že pro $\delta < \delta_0$ platí (2) a $K_\varepsilon \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i \leqq t \leqq b_i] = \emptyset$ $(1 \leqq i \leqq m)$, takže pro $0 < \delta < \delta_0$ jest $\left| \sum_{i=1}^{m} [(g(u_i - \delta) - g(u_{i-1} + \delta)] \right| < \varepsilon$. Tedy také (ježto g je spojitá)

$$\varepsilon \geqq \lim_{\delta \to 0} \left| \sum_{i=1}^{m} [g(u_i - \delta) - g(u_{i-1} + \delta)] \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} [g\,(u_i) - g(u_{i-1})] \right|$$
$$= | g(u_m) - g(u_0) | = | g(\gamma) - g(\alpha) | = | g(\gamma) |.$$

Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, jest $g(\gamma) = 0$, t. j. $\varphi_1(\gamma) = \varphi_2(\gamma)$, $\psi_1(\gamma) = \psi_2(\gamma)$ pro každý bod $\gamma \in P$.

23·4. Nechť nyní $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, tedy $P = \mathop{\mathrm{E}}_{t}[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathbf{E}_1$, a nechť f je *spojitá* funkce s konečnou variací v intervalu P, takže ve **23·2** můžeme voliti $D = \emptyset$, tedy $P^* = P$ a $\mathfrak{T}(P) = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \in \mathfrak{T}_1, X \subset P]$ ($\mathfrak{T}_1$ má stejný význam jako v **18·3**), takže (v. **18·6·4** a cvič. *18·18*) $\mathfrak{T}_\sigma(P)$ je systém všech $\mathbf{B}(P)$ čili systém všech $\mathbf{B}(\mathsf{E}_1)$ vnořených do P.

Označme $\mathfrak{K}$ systém všech množin tvaru $L_1 + L_2$, kde $L_1 \subset P$, $L_2 \subset \mathsf{E}_1 - P$, $L_1 \in \mathfrak{L}(f)$, $L_1 \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$, $L_2 \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$ a položme $\varphi(L_1 + L_2) = | L_1 |_f$. Ježto $\mathfrak{L}(f)$ a $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$ jsou množinová σ-tělesa, zřejmě i $\mathfrak{K}$ je množinové σ-těleso. Mimo to $\tau(\mathfrak{T}_1) \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$ a φ je konečná σ-aditivní množinová funkce v oboru $\mathfrak{K}$. Tedy jsou splněny předpoklady z odst. **22·3** (kde volíme $m = 1$), tudíž i předpoklady z odst. **22·2** (kde dosadíme E_1, λ_1 a P resp. za P, μ a L).

23·4·1. *Číslo* $\lambda \in \mathbf{R}$ *je derivací* (v klasickém smyslu) *bodové funkce* f *v bodě* c ($\alpha < c < \beta$), *když a jen když* λ *je derivací* (ve smyslu odst. **22·3**) *množinové funkce* φ *v bodě* c.

Důkaz proveďme jen pro $-\infty < \lambda < \infty$ (v. cvič. *23·2*).

I. Nechť λ je derivací množinové funkce φ v bodě c. Když $x_n \in P$, $x_n \to c$, $x_n \neq c$, pak množiny

$$\Delta_n = \begin{cases} \underset{t}{\mathrm{E}}[c \leqq t \leqq x_n], & \text{když } x_n > c, \\ \underset{t}{\mathrm{E}}[x_n \leqq t \leqq c], & \text{když } x_n < c \end{cases}$$

jsou čtverce (ve smyslu odst. **22·3**, kde $m = 1$) o straně $| x_n - c | \to 0$ a jest $c \in \Delta_n \subset P$. Tedy podle **22·3·2**

$$\frac{\varphi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} = \frac{\varphi(\Delta_n)}{|x_n - c|} \to \lambda.$$

Lehko se však dokáže, že

$$\varphi(\Delta_n) = \begin{cases} f(x_n) - f(c), & \text{když } x_n > c, \\ f(c) - f(x_n), & \text{když } x_n < c, \end{cases}$$

takže

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \frac{\varphi(\Delta_n)}{|x_n - c|} \to \lambda,$$

t. j. $f'(c) = \lambda$.

II. Nechť $f'(c) = \lambda$. Nechť $\Delta_n = \Delta(x_n, s_n) = \underset{t}{\mathrm{E}}[\,| t - x_n | \leqq \frac{1}{2} s_n]$, $c \in \Delta_n$, $s_n > 0$, $s_n < c - \alpha$, $s_n < \beta - c$, $s_n \to 0$. Podle **22·3·2** máme dokázati, že

$$\frac{\varphi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} = \frac{\varphi(\Delta_n)}{s_n} \to \lambda.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto $f'(c) = \lambda$, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |t - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

tedy
$$|t-c|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(c)-\lambda(t-c)| \leqq \varepsilon\,|t-c|. \qquad (1)$$
Ježto $s_n \to 0$, existuje index p takový, že pro $n > p$ jest $0 < s_n < \delta$. Lehko se dokáže, že
$$\varphi(\Delta_n) = f(x_n + \tfrac{1}{2}s_n) - f(x_n - \tfrac{1}{2}s_n).$$
Když $n > p$, jest $|(x_n \pm \frac{1}{2}s_n) - c| \leqq s_n < \delta$, takže podle (1) jest pro $n > p$
$$|f(x_n \pm \tfrac{1}{2}s_n) - f(c) - \lambda(x_n \pm \tfrac{1}{2}s_n - c)| \leqq \varepsilon\,|x_n \pm \tfrac{1}{2}s_n - c| \leqq \varepsilon s_n,$$
tedy
$$|\varphi(\Delta_n) - \lambda s_n| \leqq 2\,\varepsilon\, s_n,$$
takže $\dfrac{\varphi(\Delta_n)}{s_n} \to \lambda$.

Z **22·3·6** a **23·4·1** plyne:

23·4·2. *Nechť f je spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathbf{E}_1$. Pak existuje nulová množina $N \subset P$ taková, že funkce f má konečnou derivaci $f'(x)$ v každém bodě $x \in P - N$.*

Nechť nyní f je libovolná konečná funkce v intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathbf{E}_1$. Pravíme, že f je *totálně* (nebo *absolutně*) *spojitá,* když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že
$$\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_m < b_m \leqq \beta, \quad \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) < \delta \qquad (2)$$
implikuje
$$\left| \sum_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Jinak řečeno, pravíme, že f je totálně spojitá, když (v. **23·1**) každému $\varepsilon > 0$ lze přiřaditi $\delta > 0$ takové, že
$$A \in \mathfrak{T}^0(P), \; |A| < \delta \Rightarrow |\Delta^0 f(A)| < \varepsilon.$$

23·4·3. *Totálně spojitá bodová funkce f je spojitá a má konečnou variaci.*

Důkaz. Spojitost je patrná z definice totální spojitosti, když ve (2) volíme $m = 1$. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ a určíme-li příslušné $\delta > 0$, pak existuje přirozené číslo k takové, že interval P je součet k intervalů délky menší než δ, načež zřejmě
$$\alpha \leqq a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \ldots \leqq a_m < b_m \leqq \beta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)] \right| < k\varepsilon,$$
takže f má konečnou variaci.

23·4·4. *Nechť f je totálně spojitá. Pak f_1 a f_2* (v. (1) v odst. **23·1**) *jsou totálně spojité.*

Důkaz stačí provésti pro f_1. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ježto f je totálně spojitá, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$A \in \mathfrak{T}^0(P), \quad |A| < \delta \Rightarrow |\Delta^0 f(A)| < \varepsilon.$$

Avšak

$$\Delta^0 f_1(A) = \overline{V}_{\Delta^0 f}(A) = \sup \Delta^0 f(X),$$

kde X probíhá množiny takové, že $X \in \mathfrak{T}^0(P)$, $X \subset A$. Tedy

$$A \in \mathfrak{T}^0(P), \quad |A| < \delta \Rightarrow X \in \mathfrak{T}^0(P), \; X \subset A \Rightarrow |\Delta^0 f(X)| < \varepsilon,$$

takže

$$A \in \mathfrak{T}^0(P), \quad |A| < \delta \Rightarrow |\Delta^0 f_1(A)| \leqq \varepsilon.$$

Tedy f_1 je totálně spojitá.

23·4·5. *Bodová funkce f je totálně spojitá* (ve smyslu právě definovaném), *když a jen když množinová funkce φ je totálně spojitá* (ve smyslu odst. **22·2**, kde za P, μ a L dosadíme resp. $\mathbf{E}_1$, λ_1 a P).

Důkaz. I. Nechť φ je totálně spojitá. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle **22·2·6** existuje $\delta > 0$ takové, že

$$X \in \mathfrak{K}, \quad |X| < \delta \Rightarrow |\varphi(X)| < \varepsilon.$$

Nechť platí (2) a nechť $X = \sum_{i=1}^{m} \underset{t}{\mathrm{E}}[a_i < t < b_i]$. Lehko se dokáže, že $X \in \mathfrak{K}$, $|X| < \delta$, $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} [f(b_i) - f(a_i)]$, takže platí (3). Tedy f je totálně spojitá.

II. Nechť f je totálně spojitá. Nechť $N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1)$, $N \subset \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha < t < \beta]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle **23·4·4** f_1 je (nezáporná) totálně spojitá funkce, takže existuje $\delta > 0$ takové, že (2) implikuje

$$\sum_{i=1}^{m} [f_1(b_i) - f_1(a_i)] < \varepsilon. \tag{4}$$

Podle **20·4·7** existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{E}_1$ taková, že $N \subset G$ a $|G| < \delta$. Můžeme předpokládati, že $\emptyset \neq G \subset \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha < t < \beta]$. Podle **17·8·1** a **17·8·2** existuje disjunktní konečná nebo nekonečná posloupnost $\{C_n\}_1^k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$ nebo $k = \infty$) intervalů $C_n = \underset{t}{\mathrm{E}}[a_n < t < b_n] \subset$ $\subset P$ taková, že $G = \sum_{n=1}^{k} C_n$. Jest $\sum_{n=1}^{k} (b_n - a_n) = |G| < \delta$. Ježto (2) implikuje (4), dokáže se snadno, že

$$\sum_{n=1}^{k} [f_1(b_n) - f_1(a_n)] \leqq \varepsilon.$$

Zřejmě však $|C_n|_{f_1} = f_1(b_n) - f_1(a_n)$, takže $\sum_{n=1}^{k} [f_1(b_n) - f_1(a_n)] = |G|_{f_1}$. Tedy $|G|_{f_1} \leqq \varepsilon$, takže podle **20·1·5** jest $|N|_{f_1} \leqq \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, jest $|N|_{f_1} = 0$. Tedy

$$N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1),\ N \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[\alpha < t < \beta] \Rightarrow |N|_{f_1} = 0. \tag{5}$$

Ježto f je spojitá, také f_1 je spojitá, tedy $|(\alpha)|_{f_1} = |(\beta)|_{f_1} = 0$. Z toho následuje snadno, že v (5) můžeme předpoklad $N \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[\alpha < t < \beta]$ nahraditi předpokladem $N \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[\alpha \leqq t \leqq \beta] = P$. Tedy

$$N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1),\ N \subset P \Rightarrow |N|_{f_1} = 0. \tag{6}$$

Stejně ovšem

$$N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1),\ N \subset P \Rightarrow |N|_{f_2} = 0.$$

Ježto obecně $\varphi(N) = |NP|_{f_1} - |NP|_{f_2}$, je tedy

$$N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1) \Rightarrow \varphi(N) = 0.$$

Tedy φ je totálně spojitá.

23·4·6. *Když f je totálně spojitá, jest* $\mathop{\mathrm{E}}_X[X \subset P,\ X \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)] \subset \mathfrak{L}(f)$.

Důkaz. Nechť $X \subset P$, $X \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$. Podle **18·6·4** (v. též cvič. *18·18*) a **20·1·23** existují množiny $B \in \mathbf{B}(P)$, $N \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$, $N \subset P$ takové, že $X = B + N$. Podle **23·2·4** jest $B \in \mathfrak{T}_\sigma(P) \subset \mathfrak{L}(f)$. Podle (6) a **20·1·11** jest $N \in \mathfrak{L}(f)$. Tedy $X \in \mathfrak{L}(f)$.

Nechť opět f je libovolná konečná funkce v intervalu $P = \mathop{\mathrm{E}}_t[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathbf{E}_1$. Pravíme, že f je *singulární*, když při libovolně daném $\varepsilon > 0$ lze každé množině $A \in \mathfrak{T}^0(P)$ přiřaditi množinu $B \in \mathfrak{T}^0(P)$ tak, že

$$B \subset A,\quad |B| < \varepsilon,\quad |\Delta^0 f(A - B)| < \varepsilon.$$

23·4·7. *Nechť f je singulární bodová funkce s konečnou variací v intervalu P^*. Pak f_1 a f_2* [v. (1) v odst. **23·1**] *jsou singulární.*

Důkaz stačí provésti pro f_1. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $A \in \mathfrak{T}^0(P)$. Existuje množina $B \in \mathfrak{T}^0(P)$, $B \subset A$ taková, že

$$\Delta^0 f(B) > \overline{V}_{\Delta^0 f}(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ježto f je singulární, existuje množina $C \in \mathfrak{T}^0(P)$, $C \subset B$ taková, že

$$|C| < \varepsilon,\quad \Delta^0 f(B - C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jest

$$\overline{V}_{\Delta^0 f}(C) \geqq \Delta^0 f(C) = \Delta^0 f(B) - \Delta^0 f(B - C) > \overline{V}_{\Delta^0 f}(A) - \varepsilon,$$

tedy

$$0 \leqq \overline{V}_{\Delta^0 f}(A - C) = \overline{V}_{\Delta^0 f}(A) - \overline{V}_{\Delta^0 f}(C) < \varepsilon.$$

Avšak $\overline{V}_{\Delta^0 f} = \Delta^0 f_1$. Tedy

$$C \in \mathfrak{T}^0(P),\ C \subset A,\ \ |C| < \varepsilon,\ 0 \leqq \Delta^0 f_1(A - C) < \varepsilon.$$

Tedy f_1 je singulární.

23·4·8. *Nechť f je spojitá bodová funkce s konečnou variací v intervalu P. Bodová funkce f je singulární* (ve smyslu právě definovaném), *když a jen když množinová funkce φ je singulární* (ve smyslu odst. **22·2**, kde za P, μ a L dosadíme resp. E_1, λ_1 a P).

Důkaz. I. Nechť φ je singulární. Pak existuje množina $N \in \mathfrak{K}$, $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ taková, že

$$X \in \mathfrak{K},\ XN = \emptyset \Rightarrow \varphi(X) = 0.$$

Nechť $\varepsilon > 0$, $A \in \mathfrak{T}^0(P)$. Jest $A = \sum_{i=1}^{m} \mathop{\mathrm{E}}_t[a_i \leqq t < b_i]$, kde $\alpha \leqq a_i < < b_i \leqq \beta$ $(1 \leqq i \leqq m)$ a $b_i \leqq a_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq m - 1)$. Jest $|N . \mathop{\mathrm{E}}_t[a_i < < t < b_i]| = 0$, takže podle **20·4·7** existuje otevřená množina G_i $(1 \leqq \leqq i \leqq m)$ taková, že $N . \mathop{\mathrm{E}}_t[a_i < t < b_i] \subset G_i$ a $|G_i| < \frac{\varepsilon}{m}$. Můžeme předpokládati, že $G_i \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[a_i < t < b_i]$. Podle **17·8·1** a **17·2·8** existuje disjunktní konečná nebo nekonečná posloupnost $\{C_{in}\}_{n=1}^{k_i}$ $(k_i = 1, 2, 3, \ldots$ nebo $k_i = \infty)$ intervalů $C_{in} = \mathop{\mathrm{E}}_t[a_{in} < t < b_{in}]$ taková, že $G_i = \sum_{n=1}^{k_i} C_{in}$. Jest $\varphi(G_i) = \sum_{n=1}^{k_i} \varphi(C_{in})$, takže existuje index p_i $(1 \leqq p_i \leqq k_i, p_i < \infty)$ takový, že $|\varphi(G_i) - \sum_{n=1}^{p_i} \varphi(C_{in})| < \frac{\varepsilon}{m}$. Zřejmě $\Delta^0 f(\mathop{\mathrm{E}}_t[a_{in} \leqq t < b_{in}]) = = \varphi(C_{in})$, takže

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{p_i} \varphi(C_{in}) = \Delta^0 f(B),$$

kde

$$B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{p_i} \mathop{\mathrm{E}}_t[a_{in} \leqq t < b_{in}] \in \mathfrak{T}^0(P),\ B \subset A.$$

Jest

$$|B| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{p_i} (b_{in} - a_{in}) = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{n=1}^{k_i} C_{in} \right| = \sum_{i=1}^{m} |G_i| < \varepsilon.$$

Jest

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(\mathop{\mathrm{E}}_t[a_i < t < b_i]) = \Delta^0 f(A).$$

Ježto $N \,.\, \mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i < t < b_i] \subset G_i \subset \mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i < t < b_i]$, zřejmě

$$\varphi(\mathop{\mathrm{E}}_{t}[a_i < t < b_i]) = \varphi(G_i),$$

tedy

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(G_i) = \Delta^0 f(A).$$

Tedy

$$\Delta^0 f(A - B) = \Delta^0 f(A) - \Delta^0 f(B) = \sum_{i=1}^{m} [\varphi(G_i) - \sum_{n=1}^{p_i} \varphi(C_{in})],$$

tedy $| \Delta^0 f(A - B) | < \varepsilon$.

Tedy f je singulární.

II. Nechť f je singulární. Podle **23·4·7** také f_1 je singulární. Ježto $P \in \mathfrak{T}^0(P)$, existují množiny $A_n \in \mathfrak{T}^0(P)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ takové, že $| A_n | < \frac{1}{2^n}$, $\Delta^0 f_1(P - A_n) < \frac{1}{2^n}$. Zřejmě $A_n \in \mathfrak{T}(P)$, $\Delta^0 f_1(P - A_n) = | P - A_n |_{f_1}$. Položme $B_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i$. Pak $B_n \in \mathfrak{T}_\sigma(P)$, $| B_n | \leqq \sum_{i=n}^{\infty} | A_i | < \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Pro $i \geqq n$ jest $P - B_n \subset P - A_i$, tedy $| P - B_n |_{f_1} \leqq | P - A_i |_{f_1} < \frac{1}{2^i}$; tedy $| P - B_n |_{f_1} = 0$. Nechť $N_1 = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$. Pak $N_1 \in \mathfrak{T}_\sigma(P) \subset \mathfrak{K}$; dále $N_1 \subset B_n$, tedy $| N_1 | \leqq | B_n | < \frac{1}{2^{n-1}}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, tedy $| N_1 | = 0$; konečně $P - N_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (P - B_n)$, tedy $| P - N_1 |_{f_1} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} | P - B_n |_{f_1} = 0$, t. j. $| P - N_1 |_{f_1} = 0$. Tedy

$$N_1 \in \mathfrak{K}, \quad | N_1 | = 0, \quad | P - N_1 |_{f_1} = 0.$$

Podobně existuje množina N_2 taková, že

$$N_2 \in \mathfrak{K}, \quad | N_2 | = 0, \quad | P - N_2 |_{f_2} = 0.$$

Nechť $N = N_1 + N_2$. Pak $N \in \mathfrak{K}$, $| N | = 0$; mimo to

$$X \in \mathfrak{K},\ XN = \emptyset \Rightarrow XP \subset (P - N_1)(P - N_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow | XP |_{f_1} = 0 = | XP |_{f_2} \Rightarrow \varphi(X) = | XP |_{f_1} - | XP |_{f_2} = 0.$$

Tedy φ je singulární.

Z **22·2·8**, **23·2·5**, **23·4·5** a **23·4·8** následuje snadno:

23·4·9. *Nechť f je spojitá bodová funkce s konečnou variací v intervalu $P = \mathop{\mathrm{E}}_{t}[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathsf{E}_1$. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Pak lze určiti právě jedním* *způsobem bodové funkce g a h s konečnou variací v intervalu P tak, že:* [1] $g(\alpha) = c$, [2] $f = g + h$, [3] *g je totálně spojitá,* [4] *h je singulární.*

Z **22·3·15**, **23·4·1** a **23·4·8** následuje:

23·4·10. *Nechť f je spojitá bodová funkce s konečnou variací v intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t \leqq \beta] \subset \mathsf{E}_1$. Nechť je M množina těch x $(\alpha < x < \beta)$, v nichž existuje $f'(x)$ a jest $f'(x) = 0$. Funkce f je singulární, když a jen když $P - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.*

23·4·11. *Nechť f je totálně spojitá funkce v oboru P. Nechť M je množina těch $x \in P$, v nichž existuje derivace $f'(x)$ a jest $0 > f'(x) > -\infty$. Když $M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$, pak f je neklesající funkce.*

Důkaz se provede snadno podle **22·3·16**, **23·4·1** a **23·4·5**.

23·4·12. *Nechť g je měřitelná funkce v oboru P taková, že $\int\limits_P g(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní. Nechť $c \in \mathsf{E}_1$. Pak existuje právě jedna totálně spojitá funkce f v oboru P taková, že:* [1] $f(\alpha) = c$, [2] *když M je množina těch $x \in P$, v nichž existuje $f'(x)$ a je $f'(x) = g(x)$, pak $P - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.*

Důkaz. I. Pro $x \in P$ nechť $h(x) = g(x)$; pro $x \in \mathsf{E}_1 - P$ nechť $h(x) = 0$. Pak h je měřitelná funkce v oboru E_1 a $\int\limits_{\mathsf{E}_1} h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_P g(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní. Pro $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$ nechť $\varphi(X) = \int\limits_X h(x)\,\mathrm{d}x$. Podle **22·2·4** φ je σ-aditivní totálně spojitá množinová funkce v oboru $\mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$. Podle **22·3·13** existuje množina $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ taková, že pro $x \in \mathsf{E}_1 - N$ je $\varphi'(x) = h(x) \neq \pm\infty$, takže pro $x \in P - N$ je $\varphi'(x) = g(x) \neq \pm\infty$. Podle **23·2·5** existuje bodová funkce f s konečnou variací taková, že pro $X \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$, $X \subset P$ je $\varphi(X) = |X|_f$. Podle **23·4·5** f jest totálně spojitá a podle **23·4·1** je $f'(x) = \varphi'(x) = g(x)$ pro každý $x \in P - N$.

II. Jsou-li f a F dvě funkce vyhovující našim podmínkám, pak $f - F$ jest totálně spojitá a existuje množina $N \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ taková, že pro každý $x \in \mathsf{E}_1$ je $f'(x) = F'(x) \neq \pm\infty$. Podle **23·4·11** $f - F$ a $F - f$ jsou neklesající funkce, takže $F - f$ je konstanta.

23·4·13. *Nechť f je totálně spojitá funkce v oboru P. Nechť f_1 a f_2 mají obvyklý význam. Nechť M je množina těch $x \in P$, v nichž existují a jsou konečné derivace $f'(x)$, $f'_1(x)$, $f'_2(x)$ a mimo to je buďto $f'(x) = f'_1(x)$, $f'_2(x) = 0$ nebo $f'(x) = -f'_2(x)$, $f'_1(x) = 0$. Pak $P - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.*

Důkaz. Nechť M_0 je množina těch $x \in P$, v nichž existují a jsou konečné derivace $f'_1(x)$ a $f'_2(x)$. Podle **23·4·2** je $P - M_0 \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$. Ježto f_1 a f_2 jsou neklesající funkce a $f = f_1 - f_2$, zřejmě $f'_1(x) \geqq 0$, $f'_2(x) \geqq 0$, $f'(x) = f'_1(x) - f'_2(x)$ pro každý $x \in M_0$. Tedy $M = M_0 - N$, kde

$$N = \underset{x}{\mathrm{E}}[x \in M_0,\ f'_1(x) > 0,\ f'_2(x) > 0],$$

takže stačí dokázati, že $|N| = 0$. Nechť naopak $|N| > 0$. Jest

$N = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$, kde

$$N_n = \mathop{\mathrm{E}}_x \left[x \in M_0,\ f'_1(x) > \frac{1}{n},\ f'_2(x) > \frac{1}{n} \right].$$

Jest $0 < |N| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |N_n|$, takže existuje index p takový, že $|N_p| > 0$. Z **21·1·7**, **22·3·3** a **23·4·1** se snadno odvodí, že $N_p \in \mathfrak{L}(\mathsf{E}_1)$. Tedy podle **23·4·12** existuje množina $K \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$ a totálně spojitá funkce g v oboru P taková, že pro $x \in N_p - K$ je $g'(x) = \frac{1}{p}$ a že pro $x \in (P - N_p) - K$ je $g'(x) = 0$. Funkce $f_1 - g$ a $f_2 - g$ jsou totálně spojité a mají nezáporné derivace pro každý $x \in M_0 - K$. Ježto $P - (M_0 - K) \subset K + (P - M_0) \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$, podle **23·4·11** $f_1 - g$ a $f_2 - g$ jsou neklesající funkce. Ježto $f = (f_1 - g) - (f_2 - g)$, odvodí se snadno z **22·1·8** a z (1) v **23·1**, že $g(x) = g(\alpha)$ pro každý $x \in P$, tedy také $g'(x) = 0$, což je spor.

23·5. Nechť f je libovolná funkce s konečnou variací v intervalu $P = \mathop{\mathrm{E}}_t[\alpha \leq t \leq \beta]$ $(-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty)$. Nechť D je množina těch $x \in P$, v nichž f je nespojitá. Nechť P^*, A^*, $\mathfrak{Z}(P^*)$, $\mathfrak{T}(P^*)$, f_1, f_2, $|L|_f$ a $\mathfrak{L}(f)$ mají stejný význam jako dosud.

O bodové funkci φ v oboru $A \in \mathfrak{L}(f_1)$ pravíme, že je f_1-*měřitelná*, když je Δf_1-měřitelná ve smyslu odst. **21·1** (kde $\mu = \Delta f_1$). Podobně definujeme f_2-*měřitelné* funkce v oboru $A \in \mathfrak{L}(f_2)$. O bodové funkci φ v oboru $A \in \mathfrak{L}(f)$ pravíme, že je f-*měřitelná*, když je i f_1-měřitelná i f_2-měřitelná.

Když g je bodová funkce v oboru $A \subset P$, pak označíme g^* bodovou funkci v oboru A^* takto definovanou: když $x \in A - D$, pak $g^*(x) = g(x)$: když $x \in AD$, pak $g^*(x + 0) = g^*(x - 0) = g(x)$.*) Když $A^* \in \mathfrak{L}(f_1)$, pak pravíme, že g je f_1-*měřitelná*, když g^* je f_1-měřitelná; v podobném smyslu mluvíme také o f_2-*měřitelných* a o f-*měřitelných* funkcích g.

Z **23·4·6** následuje:

23·5·1. *Nechť f je absolutně spojitá. Nechť g je měřitelná funkce v oboru P. Pak g je f-měřitelná.*

Když φ je f_1-měřitelná funkce v oboru $A \in \mathfrak{L}(f_1)$, pak Δf_1-integrál $\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}\Delta f_1$ značíme $\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}f_1(x)$; podobně definujeme $\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}f_2(x)$. Když φ je f-měřitelná funkce v oboru $A \in \mathfrak{L}(f)$, pak klademe

$$\int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}f(x) = \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}f_1(x) - \int_A \varphi(x)\,\mathrm{d}f_2(x);$$

---

*) Symboly $g^*(x \pm 0)$ zde ovšem znamenají hodnoty, kterých nabývá g^* v bodech $x \pm 0$ prostoru P^*, mají tedy zcela jiný význam než symboly $f(x \pm 0)$ definované v **23·1**.

integrál nalevo existuje tehdy a jen tehdy, když existují oba integrály napravo a když mimo to jejich rozdíl není bezvýznamný.

Když g je funkce v oboru $A \subset P$, pak

$$\int_A g(x)\,\mathrm{d}f_1(x),\ \int_A g(x)\,\mathrm{d}f_2(x),\ \int_A g(x)\,\mathrm{d}f(x) \tag{1}$$

znamená resp.

$$\int_{A^*} g^*(x)\,\mathrm{d}f_1(x),\ \int_{A^*} g^*(x)\,\mathrm{d}f_2(x),\ \int_{A^*} g^*(x)\,\mathrm{d}f(x); \tag{2}$$

každý integrál (1) existuje, když a jen když existuje příslušný integrál (2).

Právě definované integrály se nazývají *Lebesgue-Stieltjesovy integrály*; když $f(x) = x$ pro každý $x \in P$, pak jsou to Lebesgueovy integrály (v. **21·4**, kde $m = 1$). Základní věty o Lebesgue-Stieltjesovu integrálu vzniknou ovšem specialisací vět odst. **21·2**.

23·5·2. *Nechť f je absolutně spojitá. Nechť φ je funkce v oboru P taková, že $\varphi(x) = f'(x)$ pro každý $x \in P$, ve kterém existuje $f'(x)$. Nechť g je měřitelná funkce v oboru $L \in \mathfrak{L}(\mathbf{E}_1)$, $L \subset P$. Jest*

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}f(x) = \int_L g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

za předpokladu, že jeden z obou integrálů je konvergentní.

Důkaz. I. Nechť φ_1 a φ_2 jsou funkce v oboru P takové, že $\varphi_1(x) = f'_1(x)$, $\varphi_2(x) = f'_2(x)$ pro každý $x \in P$, ve kterém pravá strana existuje.

II. Nechť g je měřitelná funkce v oboru L, která nabývá pouze hodnot 0 a 1. Nechť $A = \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) = 1]$. Podle **21·2·5**, **21·2·7** a **23·5·1** jest

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}f_1(x) = |\,A\,|_{f_1}.$$

Podle **21·2·7**, **22·3·14**, **23·4·1**, **23·4·2**, **23·4·4** a **23·4·5** jest

$$\int_L g(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = |\,A\,|_{f_1}.$$

Tedy

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}f_1(x) = \int_L g(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

III. Nechť g je konečná měřitelná funkce v oboru L, která nabývá jen konečného počtu hodnot. Nechť a_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou všecky hodnoty, kterých nabývá funkce g; nechť $A_i = \underset{x}{\mathrm{E}}[g(x) = a_i]$. Nechť g_i je funkce v oboru L taková, že $g_i(x) = 1$ pro $x \in A_i$, $g_i(x) = 0$ pro $x \in L - A_i$. Podle **21·2·5**, **21·2·16** a **23·5·1** jest

$$\int_L g(x)\,\mathrm{d}f_1(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \int_L g_i(x)\,\mathrm{d}f_1(x),\ \int_L g(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} a_i \int_L g_i(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle II je však

$$\int_L g_i(x)\,\mathrm{d}f_1(x) = \int_L g_i(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

takže platí (4).

IV. Nechť g je nezáporná měřitelná funkce v oboru L. Podle **21·1·14** existuje posloupnost $\{g_n\}$ konečných měřitelných funkcí v oboru L, z nichž každá nabývá jen konečného počtu hodnot, taková, že $0 \leqq g_n(x) \leqq g_{n+1}(x)$, $g_n(x) \to g(x)$ pro každý $x \in L$. Podle **21·2·18** a **23·5·1** jest

$$\int_L g_n(x)\, \mathrm{d}f_1(x) \to \int_L g(x)\, \mathrm{d}f_1(x), \quad \int_L g_n(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x \to \int_L g(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Podle III je však

$$\int_L g_n(x)\, \mathrm{d}f_1(x) = \int_L g_n(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x,$$

takže platí (4).

V. Nechť g je měřitelná funkce v oboru L. Podle **21·2·4** a **23·5·1** jest

$$\int_L g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) = \int_L g^+(x)\, \mathrm{d}f_1(x) - \int_L g^-(x)\, \mathrm{d}f_1(x)$$

za předpokladu, že buďto levá nebo pravá strana existuje, a

$$\int_L g(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x = \int_L g^+(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x - \int_L g^-(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x$$

za obdobného předpokladu. Podle IV je však

$$\int_L g^+(x)\, \mathrm{d}f_1(x) = \int_L g^+(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x, \quad \int_L g^-(x)\, \mathrm{d}f_1(x) = \int_L g^-(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Tedy platí (4) za předpokladu, že buďto levá nebo pravá strana existuje.

VI. Stejně se dokáže, že pro každou měřitelnou funkci g v oboru L platí

$$\int_L g(x)\, \mathrm{d}f_2(x) = \int_L g(x)\, \varphi_2(x)\, \mathrm{d}x$$

za předpokladu, že jedna z obou stran existuje.

VII. Nechť g je měřitelná funkce v oboru L taková, že $\int_L g(x)\, \mathrm{d}f(x)$ je konvergentní. Pak jest

$$\int_L g(x)\, \mathrm{d}f(x) = \int_L g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) - \int_L g(x)\, \mathrm{d}f_2(x)$$

a oba integrály napravo jsou konvergentní. Podle V jest

$$\int_L g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) = \int_L g(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x,$$

takže integrál napravo je konvergentní. Podle VI jest

$$\int_L g(x)\, \mathrm{d}f_2(x) = \int_L g(x)\, \varphi_2(x)\, \mathrm{d}x$$

takže integrál napravo je konvergentní. Ježto $f = f_1 - f_2$, následuje z **23·4·2** snadno, že existuje množina $M \subset P$ taková, že $|P - M| = 0$ a že $x \in M \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Tedy

$$\int_L g(x)\, \varphi_1(x)\, \mathrm{d}x - \int_L g(x)\, \varphi_2(x)\, \mathrm{d}x = \int_L g(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

podle **21·2·8** a **21·2·10**. Tedy platí (3).

VIII. Nechť g je měřitelná funkce v oboru L taková, že $\int\limits_L g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní. Podle **23·4·13** existuje množina $N \in \mathfrak{N}(\mathbf{E}_1)$ taková, že pro $x \in P - N$ je $0 \leqq \varphi_1(x) \leqq |\varphi(x)|$, $0 \leqq \varphi_2(x) \leqq |\varphi(x)|$. Tedy podle **21·2·13** a **21·2·14** $\int\limits_L g(x)\,\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_L g(x)\,\varphi_2(x)\,\mathrm{d}x$ jsou konvergentní, takže podle V a VI $\int\limits_L g(x)\,\mathrm{d}f_1(x)$ a $\int\limits_L g(x)\,\mathrm{d}f_2(x)$ jsou konvergentní. Tedy $\int\limits_L g(x)\,\mathrm{d}f(x)$ je konvergentní, takže podle VII platí (3).

Nazveme *dělením* intervalu P konečnou posloupnost $\{A_i\}_1^m$ takovou, že: [1] $P = \sum\limits_{i=1}^m A_i$ s disjunktními sčítanci, [2] každá množina A_i je jednoho z obou tvarů: (a) a $\mathrm{E}_t[a < t < b]$, kde $a \in P$, $b \in P$, $a < b$. Množinám A_i budeme říkati *pole* dělení $\{A_i\}_1^m$; pole tvaru (a) nazveme *bodová*, pole tvaru $\mathrm{E}_t[a < t < b]$ nazveme *otevřená*. Nazveme *f-normou* dělení $\{A_i\}_1^m$ číslo $\max\limits_i [\Delta f_1(A_i{}^*) + \Delta f_2(A_i{}^*)]$, kde i probíhá ty indexy $(1 \leqq i \leqq m)$, pro které pole A_i jest otevřené. Nazveme *f-normální* každou posloupnost $\{\Gamma_n\}_1^\infty$ dělení intervalu P, pro kterou posloupnost f-norem dělení Γ_n konverguje k nule. Existence f-normálních posloupností je důsledkem věty:

23·5·3. *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení intervalu P, jehož f-norma je menší než ε.*

Důkaz. Označme ϱ metriku v P určenou podle **6·3** a **9·4** vztahem $P \subset \mathbf{R}$.*) Podle **17·2·2** a cvič. *17·23* P je kompaktní prostor. Zaveďme funkce $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ jako v odst. **23·3**, takže φ_1 a φ_2 jsou spojité a $f_1 = \varphi_1 + \psi_1$, $f_2 = \varphi_2 + \psi_2$. Ježto φ_1 a φ_2 jsou konečné a spojité, podle **9·6·1** a **17·4·4** existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x \in P,\ y \in P,\ \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow |\varphi_1(x) - \varphi_1(y)| < \frac{\varepsilon}{4},\ |\varphi_2(x) - \varphi_2(y)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nechť (v. **23·1·8**) $\{d_n\}_1^\infty$ je prostá posloupnost, obsahující každý bod množiny D. Podle **23·1·7** jsou konvergentní řady (s nezápornými členy)

$$\sum_{n=1}^\infty [f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0)], \qquad \sum_{n=1}^\infty [f_2(d_n + 0) - f_2(d_n - 0)],$$

takže existuje index p takový, že

$$\sum_{n=p+1}^\infty [f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0)] < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\sum_{n=p+1}^\infty [f_2(d_n + 0) - f_2(d_n - 0)] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

---

*) V případě $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ můžeme ovšem užíti také metriky určené v P vztahem $P \subset \mathbf{E}_1$.

Zřejmě existuje dělení Γ intervalu P takové, že: [1] pro $1 \leqq n \leqq p$ je (d_n) bodovým polem dělení Γ, [2] pro každé otevřené pole $\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$ dělení Γ jest $\varrho(a, b) < \delta$.

Nechť $A = \underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$ je otevřené pole dělení Γ. Ježto $\varrho(a, b) < \delta$, je

$$\Delta\varphi_1(A^*) = \varphi_1(b) - \varphi_1(a) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \Delta\varphi_2(A^*) = \varphi_2(b) - \varphi_2(a) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ježto (d_n) $(1 \leqq n \leqq p)$ jsou bodová pole dělení Γ a ježto pole dělení Γ jsou disjunktní, je: $d_n \in A \Rightarrow n > p$. Tedy (v. **23·3**)

$$\Delta\psi_1(A^*) = \psi_1(b + 0) - \psi_1(a - 0) \leqq \sum_{n=p+1}^{\infty} [f_1(d_n+0) - f_1(d_n-0)] < \frac{\varepsilon}{4}$$

a podobně i $\Delta\psi_2(A^*) < \frac{\varepsilon}{4}$. Ježto $f_1 = \varphi_1 + \psi_1$, $f_2 = \varphi_2 + \psi_2$, je $\Delta f_1(A^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\Delta f_2(A^*) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé otevřené pole A dělení Γ. Tedy f-norma dělení Γ je menší než ε.

Nechť je nyní dána *omezená* funkce g v oboru P. Pro každé dělení $\Gamma = \{A_i\}_1^m$ intervalu P položme

$$\overline{S}_1(g, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in A_i} g(x) \,.\, \Delta f_1(A_i^*), \quad \underline{S}_1(g, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{x \in A_i} g(x) \,.\, \Delta f_1(A_i^*),$$

$$\overline{S}_2(g, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in A_i} g(x) \,.\, \Delta f_2(A_i^*), \quad \underline{S}_2(g, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{x \in A_i} g(x) \,.\, \Delta f_2(A_i^*).$$

Položme

$$\mu_1 = \inf_{x \in P} g(x), \ \mu_2 = \sup_{x \in P} g(x);$$

ježto funkce g je omezená, jest $-\infty < \mu_1 \leqq \mu_2 < \infty$. Ježto $\sum_{i=1}^{m} \Delta f_k(A_i) = \Delta f_k(P^*) = f_k(\beta) - f_k(\alpha)$, jest

$$\mu_1 \, \Delta f_k(P^*) \leqq \underline{S}_k(g, \Gamma) \leqq \overline{S}_k(g, \Gamma) \leqq \mu_2 \, \Delta f_k(P^*) \quad (k = 1, 2). \tag{5}$$

Položme

$$\overline{\boldsymbol{R}} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, \mathrm{d}f_k(x) = \inf_{\Gamma} \overline{S}_k(g, \Gamma), \tag{6}$$

$$(k = 1, 2)$$

$$\underline{\boldsymbol{R}} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \, \mathrm{d}f_k(x) = \sup_{\Gamma} \underline{S}_k(g, \Gamma), \tag{7}$$

kde Γ probíhá všecka dělení intervalu P. (6) se nazývá *horní Riemann-Stieltjesův integrál*, (7) se nazývá *dolní Riemann-Stieltjesův integrál.*

V případě $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $f(x) = f_1(x) = x$, $k = 1$ mluvíme o *horním* a *dolním Riemannovu integrálu.*

23·5·4. *Nechť* $\{\Gamma_n\}$ *je* f*-normální posloupnost dělení intervalu* P. *Pak jest*

$$\overline{S}_k(g, \Gamma_n) \to \overline{\boldsymbol{R}} \int_\alpha^\beta g(x) \, \mathrm{d}f_k(x),$$

$$\underline{S}_k(g, \Gamma_n) \to \underline{\boldsymbol{R}} \int_\alpha^\beta g(x) \, \mathrm{d}f_k(x).$$

Důkaz proveďme třeba pro posloupnost $\{\overline{S}_1(g, \Gamma_n)\}$. Pro stručnost pišme

$$\overline{\boldsymbol{R}} \int_\alpha^\beta g(x) \, \mathrm{d}f_1(x) = \omega.$$

Podle (5) jest $-\infty < \omega < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle (6) existuje dělení $\Lambda = \{B_j\}_1^q$ intervalu P takové, že $\overline{S}_1(g, \Lambda) < \omega + \varepsilon$. Nechť γ_n je f-norma dělení Γ_n.

Zvolme index n a položme $\Gamma_n = \{A_i\}_1^m$. Označme N_1 množinu těch indexů i $(1 \leqq i \leqq m)$, k nimž existuje index j $(1 \leqq j \leqq q)$ takový, že $A_i \subset B_j$; označme N_2 množinu ostatních indexů i $(1 \leqq i \leqq m)$. Lehko se dokáže, že pro každé $i \in N_2$ pole A_i je otevřené a že je v něm obsaženo aspoň jedno bodové pole dělení Λ; tedy počet h prvků množiny N_2 je nejvýš roven počtu bodových polí dělení Λ, takže $h \leqq q$. Pro každý index $i \in N_2$ zřejmě můžeme položiti $A_i = \sum_{r=1}^{v_i} C_{ir}$ s disjunktními C_{ir} $(1 \leqq r \leqq v_i)$ v konečném počtu, z nichž každá je některého z obou tvarů: (a) a $\underset{t}{\mathrm{E}}[a < t < b]$ $(a \in P,\ b \in P,\ a < b)$ a každá C_{ir} je částí některé B_j. Tedy existuje dělení Θ intervalu P, jehož pole jsou jednak A_i $(i \in N_1)$, jednak C_{ir} $(i \in N_2,\ 1 \leqq r \leqq v_i)$.

Lehko se nahlédne, že

$$|\,\overline{S}_1(g, \Gamma_n) - \overline{S}_1(g, \Theta)\,| \leqq (\mu_2 - \mu_1) \sum_{i \in N_2} \Delta f_1(A_i^*),$$

$$\overline{S}_1(g, \Theta) \leqq \overline{S}_1(g, \Lambda).$$

Pro $i \in N_2$ pole A_i je otevřené, tedy $\Delta f_1(A_i^*) \leqq \gamma_n$. Ježto počet prvků množiny N_2 je menší než m, je tedy $\sum_{i \in N_2} \Delta f_1(A_i^*) \leqq q \,.\, \gamma_n$. Tedy

$$\omega \leqq \overline{S}_1(g, \Gamma_n) = \overline{S}_1(g, \Theta) + [\overline{S}_1(g, \Gamma_n) - \overline{S}_1(g, \Theta)] \leqq$$
$$\leqq \overline{S}_1(g, \Lambda) + (\mu_2 - \mu_1)\, q\gamma_n < \omega + \varepsilon + (\mu_2 - \mu_1)\, q\gamma_n.$$

Ježto $\gamma_n \to 0$, existuje index p takový, že pro $n > p$ je $(\mu_2 - \mu_1) q\gamma_n < \varepsilon$. Pro $n > p$ je $\omega \leqq \overline{S}_1(g, \Gamma_n) < \omega + 2\varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, jest $\overline{S}_1(g, \Gamma_n) \to \omega$.

Z (5) a **23·5·4** plyne:

23·5·5. *Jest*

$$\underline{R} \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_k(x) \leqq \overline{R} \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_k(x) \quad (k = 1, 2). \tag{8}$$

Důležitý je případ, když (pro $k = 1$ nebo $k = 2$) v (8) platí znamení rovnosti. V tomto případě společnou hodnotu obou stran relace (8) označíme

$$R \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_k(x) \quad (k = 1, 2). \tag{9}$$

(9) se nazývá *Riemann-Stieltjesův integrál.* V případě $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $f(x) = f_1(x) = x$, $k = 1$ je to klasický *Riemannův integrál.*

Když (pro $k = 1$ nebo $k = 2$) v (8) platí znamení nerovnosti, pravíme, že (9) neexistuje. Když (9) existuje i pro $k = 1$ i pro $k = 2$, píšeme

$$R \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f(x) = R \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) - R \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_2(x); \tag{10}$$

když pro $k = 1$ nebo pro $k = 2$ neexistuje (9), pravíme, že (10) neexistuje. Také (10) se nazývá *Riemann-Stieltjesův integrál.*

23·5·6. *Nechť $k = 1$ nebo $k = 2$. Nechť M je množina těch $x \in P$, v nichž:* [1] *f je spojitá,* [2] *g je nespojitá. Riemann-Stieltjesův integrál*

$$R \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, \mathrm{d}f_k(x)$$

existuje tehdy a jen tehdy, když $| M |_{f_k} = 0$.

Důkaz. Pro určitost nechť $k = 1$. I. Nechť $| M |_{f_1} > 0$. Pro každý $x \in M$ existuje (v. **9·1·1**) číslo $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $x' \in P$ takový, že*) $\varrho(x, x') < \delta$, $| g(x') - g(x) | > \varepsilon$. Tedy $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n je množina těch $x \in P - D$, k nimž při libovolně daném $\delta > 0$ existuje bod $x' \in P$ takový, že $\varrho(x, x') < \delta$, $| g(x') - g(x) | > \frac{1}{n}$. Ježto $0 < | M |_{f_1} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} | M_n |_{f_1}$, existuje index p takový, že $| M_p |_{f_1} > 0$.

Nechť $\Gamma = \{A_i\}_1^m$ je libovolné dělení intervalu P. Nechť N je množina těch indexů i $(1 \leqq i \leqq m)$, pro něž $A_i \,.\, M_p \neq \emptyset$. Jest $\sum_{i \in N} A_i \supset M_p$, tedy $\sum_{i \in N} \Delta f_1(A_i^*) = \sum_{i \in N} | A_i^* |_{f_1} \geqq | M_p |_{f_1} > 0$. Nechť N_0 je množina těch $i \in N$, pro něž pole A_i jest otevřené. Když $i \in N - N_0$,

*) ϱ znamená metriku v P zavedenou na začátku důkazu věty **23·5·3.**

jest $A_i = (a)$, kde $a \in P - D$, tedy $\Delta f_1(A_i^*) = 0$. Tedy
$$\sum_{i \in N_0} \Delta f_1(A_i^*) \geqq | M_p |_{f_1} > 0.$$
Pro každé $i \in N_0$ existuje bod $x_i \in A_i \,.\, M_p$. Ježto $i \in N_0$, jest A_i otevřené pole, takže existuje $\delta_i > 0$ takové, že: $y \in P$, $\varrho(x_i, y) < \delta \Rightarrow y \in A_i$. Ježto $x_i \in M_p$, existuje bod $x'_i \in P$ takový, že $\varrho(x_i, x'_i) < \delta_i$ a $| g(x_i) - g(x_i') | > \frac{1}{p}$. Ježto $\varrho(x_i, x'_i) < \delta_i$, jest $x'_i \in A_i$. Tedy pro $i \in N_0$ jest
$$\sup_{x \in A_i} g(x) - \inf_{x \in A_i} g(x) \geqq | g(x_i) - g(x_i') | > \frac{1}{p}.$$
Tedy
$$\overline{S}_1(g, \Gamma) - \underline{S}_1(g, \Gamma) \geqq \frac{1}{p} \sum_{i \in N_0} \Delta f_1(A_i^*) \geqq \frac{1}{p} | M_p |_{f_1} > 0,$$
takže
$$\overline{\boldsymbol{R}}\int_\alpha^\beta g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) - \underline{\boldsymbol{R}}\int_\alpha^\beta g(x)\, \mathrm{d}f_1(x) \geqq \frac{1}{p} | M_p |_{f_1} > 0.$$
Tedy $\boldsymbol{R} \int_\alpha^\beta g(x)\, \mathrm{d}f_1(x)$ neexistuje.

II. Nechť $| M |_{f_1} = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podobně jako věta **20·4·7** se dokáže, že pro každou množinu $L \subset P$ takovou, že $L^* \in \mathfrak{L}(f_1)$, existuje množina G otevřená v P a taková, že $L \subset G$ a $| G^* - L^* |_{f_1} < \varepsilon$. Ježto $| M |_{f_1} = 0$, $M \subset P - D$, existuje tedy množina G otevřená v P a taková, že $M \subset G$, $| G^* |_{f_1} < \varepsilon$. Nechť (v. **23·1·8**) $\{d_n\}_1^\infty$ je prostá posloupnost, jejímž členem je každý bod $x \in D$. Podle **23·1·7** konverguje řada (s nezápornými členy)
$$\sum_{n=1}^\infty [f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0)],$$
takže existuje index p takový, že
$$\sum_{n=p+1}^\infty [f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0)] < \varepsilon.$$

Přiřadíme každému $x \in P$ interval $K(x) = \underset{t}{\mathrm{E}}[u(x) < t < v(x)]$ obsahující bod x, a to takto.*) Nechť *předně* $x \in D$. Pak existuje index n takový, že $x = d_n$. Volme $u(x)$ a $v(x)$ tak, že $\alpha \leqq u(x) < x < v(x) \leqq \beta$ a že
$$f_1(x - 0) - f_1[u(x)] < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad f_1[v(x)] - f_1(x + 0) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

---

*) Pro $x = \alpha$ odpadne $u(x)$ a $K(\alpha) = \underset{t}{\mathrm{E}}[\alpha \leqq t < v(\alpha)]$; pro $x = \beta$ odpadne $v(x)$ a $K(\beta) = \underset{t}{\mathrm{E}}[u(\beta) < t \leqq \beta]$.

Nechť *za druhé* $x \in M$. Pak volme $u(x)$ a $v(x)$ tak, že $x \in K(x)$ a že $K(x) \subset G$. Nechť *za třetí* $x \in P - (M + D)$. Pak g je spojitá v bodě x, takže (v. **9·1·1**) můžeme $u(x)$ a $v(x)$ voliti tak, že $x \in K(x)$ a že

$$y_1 \in K(x),\ y_2 \in K(x) \Rightarrow |\, g(y_1) - g(y_2)\,| < \varepsilon.$$

Ježto prostor P je kompaktní (v. cvič. *17·23*), podle **17·5·4** existují body $x_j \in P$ $(1 \leqq j \leqq q)$ v konečném počtu takové, že $P = \sum_{j=1}^{q} K(x_j)$. Zřejmě existuje dělení $\Gamma = \{A_i\}_1^m$ takové, že: [1] pro $1 \leqq n \leqq p$ je (d_n) bodové pole dělení Γ, [2] každé pole A_i $(1 \leqq i \leqq m)$ je částí některého intervalu $K(x_j)$ $(1 \leqq j \leqq q)$. Zřejmě můžeme množinu všech indexů i rozděliti ve čtyři disjunktní části N_1, N_2, N_3, N_4 takové, že: [1] pole A_i je bodové, když a jen když $i \in N_1$, [2] ke každému $i \in N_2 + N_3 + N_4$ existuje index $j = \vartheta(i)$ takový, že $A_i \subset K(x_j)$, [3] pro $i \in N_2$, $i \in N_3$, $i \in N_4$ je resp. $x_{\vartheta(i)} \in D$, $x_{\vartheta(i)} \in M$, $x_{\vartheta(i)} \in P - (M + D)$.

Pro $i \in N_1$ je zřejmě

$$\sup_{x \in A_i} g(x) = \inf_{x \in A_i} g(x).$$

Pro $i \in N_2$ pole A_i jest otevřené a existuje index n takový, že $x_{\vartheta(i)} = d_n$. Jest $A_i \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[u(d_n) < t < v(d_n)]$,*) tedy

$$\Delta f_1(A_i^*) \leqq \Delta f_1(\mathop{\mathrm{E}}_t[u(d_n) < t < v(d_n)])^* \leqq$$
$$\leqq f_1(d_n - 0) - f_1[u(d_n)] + f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0) + f_1[v(d_n)] -$$
$$- f_1(d_n + 0)] < \frac{2\varepsilon}{2^n} + f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0).$$

Je-li $n \leqq p$, je (d_n) bodové pole dělení Γ, takže je buďto $A_i \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[u(d_n) < t < d_n]$ nebo $A_i \subset \mathop{\mathrm{E}}_t[d_n < t < v(d_n)]$; v prvém případě je $\Delta f_1(A_i^*) \leqq \leqq f_1(d_n - 0) - f_1[u(d_n)] < \frac{\varepsilon}{2^n}$, ve druhém je $\Delta f_1(A_i^*) \leqq f_1[v(d_n)] - - f_1(d_n + 0)] < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Tedy

$$\sum_{i \in N_2} \Delta f_1(A_i^*) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} + \sum_{n=p+1}^{\infty} [f_1(d_n + 0) - f_1(d_n - 0)] < 3\varepsilon.$$

Pro $i \in N_3$ je $x_{\vartheta(i)} \in M$, tedy $A_i \subset K(x_{\vartheta(i)}) \subset G$, tedy

$$\sum_{i \in N_3} \Delta f_1(A_i^*) \leqq |\, G^* \,|_{f_1} < \varepsilon.$$

*) Čtenář si sám vyřídí snadné modifikace nutné v případě $x_{\vartheta(i)} = \alpha$ nebo $x_{\vartheta(i)} = \beta$.

Pro $i \in N_4$ je $x_{\vartheta(i)} \in P - (M + D)$. Ježto $A_i \subset K(x_{\vartheta(i)})$, $x_{\vartheta(i)} \in P -$ $- (M + D)$ je

$$\sup_{x \varepsilon A_i} g(x) - \inf_{x \varepsilon A_i} g(x) \leqq \varepsilon.$$

Tedy, je-li opět $\mu_1 = \inf_{x \varepsilon P} g(x)$, $\mu_2 = \sup_{x \varepsilon P} g(x)$, jest

$$\overline{S}_1(g, \Gamma) - \underline{S}_1(g, \Gamma) = \sum_{i=1}^{m} [\sup_{x \varepsilon A_i} g(x) \dot{-} \inf_{x \varepsilon A_i} g(x)] \Delta f_1(A_i^*) <$$
$$< 4\varepsilon(\mu_2 - \mu_1) + \varepsilon \Delta f_1(P^*),$$

takže

$$\overline{\boldsymbol{R}} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f_1(x) - \underline{\boldsymbol{R}} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f_1(x) \leqq 4\varepsilon(\mu_2 - \mu_1) + \varepsilon \Delta f_1(P^*).$$

Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, podle **23·5·5** existuje

$$\boldsymbol{R} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f_1(x).$$

23·5·7. *Nechť g je omezená funkce v oboru P taková, že $\boldsymbol{R} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f(x)$ existuje. Pak g je f-měřitelná a*

$$\boldsymbol{R} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f(x) = \int_P g(x) \,\mathrm{d}f(x).$$

Důkaz zřejmě stačí provésti pro f_1 a pro f_2 místo pro f. Proveďme jej třeba pro f_1. Místo pro funkci g stačí zřejmě provésti důkaz pro funkci h takovou, že $h(x) = g(x) + c$, kde c je konstanta. Ježto g je omezená, stačí tedy dokazovati pro g a pro f_1 za předpokladu, že g je nezáporná.

Nechť μ je konečná σ-aditivní množinová funkce v množinovém tělese $t(\mathfrak{T}(P^*), \mathfrak{T}_1)$ odvozená z množinové funkce Δf_1 v oboru $\mathfrak{T}(P^*)$ a z množinové funkce λ_1 v oboru $\mathfrak{T}_1$ (v. **20·4**) stejně, jako byla v odst. **20·3** odvozena množinová funkce μ_{12} v oboru $t(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ z množinových funkcí μ_1 v oboru $\mathfrak{A}$ a μ_2 v oboru $\mathfrak{B}$.

Nechť

$$M = \mathop{\mathrm{E}}_{(x^*, t)}[x^* \in P^*, \ 0 \leqq t < g(x)],$$

kde $x \in P$ je projekce bodu $x^* \in P^*$. Stačí dokázati (v. cvič. *21·10*), že $M \in \mathfrak{L}_\mu$ a že $| M |_\mu = \boldsymbol{R} \int_\alpha^\beta g(x) \,\mathrm{d}f(x)$.

Je-li $\Gamma = \{A_i\}_1^m$ dělení intervalu P, nechť

$$\overline{M}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \mathop{\mathrm{E}}_{(x^*, t)}[x \in A_i, \ 0 \leqq t < \sup_{x \in A_i} g(x)],$$

$$\underline{M}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{m} \underset{(x^*,t)}{\mathrm{E}}[x \in A_i,\ 0 \leqq t < \inf_{x \in A_i} g(x)],$$

kde opět $x \in P$ je projekce bodu $x^* \in P^*$. Zřejmě

$$\overline{M}(\Gamma) \in t(\mathfrak{T}(P^*), \mathfrak{T}_1),\ \underline{M}(\Gamma) \in t(\mathfrak{T}(P^*), \mathfrak{T}_1),$$

$$|\overline{M}(\Gamma)|_\mu = \mu[\overline{M}(\Gamma)] = \overline{S}_1(g, \Gamma),\ |\underline{M}(\Gamma)|_\mu = \mu[\underline{M}(\Gamma)] = \underline{S}_1(g, \Gamma), \quad (11)$$

$$\underline{M}(\Gamma) \subset M \subset \overline{M}(\Gamma).$$

Nechť $\{\Gamma_n\}$ je f-normální posloupnost dělení intervalu P. Pak jest $|\overline{M}(\Gamma_n)|_\mu \to \boldsymbol{R}\int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}f_1(x)$, $|\underline{M}(\Gamma_n)|_\mu \to \boldsymbol{R}\int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}f_1(x)$, takže podle (11) a **20·1·5** jest $|M|_\mu = \boldsymbol{R}\int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}f_1(x)$. Nechť $T = \prod_{n=1}^{\infty}[\overline{M}(\Gamma_n) -$ $- \underline{M}(\Gamma_n)]$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{M}(\Gamma_n)$. Jest $S \in \mathfrak{L}_\mu$, $T \in \mathfrak{L}_\mu$, $S \subset M \subset S + T$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje index p takový, že $|\overline{M}(\Gamma_p) - \underline{M}(\Gamma_p)|_\mu < \varepsilon$, takže podle **20·1·5** jest $|T|_\mu < \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ je libovolné, je $|T|_\mu = 0$, tedy také $|MT|_\mu = 0$, takže (v. **20·1·11**) $MT \in \mathfrak{L}_\mu$. Ježto $M = S + T$, je $M \in \mathfrak{L}_\mu$.

Cvičení.

*23·1.** Množinová funkce $\Delta^0 f$ (v. **23·1**) je σ-aditivní v oboru $\mathfrak{T}^0(P)$ tehdy a jen tehdy, když $f(x) = f(x - 0)$ pro každé $x \in P$.

*23·2.** Doplniti důkaz věty **23·4·1** pro případ $\lambda = \pm\infty$.

23·3. Nechť Φ je systém všech funkcí f s konečnou variací v intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t \leqq 1]$ takových, že $f(0) = 0$. Když $f_1 \in \Phi$, $f_2 \in \Phi$, nechť

$$\varrho(f_1, f_2) = V_{\Delta^0 f_1 - \Delta^0 f_2}[P - (1)].$$

Pak ϱ je metrika ve Φ. Prostor $\Phi = (\Phi, \varrho)$ je úplný a není separabilní.

23·4. Nechť Φ je systém všech spojitých zobrazení intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[0 \leqq t \leqq 1]$ do intervalu P. Když $f_1 \in \Phi$, $f_2 \in \Phi$, nechť

$$\varrho(f_1, f_2) = \max_{t \in P} |f_1(t) - f_2(t)|,$$

takže (v. **17·7·5**) $\Phi = (\Phi, \varrho)$ je úplný prostor. Nechť $0 \leqq a < b \leqq 1$, $Q = \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b]$ a nechť $\Psi(a, b)$ znamená systém těch $f \in \Phi$, pro něž parciální funkce f_Q má konečnou variaci. Když $n = 1, 2, 3, \ldots$, nechť $\Psi(a, b, n)$ znamená systém těch $f \in \Psi(a, b)$, pro něž $\Delta g(Q) \leqq n$, kde $g = f_Q$, takže $\Psi(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(a, b, n)$. Jakožto bodová množina vnořená do (Φ, ϱ) je $\Psi(a, b, n)$ ve Φ řídká a uzavřená a $\Psi(a, b)$ je prvé kategorie ve Φ. Z toho následuje podle **15·8·2**, že existují funkce $f \in \Phi$, pro něž parciální funkce f_Q nemá konečnou variaci pro žádnou volbu intervalu $Q \subset P$.

23·5. Z věty **22·3·8** následuje věta: Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konečných neklesajících funkcí v intervalu $P = \underset{t}{\mathrm{E}}[a \leqq t \leqq b] \subset \mathbf{E}_1$. Pro $x \in P$,

$y \in P$, $x < y$ nechť $f_n(y) - f_n(x) \leqq f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x)$. Pro každé $x \in P$ nechť existuje $\lim f_n(x) = f(x) \in \mathsf{E}_1$. Nechť M je množina těch $x \in P$, v nichž existují a jsou konečné derivace $f'_n(x)$ a $f'(x)$ a jest $f'_n(x) \to f'(x)$. Pak $P - M \in \mathfrak{N}(\mathsf{E}_1)$.

Dodatek.

O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné.

Napsal *Vojtěch Jarník.*

D I. V celém tomto dodatku bude slovo „funkce" značiti t. zv. konečnou funkci jedné reálné proměnné, to jest funkci, jejíž obor (viz **2·3**) je podmnožinou množiny E_1 (opatřené metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$, viz **6·1**) a jejíž hodnoty jsou vesměs různé od $\pm\infty$. Je-li A obor funkce f a je-li $M \subset A$, budeme říkati, že funkce f je definována v množině M. Je-li $a \in \mathsf{E}_1$, $b \in \mathsf{E}_1$, $a < b$, budeme psáti

$$(a, b) = \underset{x}{\mathrm{E}}(a < x < b)^{*)} \text{ (název: otevřený interval)},$$

$$[a, b] = \underset{x}{\mathrm{E}}(a \leqq x \leqq b) \text{ (název: uzavřený interval)}.$$

V tomto úvodním odstavci budu se zabývati pojmy „limes superior" a „limes inferior". Čtenář, který tyto pojmy ovládá z elementů, může tento odstavec **D I** vynechati.

D I·I. *Nechť f je funkce; nechť $x_0 \in \mathsf{E}_1$ a nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že funkce f je definována v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Potom existuje jedno a jen jedno číslo $a \in \mathsf{R}$,**) jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. *Je-li $a' < a$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \ f(x) > a'.$$

2. *Je-li $a' > a$, potom existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x) < a'.$$

Obdobně existuje jedno a jen jedno číslo $b \in \mathsf{R}$, jež má tyto dvě vlastnosti:

1'. *Je-li $b' > b$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x tak, že*

$$x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \ f(x) < b'.$$

*) Záměny s označením prvků cartézského součinu (viz **2·I**) není třeba se obávati. Připouštíme tedy zde jen t. zv. „konečné" (v naší terminologii: omezené) intervaly, ač mnohé z následujících výsledků by platily pro $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

) R je definováno v **2·3. Může tedy býti též $a = \infty$ nebo $a = -\infty$.