PŘÍNOS F. RIESZE K TEORII LEBESGUEOVA INTEGRÁLU FUNKCÍ JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

KAREL ŽITNÝ

Z početné plejády slavných matematiků, kteří jsou původem z Maďarska, nejméně čtyři významně přispěli k rozvoji teorie míry a integrálu. Jsou to: F. Riesz, A. Haar, J. von Neumann a P. Halmos.

Haar a von Neumann vytvořili teorii míry a integrálu na kompaktních a lokálně kompaktních grupách; Halmosova kniha *Measure Theory* na dlouhé období ovlivnila nebo dokonce kodifikovala výuku této disciplíny, zejména na severoamerických univerzitách.

F. Riesz, který se narodil roku 1880 v Györu, kvůli matematice opustil studium na polytechnice v Curychu a r. 1889 se stal posluchačem budapešťské a později göttingenské univerzity, kde k jeho profesorům patřili David Hilbert a Hermann Minkowski. Profesionální kariéru začal jako středoškolský profesor na gymnáziích v Levoči a v Budapešti; teprve v roce 1914 získal univerzitní katedru v Koloszváru, v dnešní transylvánské rumunské Cluji. Od r. 1920 byl profesorem v provinčním Szegedu a pouze po 2. světové válce působil na budapešťské univerzitě.

F. Riesz patřil mezi ty mladé matematiky, kteří velmi záhy pochopili nesmírný dosah Lebesgueovy teorie integrálu. V úvodu proslulé pařížské přednášky, kterou proslovil na sklonku života, Riesz pro své vzpomínky nalezl vskutku výstižná slova:

Pokud se nemýlím, byla to Lebesgueova kniha o trigonometrických řadách, vydaná v sérii redigované Borelem, která vzbudila ve mně zájem o nový pojem integrálu. Proniknout do detailů umožnila mi Lebesgueova doktorská disertace a jeho kniha o integraci. Nicméně, smělou myšlenku, abych se pokusil aplikovat nový pojem na problémy, jimiž jsem se zabýval, získal jsem až roku 1906 při četbě Fatouova článku v Acta Mathematica, který byl rovněž předložen jako doktorská práce. Zejména velmi jednoduchá věta, dnes nazývaná Fatouovým lemmatem, podle níž, použijeme-li dnešní jazyk, integrál, chápaný jako lineární funkcionál, je zdola polospojitý, pomohla mně dokázat v únoru 1907, za několik týdnů po přečtení Fatouovy disertace, výsledek, který současně a nezávisle objevil Ernest Fischer ... ([1], str. 327)

Začátek Rieszova vztahu k teorii integrálu je tedy zcela konvenční. Jako mnohé velké matematické lásky má svůj literární počátek. Stojí za povšimnutí, jak Riesz byl v maloměstské Levoči dobře a včas informován o vědeckém životě v Paříži. Rieszova-Fischerova věta představuje jednu z prvních významných aplikací Lebesgueovy teorie a zapůsobila jako katalyzátor při podnícení zájmu dalších matematiků o tuto oblast. Krátce poté M. Fréchet současně s Rieszem dospěl k větě o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů v prostoru L^2, která představuje základní tvrzení v teorii Hilbertových prostorů. Dosažené výsledky podnítily Riesze, aby se zabýval problémy reprezentace spojitých lineárních funkcionálů na prostoru spojitých funkcí. To jej přivedlo k zobecnění Hadamardových prací a posléze k teorii Stieltjesova integrálu. (Pozn.: Rieszova-Fischerova věta není výsledkem spolupráce. Jde skoro o neuvěřitelnou koincidenci: Fischer o ní přednášel 5. března 1907 v Brně a F. Riesz svoje sdělení předložil pařížské akademii o 12 dní později. E. Fischer, rodák z Vídně, byl o pět let starší než F. Riesz. Nejprve působil v Brně, pak krátce v Erlangen, v období 1920–1938 byl univerzitním profesorem v Kolíně nad Rýnem. Zemřel v roce 1954. Převážně se věnoval teorii invariantů a determinantů s občasnými výjimkami, jak o tom svědčí jeho právě zmíněný nejproslulejší výsledek. Další vývoj dal spíše přednost jeho verzi: L^2 je úplný normovaný prostor; Riesz větu formuloval jako tvrzení o izomorfismu mezi L^2 a Hilbertovým prostorem l^2, který je tvořen posloupnostmi.)

Lebesgueova definice integrálu je založena na pojmu míry a při tvoření součtů, které v Riemannově teorii aproximují integrál, jsou intervaly dělení nahrazeny vhodně vybranými měřitelnými množinami. Avšak již u H. Lebesguea se objevila idea postulovat základní vlastnosti integrace, které jsou splněny pro nějakou jednoduchou třídu funkcí (např. pro spojité nebo stupňovité funkce definované na kompaktním intervalu) a vhodně zvoleným limitním procesem vytvořit integrály z limitních funkcí. Lebesgue doporučil uvažovat monotonní posloupnosti omezených funkcí. První myšlenku představovala postupná alternace neklesajících a nerostoucích posloupností. W. H. Young, když se omezil na posloupnosti, které konvergují pouze skoro všude, dospěl k Lebesgueovu integrálu již ve dvou krocích. Poté, co E. Borel zavedl pojem asymptotické konvergence, dnes nazývané konvergencí podle míry, opět se ukázalo, — a byl to F. Riesz, jemuž patří tento postřeh — že v limitních procesech lze odhlédnout od množin míry nula.

V roce 1912 je si Riesz dobře vědom, jakou roli hrají v Lebesgueově teorii integrálu i derivace množiny nulové míry a zabývá se prvními pokusy o novou definici Lebesgueova integrálu. Tak se stává zakladatelem matematické sekty, u níž integrace předchází teorii míry. Významným mezníkem v krystalizaci Rieszových myšlenek byl rok 1916, kdy na kongresu skandinávských matematiků dlouze diskutoval s Mittag-Lefflerem, který jako zanícený obdivovatel K. Weierstrasse neúspěšně se pokoušel nalézt zárodky Lebesgueovy teorie v pracích tohoto velkého reformátora matematické analýzy. V únoru 1917, kdy komunikace mezi matematiky byla narušena, F. Riesz odeslal Mittag-Lefflerovi dopis, poselství o elementární teorii Lebesgueova integrálu.

Omezíme-li se na reálnou osu, množiny míry nula neboli nulové množiny, lze pokrýt nejvýše spočetně mnoha konečnými intervaly, jejichž souhrnná délka je libovolně malá. Za výchozí třídu funkcí, pro něž pojem integrálu je snadný nebo intuitivně zřejmý, F. Riesz zvolil stupňovité funkce, jež nazýval „fonctions simples“, definované na omezeném uzavřeném intervalu.

Funkce $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je stupňovitá, jestliže interval $\langle a, b\rangle$ lze rozdělit konečně mnoha body

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

tak, že φ na každém subintervalu je konstantní, tj. $\varphi(t) = c_k$ pro $t \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Integrál stupňovité funkce je pak definován jako konečný součet

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) c_k .$$

Jelikož množiny míry nula vystupují v roli přípustných výjimek, od samého počátku je třeba uvažovat posloupnosti funkcí, které konvergují skoro všude, tj. s výjimkou bodů, které tvoří nulovou množinu. První pozoruhodný výsledek Riesz formuloval takto:

Omezená posloupnost stupňovitých funkcí, definovaných na konečném intervalu, která konverguje skoro všude k limitní funkci φ, může být integrována člen po členu. Posloupnost integrálů je konvergentní (číselnou) posloupností a zvolíme-li její limitu za hodnotu integrálu z limitní funkce, jde o korektní definici, neboť integrál nezávisí na zvolené posloupnosti stupňovitých funkcí, které konvergují k φ. Integrovatelnou funkcí — Riesz věren francouzské tradici hovoří o „fonction sommable" — je tak každá funkce, jež je skoro všude rovna limitě omezené posloupnosti stupňovitých funkcí.

Je lákavé zopakovat stejný postup ještě jedenkrát v naději, že tím bude definován integrál pro širší třídu funkcí, avšak Riesz ukázal, že k ničemu novému se tím nedospěje, přesněji: limitní funkcí, k níž skoro všude konverguje omezená posloupnost integrovatelných funkcí, je integrovatelná funkce a posloupnost opět může být integrována člen po členu.

Důkaz tohoto tvrzení Riesz založil na speciálním případu tzv. Jegorovovy věty (z roku 1911).

Pokud posloupnost stupňovitých funkcí v intervalu $\langle a, b\rangle$ konverguje skoro všude, lze z intervalu odstranit nejvýše spočetně mnoho intervalů, jejichž souhrnná délka je libovolně malá a na zbývající části intervalu $\langle a, b\rangle$ posloupnost konverguje stejnoměrně. Měřitelné funkce jsou v tomto pojetí limitami skoro všude konvergentních posloupností stupňovitých funkcí.

Základní vlastnosti integrovatelných funkcí vyplývají skoro automaticky z vlastností stupňovitých funkcí; snadno se dokazuje integrace per partes, věta o substituci atd. Míra množiny $A \subset [a, b]$ je dána jako integrál charakteristické funkce χ_A (pokud χ_A je integrovatelná funkce).

(Charakteristické funkce neboli indikátory byly zavedeny a systematicky používány Charlesem de la Vallée-Poussinem, dnes neprávem zapomínaným matematikem z Louvain, který napsal vynikající učebnici matematické analýzy a který učinil nesmírně mnoho pro zpřístupnění Lebesgueovy teorie. Jeho výklad teorie míry byl překonán až Carathéodorym.)

Odhlédneme-li od několika málo nevyhnutelných archaismů, je Rieszův dopis Mittag-Lefflerovi, datovaný 19. únorem 1917 pozoruhodnou četbou — styl je prostý a srozumitelný, přesný a přirozený, bez pedantství a škrobenosti. Jeho historickým pozadím je 1. světová válka; v Rusku bude zanedlouho svržena monarchie a blíží se okamžik vstupu Spojených států do konfliktu. Riesz ještě netuší, že v důsledku versailleského míru opustí Koloszvár. Dvě působiště jeho mládí, Levoča i Cluj, přestanou patřit k Maďarsku.

Bohužel, Rieszův dopis, který byl koncem roku 1919 ve zkrácené verzi otištěn v Acta Mathematica, se nestal východiskem k napsání elementární učebnice, ačkoliv jde o přístup v tradičním duchu klasických geometrických teorií integrálu a samotný Riesz podtrhoval souvislosti s Riemannovou koncepcí. K napsaní soustavného expozé se Riesz dostal až po 30 letech a ve spolupráci s Bélou Szekefalvi-Nagyem publikoval proslulé *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, poprvé vydané v roce 1952. Teorie Lebesgueova integrálu je opět založena na stupňovitých funkcích, avšak metoda je odlišná. Ačkoliv to zní skoro neuvěřitelně, je ještě jednodušší než předchozí. Riesz sám si na ni nečiní autorský nárok a soudí, že jde zčásti o tzv. matematický folklór, ale je nesporné, že jeho skvělý výklad přispěl k její popularitě. Jde o dobře známý přístup, který mimo původní pramen — ne každému vyhovuje francouzština — lze nalézt v učebnici B. Sz. Nagy — *Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansions*, nebo v knize *Matematičeskij analiz (Spec. kurz I)* G. Je. Šilova. Východiskem je speciální případ prvého tvrzení z dopisu Mittag-Lefflerovi.

- Pro nerostoucí posloupnost nezáporných stupňovitých funkcí (φ_n), která skoro všude na intervalu $\langle a, b\rangle$ konverguje k nulové funkci, posloupnost integrálů
$$\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n\in\mathrm{N}}$$
konverguje k nule.

Další krok je odlišný, jde o elementární verzi lemmatu Beppo Levi.

- Jestliže neklesající posloupnost (φ_n) stupňovitých funkcí je taková, že integrály $\int_a^b \varphi_n$ tvoří shora omezenou (a tedy konvergentní) posloupnost, posloupnost funkcí (φ_n) konverguje skoro všude ke konečné limitní funkci f.

Riesz označil C_0 množinu stupňovitých funkcí na konečném intervalu $\langle a, b\rangle$ a definoval třídu C_1 tvořenou funkcemi f, které jsou skoro všude limitami posloupností funkcí z množiny C_0, splňujících předpoklady z elementárního lemmatu Beppo Levi, tj.

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}, \quad \varphi_n \nearrow f, \quad \lim_n \int_a^b \varphi_n$$

existuje vlastní a položil

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b \varphi_n .$$

Pro stupňovité funkce tento postup nevede k nové definici integrálu. Integrál funkce f nezávisí na volbě aproximační posloupnosti (φ_n) a je určen pouze limitní funkcí. (Snadný důkaz lze založit např. na Heine-Borelově lemmatu o pokrytí.) Konečně, uvažujeme-li třídu C_2 tvořenou funkcemi, které jsou diferencemi funkcí z třídy C_1, tj. $h \in C_2$ právě když $h = f - g$, kde $f, g \in C_1$, je integrál funkce z třídy C_2 definován jako rozdíl integrálů, tj.

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g\,.$$

Takto definovaný integrál nezávisí na rozkladu funkce h. Opakování postupu, kdy za výchozí třídu funkcí zvolíme C_2 nevede k rozšíření třídy integrovatelných funkcí. Nakonec, definujeme-li míru, s pomocí integrálu, lze se přesvědčit o ekvivalenci s původní Lebesgueovou teorií.

Jestliže výše zmíněný Rieszův přínos k vybudování alternativní teorie Lebesgueova integrálu je dobře znám a oceňován, existuje v jeho díle, podle mého názoru, pozoruhodný článek, který zůstal bez větší odezvy nebo ohlasu. Historicky vzato, teorie integrálu se rozvíjela ve dvou odlišných směrech, které různé epochy odlišně akcentují; jeden z nich je charakterizován tím, že integrál je chápán jako limita součtů, v druhém pojetí je považován za operaci inverzní k derivování. Ačkoliv již velcí tvůrci infinitezimálního počtu Leibniz a Newton si byli vědomi jejich vzájemných relací, 18. století, včetně Leonarda Eulera, si zvolilo tzv. deskriptivní definici, s níž je integrál určován z primitivní funkce a která je spojována s Newtonovým jménem. Místo termínu „primitivní funkce“ z důvodů, které se stanou zřejmými později, raději však používám pojem „antiderivace“, dnes běžný zejména v americké literatuře. Ke geometrickým ideám se vrátil teprve A. Cauchy, když opustil poněkud vágní Leibnizovu koncepci nekonečně malých veličin a definoval integrál jako limitu konečných sum, přičemž dokázal, že pro spojité funkce definované na kompaktních intervalech oba postupy, tj. jeho i Newtonův, jsou ekvivalentní. Tím zdaleka tento plodný svár neskončil. Nejprve Riemann a později Volterra nalezli jednoduché příklady funkcí, které mají Riemannův a nemají Newtonův integrál a vice versa. Při přechodu k Lebesgueově integrálu se rovněž ukázalo, že dílčí nesoulad s Newtonovou koncepcí trvá. Deskriptivní definici Lebesgueova integrálu lze podat, připustíme-li na jedné straně zobecnění antiderivace, tj. předpokládáme, že základní relace

$$F^{(1)}(t) = f(t)$$

platí pouze skoro všude, a na straně druhé přidáme podstatné omezení a požadujeme, aby derivace byla absolutně spojitá. Jak je dobře známo, dalším významným krokem k „univerzálnější“ koncepci integrálu byl Perronův objev z roku 1912.

Nejprve připomeňme všeobecně známou definici Newtonova integrálu a porovnejme ji s definicí Perronovou.

Předpokládejme, že $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

Newtonova definice

Funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je N-integrovatelná v intervalu (a,b), existuje-li funkce $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že limity $F(a+)$, $F(b-)$ jsou konečné a platí $F^{(1)}(t) = f(t)$ pro všechna $t \in (a,b)$. Klademe

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f = F(b-) - F(a+)\,.$$

Perronova definice

a) Nadfunkce a podfunkce

Spojitou funkci $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, (resp. $G : (a,b) \to \mathbb{R}$) nazveme (Perronovou) nadfunkcí (resp. podfunkcí) k funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, jestliže

(1) existují konečné limity $F(a+)$, $F(b-)$ (resp. $G(a+)$, $G(b-)$);
(2) $\underline{D}F(t) > -\infty$ (resp. $\overline{D}G(t) < +\infty$) pro všechna $t \in (a,b)$;
(3) $\underline{D}F(t) \geq f(t)$ (resp. $\overline{D}G(t) \leq f(t)$) pro všechna $t \in (a,b)$.

Množinu všech nadfunkcí (resp. podfunkcí) k funkci f označíme $O_p(f)$ (resp. $U_p(f)$). Je-li f newtonovsky integrovatelná, zřejmě existuje $F \in O_p(f) \cap U_p(f)$. Symboly $\underline{D}F$ (resp. $\overline{D}F$) značí dolní (resp. horní) Diniovu derivaci.

Pomineme-li několik výlučně technických úvah, lze již vyslovit definici Perronova integrálu.

b) Jestliže $O_p(f) \neq \emptyset \neq U_p(f)$ a platí-li

$$\alpha = \inf\{F(b-) - F(a+) \mid F \in O_p(f)\} = \sup\{G(b-) - G(a+) \mid G \in U_p(f)\} \in \mathbb{R},$$

říkáme, že f je v intervalu (a,b) perronovsky integrovatelná. Číslo α nazveme Perronovým integrálem funkce f a označíme je $(\mathrm{P}) \int_a^b f$.
Přímo z této definice plyne, že když f je newtonovsky integrovatelná, je

$$(\mathrm{N}) \int_a^b f = (\mathrm{P}) \int_a^b f\,.$$

Fréderic Riesz podal definici Lebesgueova integrálu, podle níž tento integrál se jeví alespoň jako vzdálený příbuzný Perronova integrálu. K podobnému činu byl mimořádně dobře připraven, neboť velmi dlouho a úspěšně se zabýval hledáním jednoduchého důkazu Lebesgueovy věty o derivaci monotonní funkce.

V prvém vydání Lebesgueovy monografie z roku 1904 tvrzení o tom, že spojitá monotonní funkce má konečnou derivaci skoro všude, představuje poslední důsledek celé teorie a kniha je jím uzavřena, ačkoliv ani idea integrálu ani obecný pojem míry není pro jeho formulaci potřebná. F. Rieszovi, od mladí přesvědčenému, že k dosažení tohoto výsledku lze vystačit s množinami míry nula, se podařilo v roce 1932 jej dokázat elementárním způsobem, když před tím formoval tzv. lemma „o vycházejícím slunci“, které P. Halmos označil jako největší Rieszův přínos do teorie funkcí reálné proměnné.

Rieszův článek *O Legesgueově integrálu jako inverzní operaci k derivaci* (*Sur l'intégrale de Lebesgue comme l'opération inverse de la dérivation*) byl publikován v Annali di Pisa v roce 1936. V zájmu historické přesnosti uveďme, že shodná verze stati byla o rok dříve vydána maďarsky. Jde však o myšlenky, jimiž se jejich autor zabýval dlouho, neboť již svoji přednášku na světovém matematickém kongresu v Curychu v roce 1932 zakončil ubezpečením, že nové odvětví analýzy započaté H. Lebesguem *vůbec nevyžaduje, abychom změnili tradiční pořadí paragrafů; bude dokonce výhodné začínat diferenciálním počtem.*

O citovaném Rieszově článku z roku 1936 se zmiňuje S. Saks ve druhém vydání Teorie integrálu z r. 1939 a Riesz sám se k němu dosti podrobně vrátil ve své přednášce v Paříži v roce 1949. Avšak s výjimkou knihy Asplunda a Bungarta *A First Course in Integration* vydané v New Yorku r. 1966, kde je podán na pěti stránkách ucelený, nicméně velmi stručný přehled základních myšlenek, není mi znám žádný další pokus o jejich popularizaci. Ostatně je to právě citovaná monografie, která mne přivedla k původnímu zdroji; kdybychom parafrázovali Marcela Prousta, jde o Riesze znovunalezeného. Poněvadž Rieszovým cílem bylo vytvořit teorii Lebesgueova, tj. absolutně konvergentního, integrálu, výchozí definice se týká integrace nezáporných funkcí.

Označme V^+ množinu všech neklesajících, omezených reálných funkcí definovaných na celé reálné ose. Poznamenejme, že pro funkci $F \in V^+$ zřejmě existují konečné limity

$$F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t), \quad F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F(t).$$

Nezápornou funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *integrovatelnou*, jestliže existuje omezená, neklesající funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že $F^{(1)} = f$ skoro všude.

Integrál z funkce f je definován formulí

$$\int_{\mathbb{R}} f = \inf\{F(+\infty) - F(-\infty) \mid F \in V^+, F^{(1)} = f \text{ skoro všude}\}.$$

Následující lemma je východiskem k rozvinutí teorie.

Lemma: Jestliže k nezáporné funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje $H \in V^+$ taková, že $H^{(1)} \geq f$, potom množina $\mathcal{F}(f)$ všech funkcí $F \in V^+$, $F^{(1)} \geq f$ skoro všude, $F(-\infty) = 0$, obsahuje nejmenší prvek $F \in \mathcal{F}(f)$, tj.

$$F = \inf\{\tilde{F} \mid \tilde{F} \in \mathcal{F}(f)\} \in \mathcal{F}(f).$$

Nadto, $H - F \in V^+$.

Důkaz lemmatu je založen na Lebesgueově větě o derivaci monotonní funkce a na jejím přímém důsledku, který je znám jako malá Fubiniova věta, podle níž lze konvergentní řadu nezáporných funkcí derivovat skoro všude, a to člen po členu. Lemma umožňuje vyjádřit integrál z nezáporné (integrovatelné) funkce pohodlnějším způsobem:

Věta: Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nezáporná integrovatelná funkce. Potom existuje $F \in V^+$ taková, že $F^{(1)} = f$ skoro všude a zároveň

$$\int_{\mathbb{R}} f = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Každou funkci $F \in V^+$ s těmito vlastnostmi nazveme *primitivní funkcí* k funkci f a je-li $F_0 \in V^+$ nějaká primitivní funkce k f, je $F - F_0$ konstantní zobrazení.

Přímým důsledkem „extremální“ vlastnosti primitivní funkce je její spojitost. Tak lze konstatovat, že již od počátku jsme se mohli omezit na spojité funkce patřící do V^+. (Znalci teorie Lebesgueova integrálu již určitě pochopili, o co v Rieszově definici běží a že je za ní skryta dobře známá, netriviální věta: každá neklesající spojitá funkce F může být vyjádřena jako součet dvou neklesajících funkcí, tj.

$$F = G + H,$$

kde G je absolutně spojitá a H je „singulární“, tj. spojitá a skoro všude vyhovující podmínce $H^{(1)} = 0$. Studentovi to nutně zůstane utajeno, avšak idea, že z antiderivací vybírám právě tu, která má na každém intervalu minimální přírůstek je dostatečně intuitivní a ke zmíněné větě lze dospět značně později).

Další kroky jsou zcela tradiční. Snadno se dokáže, že když nezáporné funkce f a g jsou integrovatelné, pak také λf, $\lambda \geq 0$ a $f + g$ jsou integrovatelné, přičemž

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}} f, \quad \int_{\mathbb{R}} (f+g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

Jestliže F a G jsou primitivními funkcemi k f a g, pak λF, $F + G$ jsou primitivní k λf, $f + g$ a tato tvrzení umožňují definovat *integrovatelnou* funkci jako rozdíl dvou nezáporných integrovatelných funkcí.

Je-li $f = f_1 - f_2$, kde $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ jsou integrovatelné, klademe

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2.$$

Primitivní funkce k f je pak rozdílem primitivních funkcí k f_1 a f_2.

Definujeme-li (jako obvykle) funkci f^+, f^-

$$f^+ = \sup\{f, 0\}, \quad f^- = \sup\{-f, 0\},$$

je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrovatelná, právě když jsou integrovatelné funkce f^+, f^-. Je-li f integrovatelná, je také integrovatelná absolutní hodnota

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Primitivní funkce F_1, F_2 odpovídající integrovatelné funkci f se liší o konstantu.

Cílem této stati není detailní rozvíjení Rieszovy teorie, a tak pouze upozorním na některé zajímavé momenty. S pomocí zvoleného postupu se velmi snadno dokáže tvrzení, které je v tradičním přístupu interpretováno jako invariance Lebesgueovy míry vůči translaci.

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ označme $t_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkci

$$t_\lambda(s) = s + \lambda, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrovatelná, potom také složená funkce $f \circ t_\lambda$ je integrovatelná a je

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f \circ t_\lambda .$$

Jedním z důležitých kroků, který umožňuje geometrickou interpretaci integrálu, je ukázat, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, charakteristická funkce $\chi_{(a,b)}$ otevřeného invervalu (a, b) je integrovatelná a že je

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)} = b - a .$$

Důkaz tohoto elementárního tvrzení je poněkud delší, než by takové trivialitě mělo odpovídat. Je to dáno celkovou změnou perspektivy. Naopak jiná tvrzení, jako třeba věta o tom, že derivace $f^{(1)}$ funkce $f \in V^+$ je integrovatelná, jsou pouhými důsledky definice, stejně jako nerovnost

$$\int_{\mathbb{R}} f^{(1)} \leq f(+\infty) - f(-\infty) .$$

Snadný je rovněž důkaz, že funkci f integrovatelnou na konečném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ lze aproximovat posloupností stupňovitých funkcí a tvrzení platí dokonce v následující podobě:

Je-li f integrovatelná na (a, b), existuje posloupnost $(\varphi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ stupňovitých funkcí taková, že $f = \lim_n \varphi_n$ skoro všude na (a, b), přičemž

$$\int_a^b f = \int_a^b \varphi_n ,$$

tj. integrály z aproximujících funkcí tvoří stacionární posloupnost. Rieszova metodika s primitivními funkcemi se také s výhodou uplatní při důkazu věty o monotonní konvergenci spojované se jménem italského matematika Beppo Levi.

Závěr

V posledních letech, zejména v souvislosti s úspěšnou unifikující Kurzweilovou teorii neabsolutně konvergentních integrálů, došlo k oživení zájmu o problematiku integrace funkcí jedné reálné proměnné a tím zároveň o jednotlivé dílčí typy integrálů a o vztahy mezi nimi. Z tohoto hlediska Rieszova definice Lebesgueova integrálu může být alespoň historicky zajímavá, neboť od samého počátku akcentuje vztahy mezi integrálem a derivací.

Rieszův článek z r. 1936 vzbudil jen malou pozornost, trendy v teorii integrálu mířily jinam. I když připustíme, že jde spíše o kabinetní, jemně cizelovaný, křehký bibelot, myslím, že má právo, jak to pro dobré básně a jejich tvůrce požadoval František Halas:

... *být i kýmsi čten a pochválen na světlou památku.*

Paul Halmos to řekl v próze:

Riesz pozoruhodně obohatil matematiku novými větami i novými důkazy a zdokonalováním objevů jiných. S jasnozřivým důrazem odkázal následujícím generacím etalon matematické jasnosti a prostoty, a to je pravděpodobně stejně cenné jako jeho věty a důkazy.

Díváme-li se tedy na analyzovaný článek v tomto světle, pak je jednou z rysek na zmíněném etalonu.

LITERATURA

1. Riesz Frigyes, *Összegyüjtött munkái*, (Oeuvres complètes), I, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960.