Karel Žitný; Igor Zolotarev

Tíží projektivní geometrii nesnesitelné břemeno dějin?

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v 19. století. Sborník přednášek z 15. letní školy Historie matematiky, Vyškov, 26.-30.8.1994. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. pp. 88–110.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400570

JAKOB STEINER

(1796 – 1863)

TÍŽÍ PROJEKTIVNÍ GEOMETRII NESNESITELNÉ BŘEMENO DĚJIN ?

Karel Žitný, Igor Zolotarev

1. Úvod

K názvu přednášky nás přivedla četba Ivana Svitáka [?]; našemu záměru by však posloužila rovněž parafráze názvu Kroutvorových esejů [?]. Přestože využijeme, případně zneužijeme politických, literárních nebo dokonce teologických narážek, jeden z podnětů, který nabízí novější česká literatura, pomineme. Jan Křen název své knihy [?] ukončil otazníkem.

Nepokoušíme se o nástin historie projektivní geometrie, její případná bílá místa jsou mimo náš zájem. Jde nám o dílčí vizualizaci procesu, v němž dochází k neustálému přeceňování či spíše k trvalé devalvaci zdánlivě neotřesitelných (matematických) poznatků: „fundamentální“ věty, jimiž se bylo možné pyšnit, mění se v nepodstatné důsledky nebo, jak neváhal napsat Jean Dieudonné ([?], str. 8), jim může hrozit osud, že se stanou pouhými hračkami pro budoucí školáky. Samozřejmě, tyto jevy nejsou zcela jednosměrné a neodehrávají se jen v ideové rovině. Matematické produkty vedle intelektuálních nebo estetických kvalit mají zpravidla nezanedbatelnou užitnou hodnotu. Pokles nebo vzestup poptávky po „aplikovatelných“ výsledcích vede dříve nebo později k hluboké proměně přilehlých matematických disciplín.

V roce 1931 vyšlo druhé, jen zčásti přepracované vydání monumentální knihy K. Petra [?] o integrálním počtu (do tisku připravené o sedm let dříve); o rok později publikoval J. Vojtěch ještě objemnější kompendium [?] věnované projektivní geometrii. Letmé srovnání obou děl může být podnětem k formulaci vstupní „svitákovské“ otázky. Petrova kniha (1. vydání vyšlo 1915) je mile starosvětská. Množství konkrétní látky (např. o eliptických integrálech) z ní činí užitečný zdroj informací.

Prof. Vojtěch byl mistrný pedagog, avšak jeho kniha je pouze archivním materiálem; zájemci o dějiny matematiky v ní najdou historické komentáře, obsáhlá bibliografie umožňuje orientaci v pramenech. Matematické ideje z ní lze jen pracně exhumovat; jsou zasuty pod zastaralou terminologií, jakoby určenou úzkému kruhu kabalistů.

A. Shenitzer [?] srovnal historii projektivní geometrie s Popelčiným osudem. Geometři minulého věku ji však spíše považovali za „Říši středu“. Tyto imperiální ambice nepokrytě proklamoval veliký matematik viktoriánské éry, Arthur Cayley (1821–1895):

> „Projective geometry is all geometry.“ ([?], str. 639)

Když René Descartes na příkladech rovinných křivek ukázal, že geometrické problémy lze řešit algebraickými metodami, založil tím odvětví geometrie, které spolu s infinitesimálním počtem určilo vývoj matematiky až do konce 18. století. Syntetická geometrie dovedená ke značné dokonalosti Eukleidem a Apolloniem byla tím ponenáhlu zatlačována do pozadí.

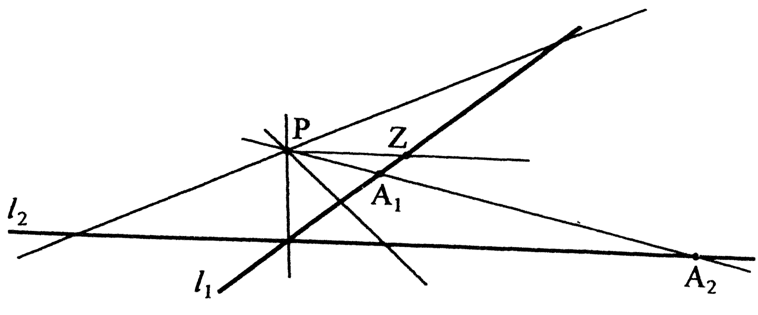
Na samém konci 18. století, kdy Gaspard Monge (1746–1818), jeden ze zakladatelů l'Ecole Polytéchnique, vytvořil deskriptivní geometrii jako technicky užitečný zobrazovací postup, došlo k obnovení zájmu o syntetické metody. Po porážce Napoleonovy armády v Rusku její inženýr a poté válečný zajatec Jean-Victor Poncelet v letech 1813-14 položil v Saratově základy k projektivní geometrii; starší výsledky Desarguesovy a Pascalovy byly tehdy téměř zcela zapomenuty.

Lyonský architekt Desargues dva roky po vydání Descartovy „Rozpravy“ napsal originální, avšak konfusní výklad o konických řezech. Množství bizarních termínů, jak svědčí i Descartesův dopis Desarguesovi, odrazovalo od čtení. Opis Desargueova dílka byl znovu získán až roku 1845, kdy jej v antikvariátě zakoupil Michel Chasles. Šestnáctiletý Pascal svoje výsledky publikoval roku 1640 ve formě krátkého oznámení na způsob dnešních posterů.

Středové promítání (centrální projekce) je klíčovým pojmem projektivní geometrie.

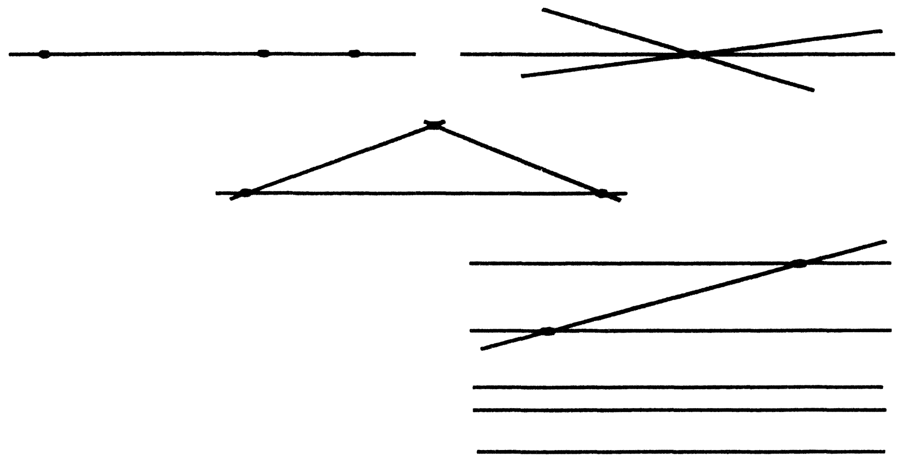
Příklad 1.

V rovině uvažujme přímky l_1, l_2 a bod P, který neleží na žádné z nich. Středovým průmětem bodu A_1 na přímku l_2 nazveme (pokud existuje) bod A_2, v němž spojnice bodů P a A_1 protíná l_2. Na l_2 lze promítnout všechny body přímky l_1 s výjimkou bodu Z ležícího na přímce procházejícího P a rovnoběžné s l_2.



Obr. 1

Matematika, jak známo, nemiluje výjimky. Nadto se zde setkáváme s proslulou obsesí, jíž u starých geometrů vyvolávaly rovnoběžné přímky. Existence přímek bez společného bodu (průsečíku) znamená také, že v rovinné geometrii body a přímky nelze zaměňovat.



Obr. 2

Tři různé body v rovině buď leží na jedné přímce, nebo tvoří (nedegenerovaný) trojúhelník.

Tři různé přímky v rovině buď se protínají v jednom bodě, nebo tvoří (nedegenerovaný) trojúhelník, pokud dvě z nich, případně všechny tři nejsou rovnoběžné.

K tomu, aby při centrální projekci z bodu P existoval obraz přímky l_1, stačí „obohatit" přímku l_2 o jediný bod. K této klíčové ideji se přiblížili renesanční výtvarníci, na jejichž obrazech se paralelní linie sbíhají do tzv. „mizejícího bodu na horizontě". Jestliže tedy v rovině uvažujeme množinu přímek rovnoběžných s danou přímkou, měl by jim být přiřazen tentýž „nevlastní" bod — jejich společný „průsečík". Centrální projekce patří k našemu smyslovému vnímání. Obraz vnějšího světa zprostředkovaný monokulárním viděním je výsledkem centrální projekce, reliéfní vidění vzniká ze srovnání dvou centrálních projekcí.

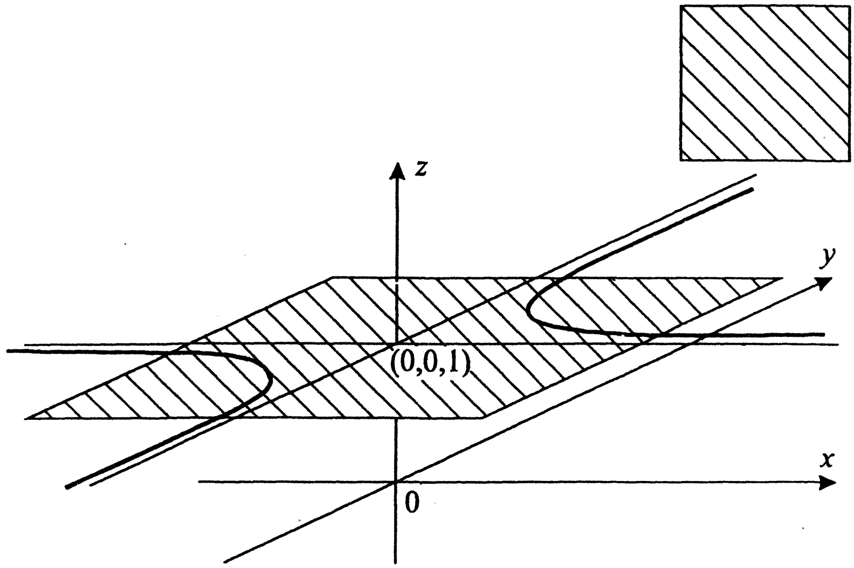
Příklad 2.

Jestliže a, b, c, d, e, f jsou reálné konstanty, pak mohou být množiny bodů $(x, y) \in R^2$, které vyhovují rovnici

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

interpretovány jako:

elipsa,	dvojice rovnoběžných přímek,	bod,
hyperbola,	dvojice různoběžných přímek,	prázdná množina,
parabola,	„dvojná" přímka,	celá rovina R.



Obr. 3

Jednotící pohled na kuželosečky lze získat, použijeme-li centrální projekci. Ověřme to v dílčím případě.

V $\mathbf{R}^3$ uvažujme rovinu $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z = 1\}$, hyperbolu $xy = 1$, $z = 1$, a centrální projekci z počátku souřadnic. Promítající paprsek jdoucí bodem hyperboly protne rovinu, na níž promítáme, v bodě $(u,v,w) = t(x,y,1), t \in \mathbf{R}$. Obrazem v rovině $w = 2$ je „větší" hyperbola

$$uv = t^2xy = t^2 = 4.$$

„Stín" vržený na rovinu $u = 2$ bude částí paraboly, neboť $tx = 2$, $ty = v$, $t = w$ a tedy $2v = t^2xy = w^2$. Použijeme-li za průmětnu rovinu $u + v = 4$, potom $u(4-u) = uv = t^2xy = t^2 = w^2$, neboli $(u-2)^2 + w^2 = 4$.

2. Reálná projektivní rovina

„Credo, ut intelligam"
sv. Anselm, biskup z Canterbury (1033-1109)

Budiž F reálný lineární prostor, $\dim F = 2$, $x \in F$. Je-li $A = (f_1, f_2)$ bází v F, pak $x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$; čísla α_1, α_2 nazýváme souřadnicemi vektoru (= bodu) x v bázi A .

První krok k projektivní geometrii vypadá absurdně: bodu $x \in F$ o souřadnicích (α_1, α_2) přiřadíme lineární podprostor generovaný v $\mathbf{R}^3$ vektorem $\tilde{x} = (\alpha_1, \alpha_2, 1)$; vektorové přímce $D = \mathbf{R}z$, kde $z \in F$ je nenulový vektor se souřadnicemi (β_1, β_2), přiřadíme lineární podprostor generovaný vektorem $(\beta_1, \beta_2, 0)$.

Tvůrcům projektivní geometrie, kteří uvažovali odlišným způsobem, se zdálo přirozené doplnit rovinu F „nevlastními“ neboli „nekonečně vzdálenými“ body. Takto vzniklou množinu $\tilde{F}$ nazvali projektivním doplněním roviny F. Ačkoliv naivní představa připouští, že podél vektorové přímky se můžeme pohybovat ke dvěma „protilehlým nekonečně vzdáleným“ bodům, vektorové přímce v F je přiřazen jediný nevlastní (podle výstižného názvu E.Čecha úběžný) bod. Zjevnou nevýhodou takového přímého přístupu je, že nevlastní body se zdají být velmi odlišnými objekty.

Úvahám o „doplnění“ roviny „nevlastními“ body se lze vyhnout, když projektivní rozšíření $\tilde{F}$ ztotožníme s množinou jednorozměrných lineárních podprostorů v $\mathbf{R}^3$, tj. bodem $\tilde{F}$ nazveme vektorovou přímku v $\mathbf{R}^3$; je-li generována nenulovým vektorem $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$, je rovněž generována vektorem $(\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \lambda\beta_3)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Čísla $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ nazýváme *homogenními souřadnicemi bodu* z $\tilde{F}$; jsou určena až na nenulovou multiplikativní konstantu. Je-li $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{R}^3$ nenulový vektor, pro homogenní souřadnice bodu $\tilde{x} \in \tilde{F}$ použijeme výmluvný tradiční symbol

$$(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$$

naznačující eliminaci multiplikativní konstanty.

Homogenní souřadnice zavedl roku 1827 A.F. Möbius. K dalšímu rozvinutí této techniky, která umožnila zacházet s nevlastními prvky, později přispěl J. Plücker. Počátkem našeho století publikoval W. Killing, jeden z největších matematiků tehdejší doby, obsáhlou učebnici analytické geometrie v homogenních souřadnicích [9].

Je-li D afinní přímkou v F, existuje nenulový lineární funkcionál φ' a číslo $\alpha \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\varphi' x = \alpha, \ x \in F \Leftrightarrow x \in D,$$

neboli $x \in D$ právě když jeho souřadnice (α_1, α_2) vyhovují rovnici

$$\delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2 + \delta_3 = 0,$$

v níž alespoň jedno z čísel δ_1, δ_2 je nenulové.

Bodu $x \in D$ odpovídá bod $\tilde{x} \in \tilde{F}$ s homogenními souřadnicemi $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$. Jelikož $\beta_3 \neq 0$ a $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_3}$, $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_3}$, je $\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \delta_3\beta_3 = 0$.

Naopak, jestliže bod $\tilde{x}$ s homogenními souřadnicemi $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ vyhovuje rovnici

$$\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \delta_3\beta_3 = 0, \ \delta_1^2 + \delta_2^2 > 0$$

a $\beta_3 \neq 0$, pak bod $x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, kde $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_3}, \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_3}$, leží na přímce D.

Předpokládáme-li, že $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 \neq 0$, vyhovují rovnici

$$\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \delta_3\beta_3 = 0,$$

nevlastní body o homogenních souřadnicích $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$, $\beta_3 = 0$; množinu těchto bodů nazveme *nevlastní přímkou* v $\tilde{F}$.

Ryze formálně, nenulová uspořádaná trojice reálných čísel v kulaté závorce $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ udává homogenní souřadnice bodu v projektivní rovině a nenulová trojice reálných čísel v „obrácené" kulaté závorce $)\delta_1 : \delta_2 : \delta_3($ určuje homogenní souřadnice projektivní přímky $\tilde{D}$ v projektivní rovině.

Bod $\tilde{x}$ je incidentní s přímkou $\tilde{D}$ s homogenními souřadnicemi $)\delta_1 : \delta_2 : \delta_3($ „a vice versa", jestliže

$$\delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \delta_3\beta_3 = 0.$$

V projektivní geometrii jsou body a přímky rovnoprávné — odpovídají jednorozměrným lineárním podprostorům v $\mathbf{R}^3$, tj. „trsu" přímek v R^3 procházejících počátkem. To není nezajímavý objekt, pochyby může vzbuzovat metoda s jejíž pomocí jej studujeme.

Následující věta zní rozumně; jsme ji dokonce ochotni považovat za samozřejmou.

Věta $\mathbf{A_1}$

Jestliže $\tilde{v}, \tilde{w}$ jsou různé body projektivní roviny $\tilde{F}$, existuje jediná projektivní přímka $\tilde{D}$ s nimi incidentní.

Důkaz:

Jsou-li $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$, resp. $(\beta_1 : \beta_2 : \beta_3)$ homogenní souřadnice bodů $\tilde{v}$, resp. $\tilde{w}$, existuje nenulový vektor $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3$ takový, že

$$\begin{aligned} \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3 &= 0, \\ \xi_1\beta_1 + \xi_2\beta_2 + \xi_3\beta_3 &= 0. \end{aligned}$$

(Řádkové matice $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ reprezentují lineárně nezávislé funkcionály $\varphi_1', \varphi_2' \in (\mathbf{R}^3)'$. Z Grassmannova vztahu plyne, že

$$4 = \dim N(\varphi_1') + \dim N(\varphi_2') = \dim(N(\varphi_1') + N(\varphi_2')) + \dim(N(\varphi_1') \cap N(\varphi_2')),$$

kde $N(\varphi_j')$ označuje jádro funkcionálu φ_j', j = 1,2. Jelikož $\dim(N(\varphi_1')+N(\varphi_2')) \leq$ ≤ 3, je $\dim(N(\varphi_1'))\cap N(\varphi_2')) \geq 1$. Na druhé straně, $\dim(N(\varphi_1')\cap N(\varphi_2')) \leq$ $\leq \dim N(\varphi_1') = 2$. Případ $\dim(N(\varphi_1') \cap N(\varphi_2')) = 2$ nenastane, neboť φ_1', φ_2' jsou lineárně nezávislé.)

Předchozí úvahy stěží mohou vzbudit zájem o projektivní geometrii; jedinou motivací je zatím vědomí, že se jí zabývalo nemálo vynikajících matematiků. Zde je na místě odvolat se na motto převzaté od sv. Anselma.

Tvrzení, které se honosí názvem *malý princip duality*, je bezprostředním důsledkem definice:

> Jestliže platí tvrzení týkající se přímek, bodů a vztahů incidence mezi nimi, platí také tvrzení, které z něho vznikne zaměníme-li slova „přímka" a „bod", pokud zachováme incidenci.

Z věty $\mathbf{A_1}$ okamžitě obdržíme duální větu $\mathbf{A_2}$.

Věta $\mathbf{A_2}$

K dvěma různým projektivním přímkám $\tilde{D}_1$ a $\tilde{D}_2$ existuje jediný bod $\tilde{x} \in \tilde{F}$ s nimi incidentní.

Důkaz:

Jestliže $)\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3($ resp. $)\beta_1 : \beta_2 : \beta_3($ jsou homogenní souřadnice $\tilde{D}_1$ a $\tilde{D}_2$, existuje nenulový vektor $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3$ takový, že

$$\begin{aligned} \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 &= 0, \\ \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož každé řešení je tvaru $\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \lambda \in \mathbf{R}$, existuje právě jeden bod $\tilde{x}$ s homogenními souřadnicemi $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ incidentní v přímkami $\tilde{D}_1$ a $\tilde{D}_2$.

Neformálně řečeno, dvě různé projektivní přímky se protínají právě v jednom bodě, neboli v projektivní rovině nejsou rovnoběžné přímky. Nevlastní přímka se neodlišuje od ostatních přímek.

Věta „dvěma různými body prochází jediná přímka“ je duální k tvrzení „dvě různé přímky se protínají v jediném bodě“.

Princip duality poprvé formuloval J.V. Poncelet (1788–1867) v knize „Traité des propriétés projectives des figures“ vydané r. 1822. Pro usnadnění přechodu k obecné definici je užitečné si uvědomit, že od samého počátku jsme mohli předpokládat, že vektorová rovina F leží v reálném lineárním prostoru E, $\dim E = 3$.

Doplníme-li bázi (e_1, e_2) roviny F na bázi (e_1, e_2, e_3) lineárního prostoru E, přiřadíme bodu $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in F$ lineární podprostor v E generovaný vektorem $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + e_3$ a vektorovou přímku generovanou v F nenulovým vektorem $z = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ ztotožníme s nevlastním bodem.

V teorii kuželoseček se zavedení homogenních souřadnic projeví tím, že od rovnice

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

přejdeme k homogenní rovnici

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2 = 0,$$

v jejíž levé straně je snadné rozpoznat kvadratickou formu s maticí

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}b & c & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & f \end{bmatrix}$$

Tuto symetrickou matici zredukujeme na diagonální tvar

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

a po provedení lineární transformace souřadnic lze výchozí rovnici psát ve tvaru

$$\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2 = 0,$$

kde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ jsou reálná čísla. Nalézt její řešení je snadné.

Uvažujme případ $\lambda_1 > \lambda_2 > 0 > \lambda_3$. Potom

$$\left(\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}\right)^2 \alpha_1^2 + \left(\sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}\right)^2 \alpha_2^2 = \alpha_3^2$$

a body $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ leží na kuželové ploše. Zjednodušení dané zavedením homogenních souřadnic spočívá v tom, že od studia rovinných řezů kuželových jsme přešli ke kuželovým plochám.

Poncelet a jeho následovníci budovali geometrii na syntetických úvahách bez výpočtů. Vážným logickým problémem bylo, že východiskem zůstávaly metrické pojmy — délka a úhel. Významného pokroku v oddělení projektivní a elementární geometrie docílil G.K.Ch. von Staudt (1798–1867), který v roce 1847 publikoval knihu „Geometrie der Lage“. Jeho nejvýznamnější dílo „Beiträge zur Geometrie der Lage“ vyšlo ve třech sešitech v letech 1856–60. „Princip zachování algebraických identit“ rozšířením tělesa reálných do tělesa komplexních čísel vedl v geometrii k formulaci nazývané „princip kontinuity“. Ve snaze nezkreslit tradiční hledisko a zachovat archaický styl ocitujeme L. Seiferta ([10], str. 6):

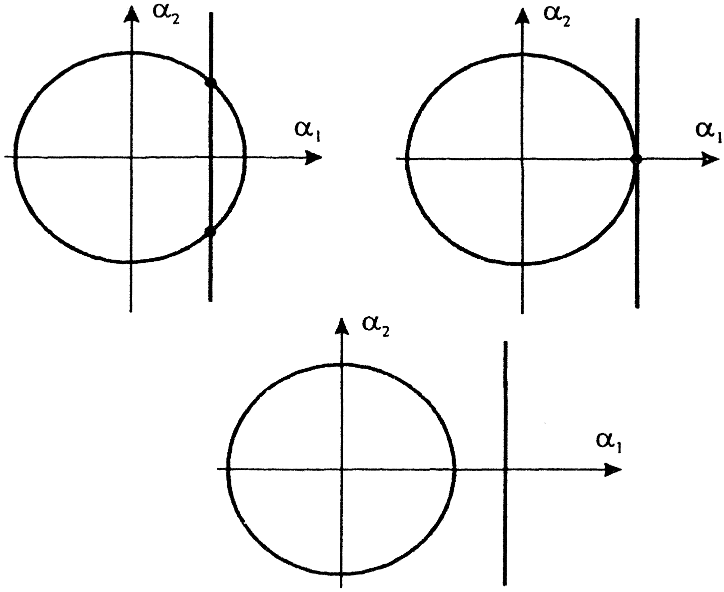
„Povstává-li jeden obrazec z jiného spojitou změnou a je-li právě tak obecný jako onen, lze vlastnosti na jednom dokázané přenésti na druhý. Vlastnost taková nemůže zmizeti a jsme oprávněni z případu, kde jisté elementy skutečně jsou, souditi na případ, kdy některé elementy jsou ideální (t.j. imaginární)“.

Příklad 3.

Uvažujme množinu bodů $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ takových, že

$$\alpha_1 = p \qquad \text{a} \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \qquad p \in \mathbf{R},$$

tj. vyšetřujme incidenci přímky a kružnice. Množina je prázdná, když $p^2 > 1$. Připustíme-li, že α_1, α_2 nabývají komplexních hodnot, tj. $\mathbf{R}^2$ nahradíme $\mathbf{C}^2$, je množina řešení neprázdná pro jakékoliv reálné číslo p.



Obr. 4

Před rokem 1950 se drtivá většina knih věnovaných, jak se říkávalo, „vyšší geometrii" vytrvale přidržovala „principu kontinuity" a důsledek popisovala asi takto:

> pokud přímka a kružnice mají dva společné body, spojitou změnou, např. posouváním přímky, lze docílit, že body splynou a poté se změní v imaginární průsečíky.

(Uveďme jednu vážnou výhradu: přejdeme-li od $\mathbf{R}^2$ k $\mathbf{C}^2$, není množina $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$, na rozdíl od „reálné" kružnice kompaktní.)

Von Staudt vynaložil enormní úsilí na geometrické zavedení imaginárních prvků, aby syntetické projektivní geometrii zjednal tutéž obecnost, jakou mohou mít analytické výsledky. Do značné míry to bylo neplodné úsilí; zdá se, že v tomto směru syntetická teorie narazila na „přirozenou hranici" možností. Staudtovy práce byly obtížně srozumitelné; lze vysledovat řadu seriózních pokusů o jejich výklad. Imaginární prvky činily překvapivě dlouho potíže také analytické teorii. Zřetelné rozlišování mezi reálným (lineárním nebo projektivním) prostorem a jeho komplexifikací bylo opomíjeno zhruba do roku 1950, ač soustavně vedlo k nedorozuměním nebo chybám. Důvody pro to byly, jak se domníváme, spíše psychologické než věcné; komplexifikace je pouhopouhým opakováním konstrukce, která vede od reálných čísel ke komplexním. Dodnes někteří autoři elementárních textů nejprve definují reálné lineární prostory a teprve později připouštějí těleso komplexních čísel. Když významný geometr M.M. Postnikov ([11], lekce 20) při studiu kuželoseček přechází ke komplexifikaci (nazývá ji reálně — komplexní rovinou), snaží se podrobným výkladem, z něhož lze vycítit omluvný tón, čtenáře smířit s dílčí ztrátou názornosti.

Lze si tedy představit jakou potíž, zejména v období vzestupu projektivní geometrie, muselo obdobné opuštění „realistické estetiky" znamenat. Dlouhou dobu žila ve společné domácnosti s deskriptivní geometrií, té udržovala vědecký make-up a jejím prostřednictvím vstupovala do mnoha dnes již zapomenutých aplikací v technických oborech. Od Desarguesových dob projektivní geometrie objasňovala zásady perspektivního zobrazování, které byly považovány za opěrný sloup realistického malířství.

Zavedení imaginárních prvků však bylo mimořádným pokrokem. Jean-Pierre Demailly je charakterizoval při převzetí Dannie-Heinemannovy ceny (v Göttingen, 15. 11. 1991) těmito slovy:

> „So, in some sense, it became more or less clear to geometers around 1850 that a nice theory could only be made on what we now call in modern language „compact complex manifolds" that is, generalized surfaces of arbitrary dimension, on which coordinates are allowed to take imaginary values, including points at infinity" ([12], str. 52).

3. Definice projektivního prostoru

> *Ačkoliv pojem projektivního prostoru dávno ztratil své někdejší dominující postavení, je stále ještě bezesporu jedním z nejvýznamnějších geometrických pojmů.*
>
> Ed. Čech ([14], str. 12)

Pojem centrální projekce je spojen s představou „trsu přímek" jdoucích daným bodem a může být motivací pro přijetí abstraktní (bourbakistické) definice projektivního prostoru.

Je-li E lineární prostor, značíme symbolem E_0 množinu nenulových vektorů patřících do E, tj. $E_0 = E \setminus \{0\}$.

Definice

Nechť $E \neq \{0\}$ je lineární prostor (nad tělesem Λ). Nenulové vektory $x, y \in$ $\in E$ nazveme *ekvivalentními* právě když existuje nenulový skalár $\lambda \in \Lambda$ takový, že $y = \lambda x$.

Třídou ekvivalence obsahující nenulový vektor x je množina

$$\Lambda_0 \, x, \qquad \text{kde} \qquad \Lambda_0 = \Lambda \setminus \{0\}.$$

Projektivním prostorem $P(E)$ (přiřazeným k E) nazveme množinu tříd ekvivalentních vektorů.

Ztotožníme-li $\Lambda_0 \, x$ s $\Lambda \, x$, lze jej chápat jako množinu jednorozměrných lineárních podprostorů.

„Přirozené" zobrazení $\pi : E_0 \to P(E)$, $\pi(x) = \Lambda_0 x$, $x \in E_0$, je *surjektivní* a reprezentantem bodu $p \in P(E)$ nazveme vektor $x \in E_0$ takový, že $p = \pi(x)$.

Uvažujeme-li jednorozměrné podprostory, přirozeně „ztrácíme" jeden rozměr. Je-li lineární prostor E konečné dimenze $n + 1$, $n \in \mathbf{Z}^+$, dimenzí $P(E)$ nazveme celé číslo

$$\dim P(E) = -1 + \dim E = n \geq 0.$$

Definice $P(E)$ je „zatížena" výchozím lineárním prostorem.

A.J. Kostrikin a J.I. Manin ([13], str. 220) mají pro ni velmi srozumitelnou apologetiku:

> „Afinní prostory se získají z lineárních tím, že zapomeneme na počátek souřadnic. Projektivní prostory lze vytvořit z lineárních aspoň dvěma způsoby.
>
> a) K afinnímu prostoru připojíme nekonečně vzdálené body.
>
> b) Projektivní prostor je realizován jako množina přímek v lineárním prostoru.
>
> Za základní definici vybíráme b): jasnějším způsobem poukazuje na homogenitu projektivního prostoru."

Druhý svazek Čechovy knihy „Základy analytické geometrie" (vydané v r. 1952) patřil mezi prvá díla, v nichž byl projektivní prostor definován obdobným způsobem. Svoje krédo E. Čech vyjádřil takto:

> „Místo dvojí řeči, geometrické a algebraické a místo překládání z jedné řeči do druhé jsem se snažil o úplnou identifikaci geometrických a algebraických pojmů" ([14], str. 5).

Toto krédo nebylo zcela naplněno, některé přístupy se dnes jeví jako hybridní a nedůsledné. Vysokou kvalitu a modernost Čechova kompendia, zejména část věnovanou projektivní geometrii, přesto plně oceníme, porovnáme-li je s tehdejšími standardními učebnicemi.

O přetváření projektivní geometrie do uceleného systému se mimořádně zasloužili J. Steiner (1796–1863) a M. Chasles (1793–1880), který byl po dlouhá léta vůdčím představitelem francouzské geometrické školy. V jeho pracech zůstávalo mnoho intuitivních představ. Koncem století jeho přístupy kritizoval E. Study, který oprávněně tvrdil, že exaktnost v geometrii nemusí být neustále chápána jako něco podřadného. Zestárlý Chasles se také proslavil jako oběť podvodu: v letech 1861–1870 nakoupil množství padělaných dopisů, které údajně napsali Pascal, Platón nebo dokonce Jidáš Iškariotský. Jeho kniha [17] z roku 1837, přeložená do němčiny (1839), ruštiny (1871) a jejíž 3. francouzské vydání je z roku 1889, však zůstává důležitým milníkem v historiografii geometrie.

Švýcar Jacob Steiner, od roku 1834 profesor na berlínské universitě, byl bezesporu svéráznou postavou. Byl krajně předpojat proti metodám algebry nebo dokonce analýzy. Podle jeho mínění je ryzí geometrie založena na usilovném přemýšlení, které nelze nahradit počítáním. V pracech často neuváděl důkazy a přestože přispěl k teorii ploch, odmítal obrazce.

Extrémní jednostranné postoje, pokud je zastávají skutečné tvůrčí osobnosti, nejsou proměňovány v neosobní závaznou doktrínu, dodávají jim kolorit a styl. Jejich nebezpečí se objeví u napodobitelů. Velké a plodné omyly se potom stávají chybami. Přestože projektivní geometrie až do konce století prožije svoji heroickou éru, zdá se, že již v gründerské epoše se vytvářejí některé předpoklady k tomu, aby se přinejmenším její část změnila ve skorouzavřený systém, obtížně komunikující s ostatními matematickými disciplínami. Jsme znovu v nebezpečí politických příměrů; Ivan Sviták nás vystavuje pokušení vypůjčit si od něho další titul. Jedna z jeho prací [22] se jmenuje „Veliký skluz".

Desarguesovu větu o trojúhelnících uveřejnil poprvé Abraham Bosse r. 1648 a v rámci synteticky pojaté prostorové projektivní geometrie ji dokázal von Staudt. K překvapivému výsledku dospěl F. Klein, když zjistil, že neplyne z postulátů rovinné projektivní geometrie; existují totiž rovinné geometrie, jejichž axiomy splňují požadavky incidence a v nichž neplatí Desarguesova věta. Na jednoduchém příkladě to ukázal r. 1902 R.F. Moulton.

Zvolená definice projektivního prostoru nenaznačuje existenci „nevlastních" bodů a přímek, které je nutno připojit, abychom např. „obvyklou" rovinu přetvořili v projektivní. Cena, jíž za to platíme, je v tom, že projektivní „body", „přímky", atp. se nepodobají útvarům, jež obvykle za body a přímky považujeme. Podmnožinu $\Delta \subset P(E)$ nazveme *projektivní přímkou*, existuje-li vektorová rovina G (tj. dvojrozměrný lineární podprostor) v E takový, že $\pi(G_0) = \Delta$. Připomeňme, že $G_0 = G\setminus\{0\}$ a že symbolem π označujeme přirozené zobrazení.

Jestliže $p = \pi(x)$, $q = \pi(y)$ jsou *různé* body projektivního prostoru $P(E)$, pak vektory $x, y \in E_0$ jsou lineárně nezávislé (jinak $p = q$) a lineárnímu podprostoru G generovanému vektory x a y odpovídá projektivní přímka „jdoucí body p a q":

$$\langle p, q\rangle = \{\pi(\lambda x + \mu y) \mid (\lambda, \mu) \in \Lambda^2,\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}.$$

Věta (Girard Desargues, 1648)

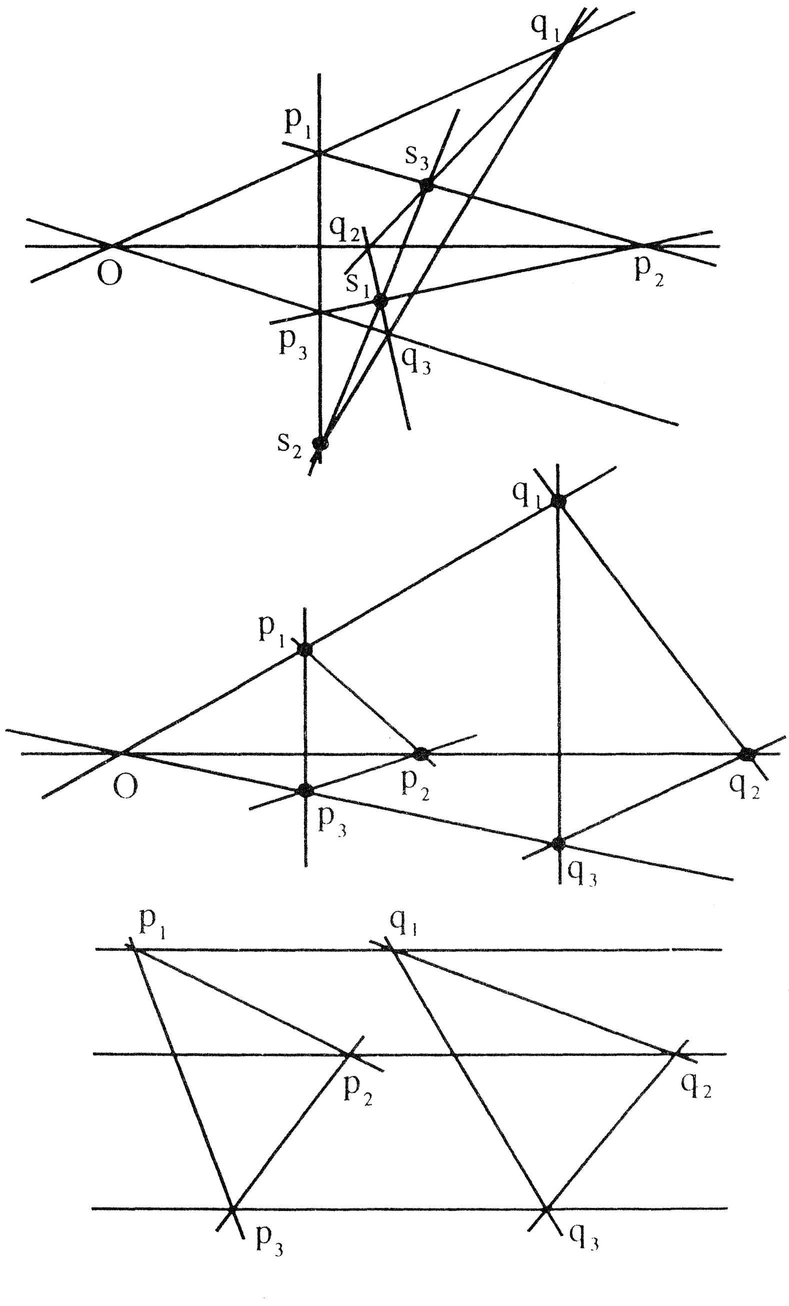
Nechť je v $P(E)$ dáno šest navzájem různých bodů $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$. Předpokládejme, že projektivní přímky

$$\langle p_1, q_1\rangle, \langle p_2, q_2\rangle, \langle p_3, q_3\rangle$$

procházejí právě jedním bodem různým od šesti daných bodů. Potom pro každou dvojici indexů $j, k \in 1, 2, 3, j \neq k$, se přímky

$$\langle p_j, p_k\rangle, \langle q_j, q_k\rangle$$

protínají v jediném bodě s_l, jehož index je takový, že $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ a body s_1, s_2, s_3 leží na jedné přímce.



Obr. 5

Důkaz:

Nechť $p_k = \pi(x_k), q_k = \pi(y_k), x_k, y_k \in E_0, k = 1, 2, 3$. Poněvadž se přímky protínají, existují $\alpha_k, \beta_k \in \Lambda_0, k = 1, 2, 3$ tak, že

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3 y_3.$$

Položíme-li $u_k = \alpha_k x_k, v_k = \beta_k y_k$, pak $p_k = \pi(u_k), q_k = \pi(v_k)$, $k = 1, 2, 3$ a $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = u_3 + v_3$.

Je-li $w_1 = u_2 - u_3 = -(v_2 - v_3), w_2 = u_1 - u_3 = -(v_1 - v_3)$, $w_3 = u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)$, potom

$$s_l = \pi(w_l) \in \langle p_j, p_k \rangle \cap \langle q_j, q_k \rangle,$$

kde $\{j, k, l\} = \{1, 2, 3\}$ leží na projektivní přímce, neboť $w_1 + w_3 - w_2 = 0$.

Kdyby Poncelet nepřipsal větu Desarguesovi, nazývali bychom ji pravděpodobně Pappusovým jménem. Pappus koncem 3. stol. po Kr. napsal poslední významné dílo vzniklé v alexandrijské matematické škole. Jeho „Sbírka“ (řecky Synagoge) pravděpodobně měla sloužit jako pomůcka při četbě původních děl. Obsahuje komentáře, obměny důkazů a vět. V mnoha případech představuje jediný zdroj informací o řecké geometrii v období pozdního helenismu.

Ačkoliv tradiční synteticky pojaté učebnice hýří obrázky, je nemožné vizualisovat projektivní rovinu „obvyklým“ způsobem.

Následující citáty udivují názorovou pluralitou. Henri Poincaré v duchu karteziánského racionalismu soudil:

> „on dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur les figures mal faites“.

J. von Neumann byl shovívavější. Několik málo obrázků v „Continuous Geometry“ (Princeton Univ. Press, 1960) komentoval slovy:

> „The reader is asked to remember that these pictures are of value only heuristically ...“.

Algebraický geometr W.E. Jenner [27] se jeví jako hedonik:

> „... the pictures are interesting and pleasant just to look at. The purpose of algebra definitely is not tot take all the joy out of life“.

Ernest Duporcq, autor útlé knížky z přelomu století, která patří mezi ta starší díla, která stojí za to, aby byla ještě čtena (vysoké ocenění jejích kvalit lze nalézt v [29], str. 146)), soudí

> „Quant aux figures, nous les avons peu multipliées, nou conform aut ait ainsi aus idées de Chasles lui-meme, et convaincu que des netaticus convenablement choisies permettent généralement de suivre une démonstration mieux qu'une fugure qui détourne forcément l'attention“ ([27], str. VII).

4. Dualita v projektivních prostorech

Je-li F vektorová nadrovina v lineárním prostoru E, nazýváme projektivní prostor $P(F)$ projektivní nadrovinou v $P(E)$. Otázka, zda projektivní nadroviny tvoří projektivní prostor, je přirozená: pro $E = \Lambda^3$ jsou projektivními nadrovinami přímky, jež lze, stejně jako body, charakterisovat trojicemi homogenních souřadnic.

Symbolem E' označme duální prostor k E tvořený lineárními funkcionály $\varphi' : E \to \Lambda$ a definujeme $P(E')$; nenulový funkcionál $\varphi' \in E'$ určuje bod $p' = \Lambda_0\, \varphi'$ v $P(E')$ a $\pi' : E'_0 \to P(E')$, $\varphi' \longmapsto \Lambda_0\, \varphi'$ je přirozené zobrazení. Bodu $p' = \pi'(\varphi')$ je tedy přiřazena vektorová nadrovina $F = N(\varphi')$. Naopak, vektorová nadrovina $F \subset E$ určuje bod $p' \in P(E')$, neboť jí odpovídá lineární podprostor v E' generovaný nenulovým funkcionálem $\varphi' \in E'$, $N(\varphi') = F$.

Označíme-li H množinu projektivních nadrovin v $P(E)$, je zobrazení

$$\delta : P(E') \to H, \quad p' = \pi'(\varphi') \longmapsto P(N(\varphi'))$$

bijektivní a vlastnosti projektivního prostoru $P(E')$ lze přenést na množinu H.

Toto prosté pozorování je východiskem k tzv. *principu duality*, jenž patřil k nejvýznamnějším výsledkům, jichž dosáhla projektivní geometrie v první třetině 19. století.

Trvalo dosti dlouho, než se stalo zřejmým, že pojem duality má podstatně širší dosah. Není omezen, jak se domníval Poncelet, především nebo dokonce výlučně na teorii *kvadrik* (tj. na symetrické bilineární formy).

Dualita mezi body a přímkami v projektivní rovině vedla ke kontraverzi již v třicátých letech minulého století. J.D. Gergonne (1771–1859), který hájil širší, méně restriktní koncepci duality, byl pouhým kapitánem artilerie; Poncelet stál v čele l'Ecole Polytechnique a tak ve Francii převážilo, alespoň dočasně, jeho hledisko.

Na druhé straně, jelikož šlo o syntetický přístup a neexistoval odpovídající algebraický aparát, bylo obtížné rozpoznat dosah nového pojmu.

Mezi prvními, kdo jej široce využíval, byl J. Steiner (1769–1863). Od něho pochází (zlo)zvyk psát věty do dvou sloupců: do levého v základní formulaci, do pravého v duálním tvaru.

Z počáteční zcela oprávněné fascinace dualitou se vyvinul její kult spíše než kultivace. Epigoni velkých mistrů, podobni tibetským lámům s modlícími mlýnky začali, mnohdy bez hlubšího důvodu, používat princip duality jako mechanický nástroj k rozmnožování vět.

Hlubokou proměnou projde pojem duality až zhruba po sto letech. Jeho okázalý comeback se uskuteční ve funkcionální analýze. Stačí připomenout geometricky obsažné poznatky o reflexivních prostorech.

Vynikající anglo-americký básník T.S. Eliot se v eseji „Tradice a individuální talent“ ([8], str. 10–12) zabývá poezií, ale jeho pronikavé soudy mají daleko širší dosah. „Kdyby jediná forma tradice či předávání spočívala v tom, že budeme ve všem následovat generaci bezprostředně nás předcházející a slepě či bázlivě lpět na jejich úspěších, pak bychom každého měli před „tradicí rozhodně varovat … Tradice je záležitost mnohem širšího významu. Nelze ji zdědit, a chcete-li ji mít, musíte si ji získat usilovnou prací... Historické vědomí znamená schopnost vnímat nejen minulost minulosti, ale také její přítomnost." (Přeložil M. Hilský.)

Jestliže historický komentář přerušujeme čistě matematickými poznámkami, vůbec nám nejde o elementární mikrokurs. Chceme pouze učinit zcela zřejmým následující konstatování ([4], str. 184): to, co se kdysi nazývalo „projektivní geometrií", obdržíme, když přeložíme některá tvrzení z lineární algebry do jiné terminologie. V dalších úvahách zpravidla předpokládáme, že lineární prostory nad tělesem reálných nebo komplexních čísel mají konečné (nenulové) dimenze. Zdůrazněme však, že nám jde výlučně o elementární případy a že nehodláme bagatelizovat fakt, že mnohé úvahy ztratí triviální charakter, připustíme-li, že lineární prostory (nebo okruhy) jsou definovány nad libovolným tělesem.

5. Projektivní grupa

Přijatá definice projektivního prostoru má další výhodu; přirozeným způsobem vede k projektivní obdobě lineárního zobrazení.

Jestliže E a F jsou lineární prostory (nad tělesem Λ), značíme symbolem $L(E,F)$ (resp. $GL(E,F)$) lineární prostor všech homomorfismů (resp. isomorfismů) z E do F. Jestliže $E = F$, pak místo $L(E,E)$ (resp. $GL(E,E)$) píšeme $L(E)$ (resp. $GL(E)$). Prvek $T \in L(E,F)$ nazýváme též lineárním operátorem; symbol $N(T)$ značí jeho jádro, tj. množinu $\{x \in E \mid Tx = 0\}$.

Jestliže $\pi_E : E_0 \to P(E)$, $\pi_F : F_0 \to P(F)$ jsou přirozená zobrazení, přiřadíme operátoru $T \in L(E,F)$ zobrazení $P(T)$ s definičním oborem $P(E) \setminus P(N(T))$, s oborem hodnot ležícím v $P(F)$ a dané předpisem

$$p(T)\pi_E(x) = \pi_F(Tx), \quad x \in E \setminus N(T).$$

Zobrazení $P(T)$ není definováno na $P(N(T))$, neboť pouze nenulový vektor Tx definuje bod v $P(F)$.

Definice je korektní: jestliže $\pi_E(x) = \pi_E(x_1)$ pro $x, x_1 \in E \setminus N(T)$, pak $x_1 = \lambda x$, $\lambda \in \Lambda_0$ a $\pi_F(Tx) = \pi_F(\lambda T x_1) = \pi_F(Tx_1)$.

Zobrazení $g = P(T)$, kde $T \in GL(E,F)$, nazýváme (v souladu s M. Chaslesem) *homografií*; ve starší německé, ruské a české literatuře se užíval Möbiův termín *kolineace*.

Pro $E = F$ je zřejmé, že $PGL(E) = \{P(T) \mid T \in GL(E)\}$ tvoří (multiplikativní) grupu.

Snadno se ukáže, že $P(T) = P(S)$ právě když $S = \lambda T$, $\lambda \in \Lambda_0$. To znamená, že grupa $PGL(E)$ homografií projektivního prostoru $P(E)$ je izomorfní s faktorgrupou $GL(E)/H_0(E)$, kde $H_0(E) = \{\lambda I \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ je invariantní podgrupa homotetií.

Další transfer lineárně algebraických pojmů do jazyka projektivní geometrie je snadný.

1. Je-li $T \in L(E)$ a $g = P(T)$, nazveme prvek $m \in P(E)$ *pevným bodem* (projektivního) zobrazení g, jestliže $g(m) = m$. Pevný bod je jednoznačně

určen vlastním vektorem *nenulového* vlastního čísla operátoru T. Jestliže $P(T)m = m$, kde $m = \pi(x)$, $x \in F_0$, tj. platí-li $P(T)\pi(x) = \pi(Tx) = \pi(x)$, je zřejmé, že $Tx = \lambda x$, $\lambda \in \Lambda_0$. Naopak, jestliže $Tx = \lambda x$, kde $x \in E_0$ a $\lambda \in \Lambda_0$, pak $P(T)\pi(x) = \pi(Tx) = \pi(\lambda x) = \pi(x)$.

2. V projektivní grupě $PGL(\mathbf{C}^2)$ lze homografie různé od identického zobrazení klasifikovat podle počtu pevných bodů. Autoři starších učebnic projektivní geometrie tomu přikládali důležitost, ač jde o triviální poznatek. Vskutku, buď má $T \in GL(\mathbf{C}^2)$ dvě různá (nenulová) vlastní čísla a homografie $P(T)$ má dva pevné body, nebo připouští pouze jedno vlastní číslo $\lambda \in \mathbf{C}_0$. Potom buď $T = \lambda I$ (a $P(T)$ je identickým zobrazením) nebo $\dim N(\lambda I - T) = 1$ a homografie má jediný pevný bod.

3. Velmi přirozeně lze také zavést některá „projektivní" zobrazení. Nechť $\dim E \geq 2$. Jestliže $T \in GL(E)$, $T \neq I$ a platí-li $Th = h$ pro všechna h patřící do vektorové nadroviny $H \subset E$, zobrazení $P(T) : P(E) \to P(E)$ se nazývalo *perspektivou.*

4. Je-li E lineární prostor konečné dimenze, potom $\dim E' = \dim E$ a $GL(E, E') \neq \{0\}$. *Korelací* je nazývána „projektivizace" $P(T)$ zobrazení $T \in GL(E, E')$; lze ji chápat jako zobrazení, které bodu projektivního prostoru $P(E)$ přiřazuje nadrovinu. Tradičně (např. [6], str. 254) byla korelace definována jako lineární transformace, jež převádí body a přímky jedné projektivní roviny na přímky a body (v tomto pořadí) v jiné rovině. Tento pohled připouštěl zajímavá zobecnění; L. Cremona studoval bijekce mezi projektivními rovinami, jež přímkám přiřazují křivky n-tého stupně. Cremonu lze mít za zakladatele italské školy projektivní geometrie. Italská škola ovlivňovala řadu českých geometrů; ve dvacátých letech s ní byl v kontaktu E. Čech, který spolupracoval s G. Fubinim. Svědčí o tom průkopnické dílo z projektivní diferenciální geometrie [19].

5. „Le caractère arbitraire et disparate des définitions des trois coniques m'avait choqué dès mes années d'études an Lyceé". Henri Lebesgue ([28], str. 1).

   Od poloviny 17. století byly nejpozoruhodnější výsledky dosažené v syntetické projektivní geometrii spojeny s teorií kuželoseček.

   Nechť ω je symetrická bilineární forma na E a q její kvadratická forma (tj. $q(x) = \omega(x, x)$ pro všechna $x \in E$). *Projektivní hyperkvadrikou* S_q přiřazenou ke q nazýváme množinu $\{\pi_E(x) \mid x \in E,\ q(x) = 0\} \subset P(E)$.

   Body $a, b \in P(E)$ jsou *konjugované* vzhledem k S_q, jestliže $\omega(x, x) = 0$ pro $x, y \in E$ takové, že $a = \pi(x), b = \pi(y)$.

   Nedegenerovaná symetrická forma ω indukuje izomorfismus $L_\omega : E \to E'$, jemuž přiřadíme projektivní zobrazení $P(L_\omega)$ prostoru $P(E)$ na $P(E')$.

   Projektivní nadrovina $P(N(L_\omega x))$ se v tradiční terminologii nazývala *polárou* a bod $p = \pi_E(x)$ jejím *pólem*; je-li $p \in S_q$, místo o poláře se hovořilo o *tečné* nadrovině s bodem *dotyku* p.

S detailním studiem „polárních“ vlastností kuželoseček začal Poncelet r. 1829.

Příklad 4.

Nechť E je komplexní lineární prostor, $\dim E = 3$. Je-li $\omega : E \times E \to \mathbf{C}$ symetrická bilineární forma, předpokládejme, že $\dim R(L_\omega) = r \geq 1$. Potom v E existuje báze $A = (f_1, f_2, f_3)$ taková, že

$$\omega(f_j, f_k) = 0,\ j \neq k,\ j, k \in \{1, 2, 3\}$$

a

$$\omega(f_j, f_j) = 1,\ 1 \leq j \leq r,\ \omega(f_j, f_j) = 0,\ r < j \leq 3.$$

Pro

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3,\ \alpha_j \in C$$

obdržíme

$$q(x) = \omega(x, x) = \varepsilon_1 \alpha_1^2 + \varepsilon_2 \alpha_2^2 + \varepsilon_3 \alpha_3^2,$$

kde $\varepsilon_j = \omega(f_j, f_j)$, $j = 1, 2, 3$.

Tím jsme dospěli ke klasifikaci kvadratických forem:

$$\begin{array}{c|ccc} r & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 & = & 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & = & 0 \\ \alpha_1^2 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \pm i\alpha_2 \\ \alpha_1 & = & 0\,, \end{array}$$

a snadno můžeme utřídit i odpovídající projektivní hyperkvadriky S_q.

Předchozím výkladem jsme chtěli připomenout fakt, že soudobým východiskem ke studiu projektivní geometrie (stejně jako dalších obecnějších geometrií) je lineární algebra. Přitom k vytvoření dostatečně bohaté geometrické teorie vystačíme se skromným vybavením. Obdobná univerzálnost spojená s jednoduchostí není vlastní klasickému systému axiomů Eukleida a Hilberta, jejich modifikacím pro účely projektivní geometrie, ani přístupu založeném na Erlangenském programu Felixe Kleina. Nadto systém axiomů, který vychází z lineární algebry, je mimořádně vhodný k zacházení s konkrétními geometrickými objekty včetně jejich numerické nebo počítačové „realizace“. Základní poznatky z projektivní geometrie se nezměnily, pouze jim připisujeme jinou hodnotu a dospíváme k nim odlišnými metodami.

V axiomatických systémech, které jsou založeny na pojmu lineárního prostoru, jsou reálná čísla (nebo jiná tělesa skalárů) považována za *známý* objekt. Jinak je tomu s tradičními axiomatickými systémy, které vycházejí z Hilbertovy axiomatizace eukleidovské geometrie.

V tomto případě, zhruba a nepřesně řečeno, systém axiomů rovinné geometrie v sobě zahrnuje „geometrický“ popis vlastností reálných čísel. Tím je dáno, že je nepříjemně složitý. Elegantní axiomatizaci afinních rovin založenou na incidenčních vlastnostech a na existenci „dostatečně“ mnoha automorfismů vytvořil Emil Artin [33]. Moderně pojatou souběžnou prezentaci axiomatiky projektivní a afinní roviny lze nalézt např. v učebnici P. Samuela [29].

Americký matematik Morris Kline, známý pracemi o filozofických problémech matematiky a úvahami o místě matematiky v dějinách západní civilisace, přispěl v roce 1956 do Newmanovy antologie [30] matematicko-historických textů statí o projektivní geometrii. Je to nadšená chvála jejích předností, ale konkrétní argumenty nevybočují z dřevní tradice — projektivní rovina, Desarguesova věta, kuželosečky, čímž hodně pozbývají na průkaznosti.

„Nesnesitelnou tíži dějin" nelze vždy považovat za pouhé klišé žurnalistiky. Václav Hlavatý, významný odborník na geometrické problémy spojené s teorií relativity, napsal za druhé světové války až příliš objemnou, tradičně pojatou a spíše neúspěšnou knihu [21]. Nicméně, v 1. díle (str. 9) neváhal deklarovat:

> „Při práci setkal jsem se s obtíží tam, kde jsem toho nejméně očekával, totiž v terminologii. Je nutno, abych o této věci promluvil, neboť jinak bych mohl býti podezírán z touhy po „novotářství" za každou cenu ... v prvé řadě jsou v české literatuře vžity názvy pro některé pojmy projektivní geometrie, které jsou zastaralé a nevystihují podstatu pojmu, který vyjadřují".

V Čechách byl od dob bratří Ed. a Em. Weyrů akcentován syntetický přístup; práce Jarolímkova [31] nebo Vojtěchova [6] byly alespoň zčásti zastaralé již v době vydání a tak by bylo možné bagatelizovat Hlavatého postřeh jako pouhé konstatování lokálního stavu. (Obdobné vyjádření o archaické terminologii lze také nalézt v Čechově knize [14]; anachronními termíny trpí i jinak zdařilá knížka K. Havlíčka [35].)

H. Busemann a P.J. Kelly v roce 1952 v předmluvě ke knize [23] napsali:

> „The present book differs widely in content, methods, and point of view from traditional presentations of the subject. To a great extent, this departure is due to the changed attitude of contemporary, in particular America, mathematicians toward geometry".

Podotkněme, že takto uvedené dílo je napsáno, srovnáme-li se současně publikovanou Čechovou knihou [14], v konzervativním duchu. Pokračujme v citaci:

> „Although relluctantly geometers must admit that the beauty of synthetic geometry has lost its appeal for the new generation. The reasons are clear: not so long ago synthetic geometry was the only field in which the reasoning proceeded strictly from axioms, whereas this appeal - so fundamental to many mathematically interested people - is now made by many other fields".

Toto bezpochyby cenné pozorování postihuje závažný důvod nesmírné prestiže projektivní geometrie v 19. století. Zároveň naznačuje, proč byla zbavena kouzla výlučnosti, když na l'Ecole Polytechnique vystřídal Ponceleta fiktivní generál Bourbaki. Další část předmluvy lze považovat za umírněnou kritiku „splendid isolation", na níž si někteří zaslepení obdivovatelé projektivní geometrie přímo zakládali:

„By using coordinates from the beginning and alternating between geometric and algebraic or analytic arguments we hoped to produce the often sadly lacking ability to pass from the algebraic to the geometric language and conversely. Rather that avoiding any admixture of fields, methods from other branches were used whenever they seemed more effective or provided a natural approach... The overall aim was to counteract the impression of geometry as an isolated and static subject, and to present its methods and essential content as part of modern mathematics."

Zřetelným svědectvím o přílišném akcentování historického přístupu jsou také četné reedice knih. Busemann a Kelly (str. III) doporučují četbu knihy Th. Reye [25], která vyšla ještě znova r. 1923, Coxeterova kniha [18] je vydávána od r. 1949, Jefimovova kniha [34] byla v roce 1971 publikována popáté.

Pomineme-li již citovanou knihu E. Čecha [14], které se bohužel nedostalo širší mezinárodní publicity, jsou pokusy o moderní výklad projektivní geometrie z 80. let. Jde přitom o práce různého zaměření a úrovně. Mimořádně kvalitním dílem je kniha [29] francouzského algebraického geometra Pierra Samuela vydaná poprvé r. 1986, která zcela jednoznačně akcentuje teorii projektivních kvadrik a chápe ji jako konkrétní úvod do algebraické geometrie. Výklad mnohých témat posvěcených tradicí je velmi stručný a oproštěný od nepodstatných detailů; lze to ilustrovat na Pascalově větě (str. 69–70); její změně v Brianchonovu větu (str. 116) jsou věnovány čtyři řádky! Ještě výraznější redukce se týkají pasáží o projektivních zobrazeních. K témuž závěru dospějeme i nahlédnutím do knihy J. Lelong-Ferrandové [20].

Na citovaných dílech se lze snadno přesvědčit, že aggiornamento projektivní geometrie nebylo snadným procesem. Nejsilněji se tlak tradice (např. v terminologii) projevuje v Schaalově knize [32] určené pro výuku na technických univerzitách.

Historikovi matematiky vývoj projektivní geometrie a její výuky poskytuje fascinující a zároveň obtížné téma; může pojednat o její „velikosti a bídě", neboť v málokteré matematické disciplíně se tak rychle rozevřela opravdu hluboká propast mezi její „modernistickou" a „dogmaticky staromódní" (nebo přímo zmrtvující) interpretací. To je nepopiratelná evidence, lze ji datovat a popsat, ale podstatně zajímavějším je shledávat důvody a příčiny, které k ní vedly. Obtížnost tématu tkví v tom, že k závěrům a hodnocením lze dospět kritickou a pronikavou analýzou pramenů neustále konfrontovanou se soudobým stavem. Jen tak je možné vysledovat vývojové trendy a rozlišit jejich komplikované stezky od množství mnohdy lákavých, leč více či méně slepých odboček.

Literatura

[1] Sviták, I. - *Nesnesitelné břemeno dějin.* Orbis. Praha 1990

[2] Kroutvor, J. - *Potíže s dějinami.* Eseje. Prostor, Praha 1990

[3] Křen, J. - *Bílá místa v našich dějinách.* Lidové noviny, Praha 1990

[4] Dieudonné, J. - *Algebre linéaire et géométrie élémentaire. 3-ieme édition.* Hermann, Paris 1968

[5] Petr, K. - *Počet integrální. 2. vyd.* JČMF, Praha 1931

[6] Vojtěch, J. - *Geometrie projektivní.* JČMF, Praha 1932

[7] Shenitzer, A. - *The Cinderella Career of Projective Geometry.* The Math. Intelligencer, vol. 13, No 2. 1991

[8] Eliot, T.S. - *O básnictví a básnících.* Odeon, Praha 1991

[9] Killing, W. - *Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten: 1, 2.* 1901, 1902

[10] Seifert, L. - *Imaginární elementy v geometrii.* Přírodověd. vydavatelství, Praha 1950

[11] Postnikov, M.M. - *Analitičeskaja geometrija. Lekcii po geometrii, semestr 1: 2. izd.* Nauka, Moskva 1986

[12] Demailly, J.P. - *Analytic techniques of complex geometry.* Jahrbuch der Akad. der Wissenschaften in Göttingen, 1992

[13] Kostrikin, A.I., Manin Ju.I. - *Linejnaja algebra i geometrija: 2. izd.* Nauka, Moskva 1986

[14] Čech, E. - *Základy analytické geometrie II.* Přírodověd. vydavatelství, Praha 1952

[15] Veblen O., Young, J.W. - *Projective geometry.* Vol.1, 1910, Vol.2, 1918

[16] Steiner, J. - *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.* Berlin, 1832

[17] Chasles, M. - *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géomeétrie.* 1837

[18] Coxeter, H.S.M. - *Projective Geometry.* Blaisdell Publ. Comp., N.Y. 1964

[19] Fubini, G., Čech, E. - *Geometria proiectiva differenziale T.1,2.* Bologna, N. Zanichelli, 1926,1927

[20] Lelong-Ferrand, J. - *Les fondements de la géométrie.* PUF, Paris, 1989

[21] Hlavatý, V. - *Díl I. Útvary jednoparametrické, díl II. Útvary dvojparametrické.* Melantrich, Praha 1944, 1945

[22] Sviták, I. - *Veliký skluz (Dobrovolná sovětisace 1938–1948).* Orbis, Praha 1990

[23] Busemann, H., Kelly, P.J. - *Projective Geometry and Projective Meties.* Academic Press, N.Y. 1953

[24] Poncelet, J.V. - *Traité des propriétés projectives des figures.* Paris 1822

[25] Reye, Th. - *Die Geometrie der Lage.* 1866

[26] Jenner, W.E. - *Rudiments of Algebraic Geometry.* Oxford Univ. Press, 1963

[27] Duporcq, E. - *Premiers principes de géométrie moderne.* Gauthier-Villars, Paris, 1938

[28] Lebesgue, H. - *Les coniques.* Gauthier-Villars, Paris 1942

[29] Samuel, P. - *Géométrie projective.* Paris, PUF, 1986

[30] Newman, J.R. - *The World of mathematics: a small library of the literature of mathematics from Ah-mose the scribe to Albert Einstein.* Redmond, Wash.: Tempus Books, 1988

[31] Jarolímek, V. - *Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru.* Praha, 1908-1918

[32] Schaal, H. - *Lineare Algebra and Analytische Geometrie II.* Stuttgaart, 1991

[33] Artin, E. - *Geometrical Algebra.* Interscience Publishers, N.Y. 1957

[34] Jefimov, N.V. - *Vysšaja geometrija.* Nauka, Moskva 1978

[35] Havlíček, K. - *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.* SNTL, Praha 1956

[36] Dowart, H.L. - *The Geometry of Incidence.* Prentice-Hall, Inc. Engllewood Cliffs, N.Y. 1966