Jarník's note of the lecture course Punktmengen und reelle Funktionen by P. S. Aleksandrov (Göttingen 1928)

Alexandrov, Punktmengen und reelle Funktionen.

Göttingen, Sommersemester 1928.

Wir werden meistens auf der Geraden der reellen Zahlen arbeiten; dennoch **1**
ist für uns eine tiefere Einsicht wünschenswert, welche Eigenschaften der reellen Geraden für uns massgebend sind.

Wir betrachten einen metrischen Raum, d. h. eine Menge R, wo eine **1.1**
Distanz $\varrho(x, y)$ für jedes $x \in R$, $y \in R$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\varrho(x, y)$ ist eine nicht negative Zahl, die dann und nur dann verschwindet, wenn $y = x$
2.) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
3.) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$[1].

Ein solcher Raum heisst vollständig, wenn man zu ihm keinen Punkt ξ hinzufügen kann, so dass die Menge $R + \xi$ zu einem metrischen Raum gemacht werden kann, wo ξ nicht isoliert und die alte Metrik von R in der neuen Metrik von $R + \xi$ enthalten wäre.

Man kann einen vollständigen Raum noch anders definieren:

Eine Folge $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ in R heisst Fundamentalfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\nu(\varepsilon)$ gibt, so dass $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $\min(n, m) > \nu(\varepsilon)$.

Jede konvergente Folge ist offenbar eine Fundamentalfolge. Aber nicht notwendig umgekehrt. Und wir definieren:

Ein metrischer Raum heisst vollständig, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergiert.

Wir müssen beweisen, dass die beiden Definitionen umfangsgleich sind.

Beweis:

1.) Es sei in R jede Fundamentalfolge konvergent. Wäre ξ ein Punkt, so dass man $R + \xi$ zu einem metrischen Raum machen kann, wo in R die alte Metrik gilt und ξ nicht isoliert ist, so würde es eine Punktfolge $x_1, x_2, \ldots$ aus R geben, die gegen ξ konvergiert; also wäre diese Folge eine Fundamentalfolge in $R + \xi$, also auch in R, die aber in R divergent wäre – Widerspruch.

[1] Dadurch ist Häufungspunkt, Limes, abgeschlossene, offene Mengen und Umgebungen in R auf die übliche Weise definiert.

2.) Es gebe in R eine divergente Fundamentalfolge $x_1, x_2, \ldots$.

Ich führe einen idealen Punkt ξ folgendermassen ein: wenn $z \in R$, so sei $\varrho(z, \xi) = \lim \varrho(z, x_m)$. (Das existiert, wegen

$$\varrho(z, x_n) - \varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(z, x_m) \leq \varrho(z, x_n) + \varrho(x_m, x_n).)$$

Eine Folge $y_1, y_2, \ldots$ heisse <u>konfinal</u> mit der Fundamentalfolge $x_1, x_2, \ldots$, wenn auch die Folge $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ fundamental ist. Die Beziehung „konfinal" ist symmetrisch, reflexiv und transitiv; daher zerfallen sämtliche Fundamentalfolgen in R in Bündel konfinaler Folgen.

Es ist $\lim \varrho(z, x_n) = \lim \varrho(z, y_n)$, wenn $\{y_n\}$ zu $\{x_n\}$ konfinal ist.

Die Dreiecksungleichung gilt offenbar auch in $R + \xi$ und es ist $\varrho(z, \xi) > 0$ für $z \in R$: denn sonst wäre $\varrho(z, x_n) \to 0$, also $z = \lim x_n$.

Es besteht nun der Satz: Jeden metrischen Raum R kann man so zu einem vollständigen Raum R' ergänzen, dass R in R' überall dicht ist.

Denn man definiere zu jedem Bündel konfinaler divergenter Fundamentafolgen in R einen idealen Punkt ξ durch

$$\varrho(z, \xi) = \lim \varrho(z, x_n)$$

und man definiere $\varrho(\xi_1, \xi_2) = \lim \varrho(x_{1,n}, x_{2,n})$, wo $\{x_{1,n}\}$, $\{x_{2,n}\}$ zwei Fundamentalfolgen sind, durch welche ξ_1, ξ_2 definiert sind.

Und man sieht zugleich, dass diese Ergänzung nur auf eine Weise durchführbar ist (Vollständige Hülle – Hausdorff).

– – –

Man kann in demselben Raum verschiedene Metriken einführen, so dass jede konvergente Folge wieder in eine konvergente Folge übergeht und umgekehrt (d. h. die topologischen Eigenschaften bleiben erhalten).

Dabei braucht aber ein vollständiger Raum nicht in einen vollständigen überzugehen. Man nennt einen Raum „topologisch vollständig", wenn es eine solche Metrik gibt, bei welcher die Konvergenz und Divergenz jeder Folge erhalten bleibt und [und] bei welcher der Raum vollständig wird.

(Z. B. das Intervall $(0, 1)$ bei der üblichen Metrik ist nicht vollständig; man kann es aber umkehrbar stetig auf $(-\infty, +\infty)$ abbilden, so dass es vollständig wird.)

Ein metrischer Raum ist genau dann in jeder Metrik, die Konvergenz und Divergenz von Folgen erhält, vollständig, wenn er kompakt[2] ist. (Tychonov–Niemycki)

[2] D. h. wenn jede Folge mindestens einen Häufungspunkt hat.

Nulldimensionale Räume. **1.2**

Ein Raum $\mathcal{M}$ heisst nulldimensional, wenn er zu jedem $\varepsilon > 0$ als Summe von endlich oder abzählbar vielen Teilmengen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ betrachtet werden kann, wo

1.) $D(\mathcal{M}_k) < \varepsilon \quad (D(A) = \text{Durchmesser von } A)$
2.) $\mathcal{M}_k$ relativ offen in $\mathcal{M}$
3.) $\mathcal{M}_i\mathcal{M}_j = 0$ für $i \neq j$.

Eine Umgebung eines Punktes ξ von $\mathcal{M}$ in bezug auf die Menge $\mathcal{M}$ ist eine in $\mathcal{M}$ offene Teilmenge von $\mathcal{M}$, die ξ enthält.

Die in der Definition von Nulldimensionalität auftretenden $\mathcal{M}_k$ sind auch abgeschlossen in $\mathcal{M}$; denn

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_k + (\mathcal{M}_1 + \cdots + \mathcal{M}_{k-1} + \mathcal{M}_{k+1} + \dots) \\ &= \mathcal{M}_k + \mathcal{R}_k, \quad \mathcal{R}_k \text{ ist offen,}\end{aligned}$$

also $\mathcal{M}_k$ abgeschlossen in $\mathcal{M}$.

Eine Umgebungsbasis eines Raumes $\mathcal{M}$ ist ein System von in $\mathcal{M}$ offenen Mengen, so dass es zu jedem $P \in \mathcal{M}$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge A des Systems gibt mit

$$D(A) < \varepsilon, \quad P \in A.$$

Eine Teilmenge einer nulldimensionalen Menge ist offenbar wieder Nulldimensional. (Denn es sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$; dann ist

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_1\mathcal{N} + \mathcal{M}_2\mathcal{N} + \dots,$$

$$\mathcal{M}_i\mathcal{N} \cdot \mathcal{M}_j\mathcal{N} = 0, \quad \mathcal{M}_i\mathcal{N} \text{ offen in } \mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{N}.)$$

Eine nulldimensionale Menge besitzt eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis

$$\mathcal{U}_1,\ \mathcal{U}_2,\ \dots,$$

die folgende Eigenschaften hat:

1.) Für $i \neq j$ ist entweder

$$\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_j \quad \text{oder} \quad \mathcal{U}_i \supset \mathcal{U}_j \quad \text{oder} \quad \mathcal{U}_i\mathcal{U}_j = 0$$

2.) Jede wachsende Folge

$$\mathcal{U}_{i_1} \subset \mathcal{U}_{i_2} \subset \mathcal{U}_{i_3} \subset \dots$$

bricht im endlichen ab.

Beweis: Es sei $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots,\quad \varepsilon_n \to 0$. R sei nulldimensional; ich zerlege

$$R = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_{m_1} + \dots,$$

so dass $\mathcal{G}_i$ offen in R, $\mathcal{G}_i\mathcal{G}_j = 0$ für $i \neq j$, $\mathcal{D}(\mathcal{G}_i) < \varepsilon_1$.

Da $\mathcal{G}_{m_1}$ nulldimensional, so kann ich $\mathcal{G}_{m_1}$ zerlegen

$$\mathcal{G}_{m_1} = \mathcal{G}_{m_1 1} + \mathcal{G}_{m_1 2} + \dots + \mathcal{G}_{m_1 m_2} + \dots$$

so dass $\mathcal{G}_{m_1 m_2}$ offen in $\mathcal{G}_{m_1}$ (und also in R), $\mathcal{G}_{m_1 m_2}\mathcal{G}_{m_1 m_2'} = 0$ für $m_2 \neq m_2'$, $\mathcal{D}(\mathcal{G}_{m_1 m_2}) < \varepsilon_2$.

Ebenso zerlege ich

$$\mathcal{G}_{m_1 m_2} = \sum_{m_3} \mathcal{G}_{m_1 m_2 m_3}.$$

u. s. w.

$\mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ist genau in einer der Mengen mit $k-1$ Indizes enthalten, nämlich in $\mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_{k-1}}$. Zwei Mengen mit derselben Anzahl der Indizes sind immer Punktfremd. Und $\mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ist nur in den endlich vielen Mengen $\mathcal{G}_{m_1 \dots m_i}$ $(i < k)$ enthalten; w. z. b. w.

[Jeder nulldimensionale Raum ist einer Teilmenge der Menge der Irrationalzahlen homöomorph.][E1]

Wir zeigen jetzt: <u>die Menge der Irrationalzahlen ist nulldimensional und topologisch vollständig.</u>

Beweis: Es sei

$$\xi = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ddots}} = (m_1, m_2, m_3, \dots)$$

$(m_i$ ganz, $m_2 > 0$, $m_3 > 0 \dots)$ eine Irrationalzahl.

Ebenso sei $\eta = (n_1, n_2, n_3, \dots)$ irrational. Es sei k die kleinste Zahl mit $m_i \neq n_i$; dann sei

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{1}{2^k}; \quad \varrho(\xi, \xi) = 0.$$

Es gilt offenbar $\varrho(\xi, \eta) > 0$ für $\xi \neq \eta$; zweitens $\varrho(\xi, \eta) = \varrho(\eta, \xi)$ und drittens

$$\varrho(\xi, \zeta) \leqq \varrho(\xi, \eta) + \varrho(\eta, \zeta)$$

[E1] Editorial note: The text was crossed out by Jarník.

(sogar $\varrho(\xi,\zeta) \leqq \mathrm{Max}\,(\varrho(\xi,\eta),\varrho(\eta,\zeta))$.

Weiter, wenn $|\xi_n - \xi| \to 0$, ξ_n, ξ irrational, so setzen wir

$$\xi = (m_1, m_2, \dots)$$
$$\xi_n = (m_{1,n}, m_{2,n} \dots)\,.$$

Es ist $m_1 = [\xi]$, $m_{1,n} = [\xi_n]$, also $m_1 = m_{1,n}$ für $n > n_1$.

Weiter

$$m_2 = \left[\frac{1}{\xi - m_1}\right], \quad m_{2,n} = \left[\frac{1}{\xi_n - m_{1,n}}\right];$$

weil ξ irrational, $m_{1,n} = m_1$, $\xi_n \to \xi$, so ist $m_2 = m_{2,n}$ für $n > n_2$ u. s. w.

D. h. zu jedem k gibt es ein $n(k)$, so dass

$$m_i = m_{i,n} \quad \text{für} \quad i < k, n > n_k; \quad \text{also}$$

$$\varrho(\xi,\xi_n) \leqq \frac{1}{2^k}; \quad \text{d. h.} \quad \varrho(\xi_n,\xi) \to 0.$$

Wenn umgekehrt ξ irr., ξ_n irr., $\varrho(\xi_n,\xi) \to 0$, so ist $m_{k,n} = m_k$ für $n > n(k)$, also $\xi_n - \xi \to 0$. Also erhält diese Distanzdefinition konvergente und divergente Folgen.

Und bei dieser Metrik ist die Menge der Irrationalzahlen vollständig; denn es sei $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine Fundamentalfolge; dann gilt für ein $m = m(k)$ und $n > m(k)$:

$$\varrho(\xi_m,\xi_n) < \frac{1}{2^k}; \quad \text{d. h. alle } \xi_n \text{ mit} \quad n > m$$

haben dieselben ersten k Teilnenner wie ξ_m; es gibt also schliesslich eine Kettenbruchentwickelung $\xi = (m_1, m_2, m_3, \dots)$, so dass ξ_n mit ξ für $n > m(k)$ in den k ersten Teilnennern übereinstimmt; d. h. $\varrho(\xi_n,\xi) \to 0$.

Es ist klar, dass die Menge der Irrationalzahlen nulldimensional ist; man wähle bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die abzählbar vielen Intervalle

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ wo } n \text{ eine}$$

ganze Zahl mit $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$ ist.

<u>Jeder nulldimensionale Raum ist einer Teilmenge der Menge der Irrationalzahlen homöomorph.</u>

Beweis: R sei nulldimensional; wir bilden die früher konstruierte Umgebungsbasis

$$\mathcal{G}_{m_1}, \mathcal{G}_{m_1 m_2}, \dots.$$

Zu jedem $x \in R$ gibt es genau eine Folge von natürlichen Zahlen $m_1, m_2, m_3 \ \ldots,$ so dass $x \in \mathcal{G}_{m_1}$, $x \in \mathcal{G}_{m_1 m_2}$, $x \in \mathcal{G}_{m_1 m_2 m_3}, \ldots$. Wir betrachten nun den Kettenbruch

$$f(x) = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ddots}} \,;$$

dadurch wird R auf eine Teilmenge $\overline{R}$ der Irrationalzahlen eineindeutig abgebildet. (Zwei verschiedene Punkte von R können nämlich wegen

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}_{m_1 m_2 \ldots m_k}) \to 0$$

nicht lauter dieselben m_1, $m_2, \ldots$ haben.)

Die Abbildung $R \to \overline{R}$ ist stetig: denn aus $x^n \to x^0$ $(x^i \in R)$ folgt

$$(m_1^n m_2^n \ldots m_k^n) = (m_1^0, \ldots, m_k^0)$$

für $n > n(k)$, also

$$f(x^n) \to f(x^0).$$

Umgekehrt, aus $\xi^n \to \xi^0$ (ξ^i irrational aus $\overline{R}$) folgt nach dem vorigen Beweise (S. ...) $(m_1^n, \ldots, m_k^n) = (m_1^0, \ldots, m_k^0)$, für $n > n(k)$, also strebt auch $x^n \to x^0$, wo $f(x^i) = \xi^i$. w. z. b. w.

Ein nulldimensionaler Raum R ist dann und nur dann nicht kompakt, wenn er in unendlich viele in R offene nicht leere punktfremde Teilmengen zerlegt werden kann.

Beweis:

1.) Es sei $R = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \ldots,$

$$\mathcal{G}_i \mathcal{G}_j = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j, \ \mathcal{G}_i \text{ offen in } R.$$

Es sei x_i ein Punkt aus $\mathcal{G}_i$; x_1, $x_2, \ldots$ kann keinen Häufungswert haben; denn dieser müsste in einem $\mathcal{G}_n$ liegen; also müssten in $\mathcal{G}_n$ unendlich viele x_i liegen: in $\mathcal{G}_n$ liegt aber aus der Folge der Punkte x_i nur der einzige Punkt x_n.

2.) Wenn der Raum nicht kompakt ist, so gibt es eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ ohne Häufungspunkt. Wir konstruieren eine Basis $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ von R, in welcher jede wachsende Folge im endlichen abbricht und $U_i \genfrac{}{}{0pt}{}{\subset}{\supset} \mathcal{U}_j$ oder $\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j = 0$ ist.

Zu jedem Punkt von R gibt es nun eine Umgebung aus der Basis, die höchstens einen Punkt der Folge $x_1, x_2, \ldots$ enthält; wir entfernen aus $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ alle Umgebungen, die mindestens 2 Punkte der Folge enthalten; so bekommen wir eine Folge von Umgebungen, $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots,$ von welchen jede höchstens einen Punkt x_n enthält und welche zusammen R überdecken.

Wir lassen aus $\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \ldots$ diejenigen $\mathcal{U}'_i$ fort, die in irgendeinem anderen $\mathcal{U}'_i$ enthalten ist. Wenn $x \in R$, so ist $x \in \mathcal{U}'_i$ für mindestens ein i; unter diesen $\mathcal{U}'_i$

gibt es eine, die in keinem anderen $\mathcal{U}'_n$ enthalten ist, dieses $\mathcal{U}'_i$ bleibt also nach dem Weglassen übrig.

D. h. die übrigbleibenden $V_1, V_2, \ldots$ von den $\mathcal{U}'_i$ überdecken die ganze Menge R; aber es ist $V_iV_j = 0$ für $i \neq j$. Weiter ist in jedem V_i höchstens ein Punkt der Folge $x_1, x_2, \ldots$ enthalten; also müssen die V_i in unendlicher Anzahl vorhanden sein, w. z. b. w.

Bemerkung. Wir konnten die $\mathcal{U}_i$ von vornherein so wählen, dass ihre Durchschnitte lauter kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ sind.

Weil die im letzten Satz genannte Eigenschaft invariant ist gegenüber Homöomorphie, so sind die Kompakten nulldim. Raume (im ihrer Gesamtheit) genau denjenigen Teilmengen der Menge der Irrationalzahlen homöomorph, die Kompakt sind.

Eine kompakte Menge von Irrationalzahlen muss aber erstens beschränkt sein, zweitens muss sie jeden ihren Häufungspunkt auf der reellen Zahlengeraden enthalten, also muss sie abgeschlossen sein. Und drittens muss sie also nirgends dicht sein – denn sonst müsste sie auch rationale Zahlen enthalten.

Also: jede kompakte Menge von Irrationalzahlen ist eine abgeschlossene, beschränkte, nirgends dichte Menge. Und diese Bedingungen sind offenbar auch hinreichend.

Ein Raum R heisst kompakt in einem Punkte, wenn es eine Umgebung dieses Punktes gibt, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist.

Ein Raum R heisst in kleinem kompakt, wenn er in jedem Punkt kompakt ist.

Eine im kleinen kompakte Menge $\mathcal{M}$ von Irrationalzahlen ist Differenz von zwei nirgends dichten abgeschlossenen Mengen von reellen Zahlen.

Beweis: Wäre $\mathcal{M}$ nicht nirgends dicht, so müsste die abgeschlossene Umgebung eines Punktes von $\mathcal{M}$ kompakt und zugleich überall dicht sein, was unmöglich ist. Also ist $\mathcal{M}$ nirgends dicht.

Es sei $\overline{\mathcal{M}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{M}$ (auf der ganzen Geraden). $\overline{\mathcal{M}}$ ist nirgends dicht.

Sei $x \in \mathcal{M}$; dann gibt es eine in $\mathcal{M}$ abgeschlossene, kompakte Menge $\mathcal{S}$, die alle Punkte ξ von $\mathcal{M}$ mit $|\xi - x| < \varepsilon$ enthält; $\mathcal{S}$ ist also abgeschlossen auf der reellen Geraden: alle Punkte ξ von $\overline{\mathcal{M}}$, die $|\xi - x| < \varepsilon$ liegen, liegen auch in $\mathcal{M}$;

$\mathcal{M}$ ist also offen in $\overline{\mathcal{M}}$, also

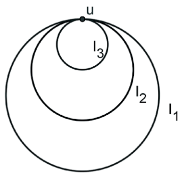
$$\overline{\mathcal{M}} - \mathcal{M} = \Phi ,$$

wo Φ abgeschlossen in $\overline{\mathcal{M}}$, also ist Φ abgeschlossen auf der reelen Geraden.[3] Also

$$\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} - \Phi, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

[3] und freilich nirgends dicht.

Wir betrachten nun die komplementären Intervalle zu Φ^{4}; $I_1, I_2, \ldots$; diese verbiegen wir in Kreise und heften sie in den (zusammenfallenden) Endpunkten aneinander:

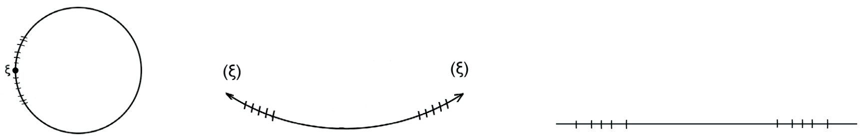


So bekommen wir ein homöomorphes Abbild $\mathcal{M}'$ von $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}'$ ist freilich auch Nulldimensional; auch $\mathcal{M}' + u$. (Man zerlege $\mathcal{M}' + u$ so: aus jedem Kreis I_n nehme man einen Bogen um u der Länge $< \frac{\varepsilon}{2}$ und $> \frac{\varepsilon}{4}$, dessen Endpunkte in komplementären Bogen zu dem in I_n enthaltenen Teil von $\mathcal{M}'$ gehören;[E2] dann bildet $u+$ die auf diesen Bögen enthaltenen Punkte von $\mathcal{M}'$ eine in $\mathcal{M}' + u$ offene Menge vom Durchmesser $< \varepsilon$; den Rest von $\mathcal{M}' + u$ kann man offenbar in abzählbar viele getrennte in $\mathcal{M}' + u$ offene Mengen vom Durchmesser $< \varepsilon$ teilen.)

$\mathcal{M}' + u$ ist weiter abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, also homöomorph zu einer abgeschlossenen, beschränkten, nirgends dichten Menge der Irrationalzahlen $\mathcal{M}''$ auf der Zahlengeraden. $\mathcal{M}'$ ist also homöomorph zu $\mathcal{M}''$, aus dem ein Punkt ξ entfernt ist.

Wir bilden $\mathcal{M}''$ homöomorph auf einen Kreis ab, schneiden diesen Kreis im Punkte ξ, entfalten ihn in eine Strecke und diese dehnen wir ins Unendliche (so dass irrationale Punkte in irrationale übergehen).



Dadurch wird $\mathcal{M}'' - \xi$ zu einer (im allgemeinen nicht beschränkten) abgeschlossenen, nirgends dichten Menge von Irrationalzahlen [abgebildet].

Die Eigenschaft, ein im kleinen kompakter nulldimensionaler Raum zu sein, überträgt sich aber bei Homöomorphie. Daher haben wir bewiesen:

Jeder nulldimensionale, im kleinen kompakte Raum ist einer nirgends dichten abgeschlossenen Menge von Irrationalzahlen homöomorph.

Ein Raum heisst homogen, wenn man zu je zwei Punkten desselben homöomorphe Umgebungen finden kann.

Nun sei ein Raum R vollständig, nulldimensional, homogen und nicht in kleinem kompakt. Dann ist er also in keinem Punkte kompakt.

[4] Dort liegt $\mathcal{M}$.

[E2] Editorial note. Next to this line on the margin, the following note is attached: Nein! noch besser denselben Kreis und u für alle I_n.

Wir zerlegen R in $\underline{\infty}$ viele nicht leere (wirklich unendlich viele!) Mengen

$$\mathcal{G}_{m_1} \quad (m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \ ,$$

die offen in R, paarweise punktfremd, und vom Durchmesser < 1 sind. Nun ist $\mathcal{G}_{m_1}$ nicht kompakt; also kann ich $\mathcal{G}_{m_1}$ in unendlich viele nicht leere Mengen (offen in R, paarweise punktfremd, Durchmesser $< \frac{1}{2}$)

$$\mathcal{G}_{m_1 m_2} \quad (m_2 = 1, 2, \dots)$$

zerlegen. Und so weiter.

Nun bilden wir R durch das auf S. ... geschilderte Verfahren homöomorph auf ein Teilmenge der Irrationalzahlen ab!

Zu jedem $x \in R$ gibt so eine Folge $m_1, m_2, \dots$, so dass $x \in G_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ($m_1 \lesseqgtr 0,\ m_2 > 0,\ m_3 > 0, \dots$).

Aber auch umgekehrt, zu jeder solchen Folge gibt es einen solchen Punkt in R.

Denn: es sei $x_1 \in \mathcal{G}_{m_1},\ x_2 \in \mathcal{G}_{m_1 m_2},\ \dots,\ x_n \in \mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_n} \dots$.

Dann ist $x_1, x_2, \dots$ eine Fundamentalfolge; sie konvergiert also zu einem Punkte ξ; da die $\mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_n}$ abgeschlossen sind, so ist ξ (da $x_n \in \mathcal{G}_{m_1 \dots m_k}$ für $n \geq k$) in allen $\mathcal{G}_{m_1 m_2 \dots m_n}$ enthalten; w. z. b. w.

Also:

Jeder vollständige, homogene, nicht im kleinen kompakte nulldimensionale Raum ist der Menge aller Irrationalzahlen homöomorph.

Wir werden meistens nur Punktmengen in euklidischen Räumen betrachten. **1.3**
Es sei $\mathcal{M}$ eine Teilmenge eines eukl. Raumes R^n. Zwei Punkte von $\mathcal{M}$ haben eine (euklidische) Entfernung; infolge dieser Entfernung können wir $\mathcal{M}$ selbst als einen metrischen Raum betrachten. Das führt uns zu den Relativbegriffen:

Es sei $\Phi \subset \mathcal{M}$; Φ heisst abgeschlossen in bezug auf $\mathcal{M}$, wenn jeder Häufungspunkt von Φ, der in $\mathcal{M}$ liegt, zu Φ gehört (anders gesagt, wenn Φ eine abgeschlossene Menge des metrischen Raumes $\mathcal{M}$ ist).

Es sei F die abgeschlossene Hülle von Φ; dann ist $\Phi = \mathcal{M}F$. Umgekehrt, jeder Durchschnitt von $\mathcal{M}$ mit einer absolut (d. h. in R^n) abgeschlossenen Menge ist in bezug auf $\mathcal{M}$ abgeschlossen.

Eine Menge $\Gamma \subset \mathcal{M}$ ist relativ offen in $\mathcal{M}$, wenn es zu jedem $x \in \Gamma$ eine Umgebung gibt, deren alle Punkte, die zu $\mathcal{M}$ gehören, auch zu Γ gehören (d. h. Γ ist offen im Raum $\mathcal{M}$).

Das Komplement in bezug auf $\mathcal{M}$ einer relativ abgeschlossenen Menge ist eine relativ offene; und umgekehrt.

Daher sieht man (durch Bildung von Komplementärmengen): „Γ ist relativ offen in $\mathcal{M}$“ bedeutet ebensoviel wie „Γ ist Durchschnitt einer absolut offenen Menge mit $\mathcal{M}$“.

Wir wollen sagen, dass ein Raum eine „erlaubte Abänderung der Metrik“ erleidet, wenn jede konvergente Folge in der alten Metrik konvergent in der neuen Metrik bleibt und umgekehrt.

Die abgeschlossenen und offenen Mengen hängen mit stetigen Funktionen zusammen; wenn $f(x)$ stetig, so ist die Menge der x mit $a \leq f(x) \leq b$ abgeschlossen, diejenige mit $a < f(x) < b$ offen.

Wir werden aus ihnen allgemeinere Klassen von Mengen aufbauen. Wir betrachten zwei Operationen:

1.) Vereinigungsmengenbildung von höchstens abzählbar vielen Mengen; wenn wir eine Klasse von Mengen $\mathfrak{M}$ haben, so soll die Klasse derjenigen Mengen, die sich als Vereinigungsmengen von höchstens abzählbar vielen Mengen von $\mathfrak{M}$ darstellen lassen, mit $\mathfrak{M}_\sigma$ bezeichnet werden.

2.) Durchschnittbildung von höchstens abzählbar vielen Mengen; die Klasse, die aus $\mathfrak{M}$ so entsteht, soll mit $\mathfrak{M}_\delta$ bezeichnet werden.

$\mathfrak{F}$ sei die Klasse der abgeschlossenen, $\mathfrak{G}$ die der offenen Mengen. F bedeute eine abgeschlossene Menge, F_σ eine Menge der Klasse $\mathfrak{F}_\sigma$ u. s. w.

Der Durchschnitt (bzw. die Vereinigungsmenge) von abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen ist wieder abgeschlossen (offen); daher ist $\mathfrak{F}_\delta = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{G}$. Aber $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{G}_\delta$ geben schon etwas neues. Und so gehen wir weiter. Offenbar ist

$$\mathfrak{F}_{\sigma\sigma} = \mathfrak{F}_\sigma \quad (\text{ da} \quad \sum_k \sum_i F_{ik} = \sum_\iota F_\iota),$$

$\mathfrak{G}_{\delta\delta} = \mathfrak{G}_\delta$; wir bekommen so zwei Klassifikationen:

$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{F}_\sigma$	$\mathfrak{F}_{\sigma\delta}$	$\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma}$	$\mathfrak{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}$	...	
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{G}_\delta$	$\mathfrak{G}_{\delta\sigma}$	$\mathfrak{G}_{\delta\sigma\delta}$	$\mathfrak{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$	...	
0te	1te	2te	3te	4te	...	Klasse

So gehen wir weiter ins Transfinite: Es sei α eine Zahl 2. Zahlenklasse; $\alpha = \beta + n$, wo β eine Limeszahl, n endlich; dann heisse α gerade oder ungerade, je nachdem n gerade oder ungerade.

Wenn $\alpha \left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$, so sei $\mathfrak{F}_\alpha$ = Klasse der Mengen, die durch die Operation $\left\{ \begin{matrix} \delta \\ \sigma \end{matrix} \right\}$, aus den Mengen aller Klassen $\mathfrak{F}_\beta$ mit $\beta < \alpha$ hervorgehen. Umgekehrt sei es bei $\mathfrak{G}_\alpha$.

Ich behaupte:

Jedes F ist ein G_δ; jedes G ein F_σ.

Beweis: Es sei $G_n = S(F, \frac{1}{n})$ (= Sphäre um F mit Radius $\frac{1}{n}$ = Menge aller Punkte, deren Entfernung von F kleiner als $\frac{1}{n}$ ist). G_n ist offen; $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ enthält F; jeder Punkt von $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ hat aber die Entfernung 0 von F, gehört also an F, da F abgeschlossen. Also

$$F = \prod G_n = G_\delta.$$

Aus Komplementärmengenbildung folgt dann $G = F_\sigma$.

Wir betrachten jetzt die beiden Klassifikationen:

$$\mathfrak{F} \quad \mathfrak{F}_\sigma \quad \mathfrak{F}_{\sigma\delta} \quad \dots$$

$$\mathfrak{G} \quad \mathfrak{G}_\delta \quad \mathfrak{G}_{\delta\sigma} \quad \dots$$

Wir wissen schon: $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}_1$. Es sei bis zu einem α bewiesen

$$\mathfrak{F}_\beta \subset \mathfrak{G}_{\beta+1}, \quad \mathfrak{G}_\beta \subset \mathfrak{F}_{\beta+1}$$

für alle $\beta < \alpha$.

Dann ist $\mathfrak{F}_\alpha$ die Klasse derjenigen Mengen, die aus allen $\mathfrak{F}_\beta$ durch σ und δ entstehen[5]; ebenso entsteht $\mathfrak{G}_{\alpha+1}$ aus allen $\mathfrak{G}_\beta$ mit $\beta < \alpha + 1$, d. h. aus allen $\mathfrak{G}_{\beta+1}$ mit $\beta < \alpha$. Also ist auch $\mathfrak{F}_\alpha \subset \mathfrak{G}_{\alpha+1}$ und ebenso $\mathfrak{G}_\alpha \subset \mathfrak{F}_{\alpha+1}$.

Unsere beiden Klassifikationen, betrachtet für alle Indizes der zweiten Zahlenklasse, enthalten also dieselben Mengen. Und diese Mengensysteme lassen sich durch die Operationen δ und σ nicht erweitern: denn jede Folge von diesen Mengen $M_1, M_2, \dots$ gehört ganz zu einer Klasse α; ihre Vereinigung oder Durchschnitt also sicher zur Klasse $\alpha + 1$.

Eine ganz besonders wichtige Rolle spielen die Klassen $\mathfrak{F}_\sigma$ und $\mathfrak{G}_\delta$. Zunächst besteht der Satz:

Es sei $f(x)$ Funktion, die in einer Menge $\mathcal{M}$ definiert ist. Die Menge der Stetigkeitspunkte ist in $\mathcal{M}$ ein G_δ.

Beweis: Es sei

$$\omega_x f = \lim_{\substack{a \to x-0 \\ b \to x+0}} \text{ der Schwankung von } f \text{ in } \langle a, b \rangle \cdot \mathcal{M}.$$

Die Unstetigkeitspunkte sind die Punkte von $\mathcal{M}$, in welchen $\omega_x f > 0$.

[5] Bei geradem (ungeradem) α gibt die Operation $\sigma(\delta)$ auf die $\mathfrak{F}_\alpha$ nichts neues.

Es sei $F_n = \{x;\ \omega_x f \geqq \frac{1}{n}\}$; F_n ist abgeschlossen in $\mathcal{M}$; $\mathcal{U} = \sum_1^\infty F_n$ ist genau die Menge aller Unstetigkeitspunkte; sie ist ein F_σ in bez. auf $\mathcal{M}$; ihre komplementärmenge in bez. auf $\mathcal{M}$ ist also ein G_δ in bezug auf $\mathcal{M}$, w. z. b. w.

Die ganze Masstheorie bericht sich in Hauptsache auf die Menge $\mathfrak{F}_\sigma$ und $\mathfrak{G}_\delta$; denn zu jeder messbare Punktmenge $\mathcal{M}$ gibt es ein F_σ und ein G_δ so, dass

$$F_\sigma \subset \mathcal{M} \subset G_\delta,$$

$$\text{Mass von } F_\sigma = \text{Mass von } \mathcal{M} = \text{Mass von } G_\delta.$$

Das ist der Grund, warum sich jede messbare Funktion bis auf eine Menge von Mass ε ($\varepsilon > 0$ beliebig) wie eine stetige Funktion, und bis auf eine Menge von Mass 0 wie eine Funktion 1. Klasse verhält.

Es sei $f(x)$ auf einer Menge $\mathcal{M}$ des Eukl. Raumes erklärt und stetig; dann lässt sich $f(x)$ zu einer auf einem $G_\delta \supset \mathcal{M}$ stetigen Funktion ergänzen. **1.4**

Beweis: $\overline{\mathcal{M}}$ sei die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{M}$. Es sei $x \in \overline{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$. Es sind zwei Fälle möglich:

1.) Für jede Folge $x_n \to x$, $x_n \in \mathcal{M}$, ist $f(x_1), f(x_2), \ldots$ konvergent.

2.) Es ist dies nicht der Fall.

Wir bilden die Menge $\mathcal{A} = \mathcal{M} +$ die Menge aller Punkte von $\overline{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$, in den der Fall 1 eintritt; und wir ergänzen $f(x)$ durch $f(x) = \lim f(x_n)$ auf $\mathcal{A} - \mathcal{M}$, wo $x_n \in \mathcal{M}$, $x_n \to x$. Die so erklärte Funktion ist offenbar stetig auf $\mathcal{A}$.

Nun sei G_ε die Menge aller $a \in \overline{\mathcal{M}}$, zu welchen es ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Schwankung von f kleiner als ε in $S(a, \delta)$ ist; der Durchschnitt $\prod_{m=1}^\infty G_{\frac{1}{m}}$ ist offenbar $= \mathcal{A}$. G_ε ist aber offen in $\overline{\mathcal{M}}$; $\mathcal{A}$ ist also ein G_δ in $\overline{\mathcal{M}}$. Aber $\overline{\mathcal{M}}$ ist selbst ein G_δ; und ein G_δ in bezug auf ein G_δ ist ein absolutes G_δ; denn es sei $\mathcal{A}$ ein G_δ in bez. auf $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ ein absolutes G_δ; dann ist $\mathcal{A} = \prod \mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_n$ offen in $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}_n = \Gamma_n \mathcal{B}$, Γ_n offen; weiter ist $\mathcal{B} = \prod \Delta_n$, Δ_n offen: also $\mathcal{A} = \prod \Gamma_n \Delta_n$, also ein G_δ.

(Durch Komplementärmengen folgt: ein F_σ in bezug auf ein F_σ ist ein absolutes F_σ.)

Es sei $f(x)$ eine homöomorphe (d. h. beiderseitig stetige und eindeutige) Abbildung einer Menge $\mathcal{M}$ auf eine Menge M (beide im Eukl. Raume). Dann lässt sich dieser Homöomorphismus auf einen Homöomorphismus zweier G_δ Mengen $\mathcal{D}^*$, Δ^* mit $\mathcal{D}^* \supset \mathcal{M}$, $\Delta^* \supset M$ erweitern.

Beweis: Wir erweitern f stetig auf eine in $\overline{\mathcal{M}}$ enthaltene G_δ Menge $\mathcal{D}$; es sei $f(\mathcal{D}) = \Delta_1$. Ebenso erweitern wir f^{-1} auf eine in $\overline{M}$ enthaltene G_δ-Menge Δ; $f^{-1}(\Delta) = \mathcal{D}_1$.

Man betrachte die $x \in \mathcal{D}$, für die $f(x) \in \Delta_1 \Delta$; diese Menge sei $\mathcal{D}^*$. Ebenso sei Δ^* die Menge der $\xi \in \Delta$, für welche $f^{-1}(\xi) \in \mathcal{D}\mathcal{D}_1$.

$f(x)$ ist stetig auf $\mathcal{D}^*$; wäre nun $f(y) = f(z) = t$ für $y \neq z$, $y \in \mathcal{D}^*$, $z \in \mathcal{D}^*$, so gäbe (da $\mathcal{D}^*$ in $\overline{M}$ enthalten ist) es zwei Folgen aus $\mathcal{M}$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ mit $f(y_n) \to t$, $f(z_n) \to t$; es sei $f(y_n) = t_n$, $f(z_n) = u_n$; t_n, u_n liegen in M; es ist $t_n \to t$, $u_n \to t$;

$$f^{-1}(t_n) = y_n \to y,$$
$$f^{-1}(u_n) = z_n \to z.$$

t liegt aber in Δ; in Δ soll aber f^{-1} stetig erweitert sein; also müsste $f^{-1}(t_n) \to f^{-1}(t)$, $f^{-1}(u_n) \to f^{-1}(t)$, was wegen $y \neq z$ nicht der Fall ist.

Also ist f eine eineindeutige und (einseitig) stetige Abbildung von $\mathcal{D}^*$ auf $\Delta\Delta_1$.

[Auf dieser Teilmenge von $\Delta\Delta_1$ ist die Umkehrung dieser stetigen (erweiterten) Abbildung definiert aus $f(y_n) \to f(y)$ ($f(y_n)$, $f(y)$ in dieser Teilmenge) folgt $y_n \to y$, denn sonst][E3]

Die (auf M definierte) Funktion f^{-1} wurde zu einer auf $\Delta\Delta_1$ stetigen Funktion erweitert. Wenn nun $t \in \Delta\Delta_1$, $t_n \in M$ $t_n \to t$, so gibt es genau ein $x \in \mathcal{D}^*$, $x_n \in \mathcal{M}$ mit $f(x) = t$, $f(x_n) = t_n$

Es ist $x_n = f^{-1}(t_n)$. Wäre nicht $x = \lim x_n$, so müsste $t \in \Delta\Delta_1 - M$ sein (denn auf M, $\mathcal{M}$ haben wir Homöomorphie). Man könnte dann eine Folge $y_n \in \mathcal{M}$, $y_n \to x$ finden, es wäre dann $f(y_n) = \tau_n \to f(x) = t$.

Also hätten wir eine Folge $t_1, \tau_1, t_2, \tau_2, \ldots$ aus M, die gegen einen Punkt t aus $\Delta\Delta_1$ konvergiert, für welche aber

$$f^{-1}(t_1), f^{-1}(\tau_1), f^{-1}(t_2), f^{-1}(\tau_2) \cdots \equiv x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$$

nicht konvergieren würde, was der Voraussetzung widerspricht, dass sich f^{-1} auf $\Delta\Delta_1$ zu einer stetigen Funktion erweitern lässt.

Also lässt sich die Homöomorphie $f(x)$ von $\mathcal{M}$, M zu einer Homöomorphie von

$$\mathcal{D}^*, \Delta\Delta_1 \quad \text{erweitern.}$$

Nun ist Δ eine G_δ-Menge, Δ_1 das durch die (erweiterte) stetige Funktion entworfene Bild der G_δ-Menge $\mathcal{D}$; daraus folgt, dass auch Δ_1, $\mathcal{D}^*$ G_δ Mengen sind, womit alles bewiesen sein wird.

Erstens: Es sei $f(x)$ stetig auf $\mathcal{M}$; die Menge aller $f(x)$ sei $\mathcal{N}$; $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ sei eine G_δ-Menge in bez. auf $\mathcal{N}$.

Behauptung: Die $x \in \mathcal{M}$ mit $f(x) \in \mathcal{B}$ bilden eine G_δ-Menge relativ zu $\mathcal{M}$.

Beweis:

$$\mathcal{B} = G_1 G_2 \ldots \quad (G_m \quad \text{rel. offen in } \mathcal{N});$$

[E3] Editorial note: The text was crossed out by Jarník.

$\mathcal{H}_m$ sei die Gesamtheit der x mit $f(x) \in G_m$; $\mathcal{H}_m$ ist offen in $\mathcal{M}$. Und $f(x) \in \mathcal{B}$ genau dann, wenn $x \in \mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\ldots$; und das ist eine G_δ-Menge in $\mathcal{M}$. In unserem Falle war statt $\mathcal{M}\ldots\mathcal{D}$, statt $\mathcal{N}\ldots\Delta_1$, statt $\mathcal{B}\ldots\Delta$; also ist $\mathcal{D}^*$ eine G_δ-Menge in $\mathcal{D}$, also eine absolute G_δ-Menge.

Nun die (erweiterte) Funktion f bildet $\mathcal{D}^*$ homöomorph auf $\Delta\Delta_1$ ab; die Werte von $f^{-1}(t)$ (t in $\Delta\Delta_1$) füllen ganz $\mathcal{D}^*$ aus; also muss $\mathcal{D}^*$ ganz in $\mathcal{D}_1$ liegen; also: $\mathcal{D}^*$ liegt in $\mathcal{D}\mathcal{D}_1$. Ebenso liegt Δ^* in $\Delta\Delta_1$ und f bildet homöomorphe Δ^* auf $\mathcal{D}\mathcal{D}_1$. Da $\mathcal{M}$, M in $DD_1, \Delta\Delta_1$ dicht sind, so sind beide Homöomorphien in dem Durchschnitt der betrachteten Mengen identisch:

$\mathcal{D}^*$ wird auf $\Delta\Delta_1$ abgebildet und eine Teilmenge Δ^* von $\Delta\Delta_1$ umgekehrt auf eine Menge $\mathcal{D}\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}^*$; das ist nur so möglich, dass $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\mathcal{D}_1$, $\Delta^* = \Delta\Delta_1$.

Δ^* ist aber eine G_δ Menge aus demselben Grunde wie $\mathcal{D}^*$, also ist die Abbildung von $\mathcal{D}^*$ auf $\Delta\Delta_1$ eine Homöomorphie zwischen zwei G_δ Mengen, w. z. b. w.

Es entsteht die Frage: Warum sind die G_δ-Mengen so wichtig? Der wahre Grund ist der folgende **(A)**: <u>Die G_δ-Mengen sind nichts anderes als die topologisch vollständigen Räume</u> (Alexandrov, C. R. 178 – 1923).

Man kann fragen: Durch welche topologischen Eigenschaften kann die topol. Vollständigkeit charakterisiert werden? Eine <u>Basis</u> eines metrischen Raumes ist ein System von offenen Mengen, aus welcher man durch Vereinigung alle offenen Mengen aufbauen kann.

Eine Basis heisst <u>vollständig</u>, wenn es zu jeder abnehmenden Folge von Mengen der Basis einen Punkt gibt, der in der abgeschl. Hülle einer jeden Menge der Folgen enthalten ist.

Z. B. bilden die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten in R^1 eine Basis, aber keine vollständige Basis. Im Raum der irrationalen Zahlen kann man folgende vollst. Basis konstruieren:

Zu jedem $n, i_1, i_2, \ldots, i_n$

$$(n \geqq 1 \ \text{ ganz}, \ i_2 > 0, \ \ldots, \ i_n > 0, \ i_1, \ldots, i_n \text{ ganz})$$

sei die Menge $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ aller Irrationalzahlen zugeordnet, deren Kettenbruchentwickelung mit

$$i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{i_n}}}$$

beginnt (d. h. alle Irrationalzahlen zwischen

$$i_1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{i_n}}} \qquad \text{und} \qquad i_1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{i_n + 1}}} \Bigg).$$

Dann sieht jede abnehmende Folge so aus:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n_1})$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n_2})$$

$$\ldots$$

$$(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$$

und alle diese Mengen enthalten den Punkt

$$i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cfrac{1}{i_3 + \ddots}}.$$

Wenn aus jeder Basis eine vollständige Teilbasis sich auswählen lässt, so ist der Raum topologisch vollständig – und umgekehrt.

Und diese Eigenschaft trifft bei den G_δ und nur bei ihnen zu.

Wir werden den Satz **(A)** nicht in der angedeuteten Weise beweisen; sondern direkt ohne diesen Umweg über die Basiseigenschaften – wodurch frelich dieses Nebenresultat verloren geht.

Satz:

Es sei $\mathcal{M}$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes R. Es sei möglich, die Metrik in $\mathcal{M}$ so in erlaubter Weise abändern[6], dass in der neuen Metrik $\mathcal{M}$ ein vollständiger metrischer Raum ist, dann ist $\mathcal{M}$ eine G_δ Menge in bezug auf R.

Es sei $\varrho(x, y)$ die alte, $\varrho_1(x, y)$ die neue Metrik. Zu jedem $x \in \mathcal{M}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass aus

$$y \in \mathcal{M}, \quad \varrho(x, y) < \delta \quad \text{folgt} \quad \varrho_1(x, y) < \varepsilon.$$

Für jedes $x \in \mathcal{M}$ und jedes ganze $m > 0$ definiere man ein $\nu_m(x)$ so:

1.) $0 < \nu_m(x) < \frac{1}{m}$
2.) Aus $\varrho(x, y) < \nu_m(x)$, $y \in \mathcal{M}$, folgt $\varrho_1(x, y) < \frac{1}{m}$.

$\mathcal{U}_m(x)$ sei die Menge aller Punkte y von R mit $\varrho(x, y) < \nu_m(x)$; $G_m = \sum_{x \in \mathcal{M}} \mathcal{U}_m(x)$.

G_m ist offen (in R), und es sei $\Gamma = \prod_{m=1}^{\infty} G_m$; also $\mathcal{M} \subset \Gamma$, und Γ eine G_δ. Es genügt, $\mathcal{M} = \Gamma$ zu zeigen, also $\mathcal{M} \supset \Gamma$.

Es sei ξ ein Punkt von Γ; also für jedes m ist $\xi \in G_m$, also $\xi \in \mathcal{U}_m(x_m)$ für ein $x_m \in \mathcal{M}$.

[6] Das bedeutet: die Eigenschaft „eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in \mathcal{M}$ konvergiert gegen ein $x \in \mathcal{M}$“ soll in der alten und neuen Metrik von $\mathcal{M}$ für genau dieselben Folgen erfüllt sein.

Es ist $\varrho(\xi, x_n) < \nu_n(x_n) < \frac{1}{n}$; d. h. $\lim x_n = \xi$ (in der alten Metrik ϱ). Es genügt zu zeigen, dass $x_1, x_2, \ldots$ bei der Entfernung ϱ_1 eine Fundamentalfolge ist: denn, da in dieser Metrik $\mathcal{M}$ vollständig, so gibt es ein $x_\omega \in \mathcal{M}$ mit

$$\lim x_n = x_\omega \quad \text{(in der neuen Metrik } \varrho_1\text{)}.$$

Da beide Metriken „äquivalent“ sind, so ist $\lim x_n = x_\omega$ auch in der Metrik ϱ, also $x_\omega = \xi$, d. h. $\xi \in \mathcal{M}$, $\Gamma \subset \mathcal{M}$, w. z. b. w.

Also: wir sollen zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν, so dass $\varrho_1(x_p, x_q) < \varepsilon$ für $p > \nu$, $q > \nu$. Wir wählen ein festes n so, dass $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$; dann ist

$$\varrho(\xi, x_n) < \nu_n(x_n),$$

also

$$\nu_n(x_n) - \varrho(\xi, x_n) = \delta > 0.$$

Es sei nun $\nu > n$ so gross, dass $\frac{1}{\nu} < \delta$. Es sei $p > \nu$, $q > \nu$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_p) &\leqq \varrho(x_n, \xi) + \varrho(\xi, x_p) \\ &\leqq \varrho(x_n, \xi) + \frac{1}{p} \leqq \varrho(x_n, \xi) + \frac{1}{\nu} \\ &\leqq \varrho(x_n, \xi) + \delta = \nu_n(x_n), \end{aligned}$$

also

$$\varrho_1(x_n, x_p) < \frac{1}{n}.$$

Ebenso

$$\varrho_1(x_n, x_p) < \frac{1}{n}.$$

Also

$$\varrho_1(x_p, x_q) < \frac{2}{n} < \varepsilon. \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Also: wenn $\mathcal{M}$ in irgend einer Metrik von $\mathcal{M}$ topologisch vollständig ist, so ist $\mathcal{M}$ ein G_δ in jedem metrischen Raum, der $\mathcal{M}$ enthält.

Die Umkehrung: „Eine G_δ Menge lässt sich durch erlaubte Abänderung ihrer Metrik zu einem vollständigen Raum machen“ ist sicher falsch: denn jede Menge, in der eine Metrik definiert ist, ist eine G_δ Menge in bezug auf sich selbst: und trotzdem braucht sie nicht topologisch vollständig zu sein.

Der richtige entsprechende Satz heisst so:

$\mathcal{M}$ sei eine G_δ-Menge in einem vollständigen Raum: dann lässt sich durch eine erlaubte Abänderung der Metrik von $\mathcal{M}$ die Menge $\mathcal{M}$ zu einem vollständigen Raum machen.

Beweis: Wenn F abgeschlossen in einem metrichen Raum R, und $G = R - F$, und wenn $\varrho(x,y)$ die Metrik von R ist, so ist

$$\varrho_F(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F) + \varrho(y,F)}$$

eine erlaubte Abänderung der Metrik in G.

Denn: $\varrho(x,F) > 0$, $\varrho(y,F) > 0$, falls $x \in G$, $y \in G$.[7] $\varrho_F(x,y) > 0$, wenn $x \neq y$, $= 0$ wenn $x = y$; $\varrho_F(x,y) = \varrho_F(y,x)$. Weiter

$$\begin{aligned}\varrho(y,F) &\leqq \varrho(x,F) + \varrho(x,y),\\ \varrho(y,F) &\leqq \varrho(z,F) + \varrho(z,y);\end{aligned}$$

also

$$\varrho_F(x,y) + \varrho_F(y,z) \geqq$$

$$\frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F) + \varrho(z,y) + \varrho(z,F)} + \frac{\varrho(y,z)}{\varrho(y,z) + \varrho(z,F) + \varrho(x,F) + \varrho(x,y)} =$$

$$= \frac{\varrho(x,y) + \varrho(y,z)}{\varrho(x,y) + \varrho(y,z) + \varrho(x,F) + \varrho(z,F)}$$

$$\geqq \frac{\varrho(x,z)}{\varrho(x,z) + \varrho(x,F) + \varrho(z,F)} = \varrho_F(x,z).$$

Also ist $\varrho_F(x,y)$ eine Entfernung.

Wenn $x \in G$, $y \in G$, x fest, $\varrho(x,y) \to 0$, so ist

$$\varrho_F(x,y) \leqq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F)} \to 0$$

Wenn $x \in G$, $y \in G$, x fest, $\varrho_F(x,y) \to 0$, so ist

$$\varrho(x,y) = \frac{\varrho_F(x,y)\big(\varrho(x,F) + \varrho(y,F)\big)}{1 - \varrho_F(x,y)}.$$

Für $\varrho_F(x,y) < \frac{1}{4}$ ist also wegen

$$\begin{aligned}\varrho(y,F) &\leqq \varrho(x,y) + \varrho(x,F)\\ \varrho(x,y) &\leqq 2\varrho_F(x,y)\big(\varrho(x,y) + 2\varrho(x,F)\big)\\ \varrho(x,y) &\leqq \frac{4\varrho(x,F)\varrho_F(x,y)}{1 - \frac{1}{2}}\\ &\leqq 8\varrho(x,F)\varrho_F(x,y) \to 0.\end{aligned}$$

Also ist dies wirklich eine erlaubte Abänderung der Metrik von G.

— — — — ——

[7] x, y sollen jetzt Punkte aus G sein.

Nun sei $\mathcal{M}$ ein G_δ im vollständigen Raum R; G_n offen in R, $\mathcal{M} = \prod_1^\infty G_n$, $F_n = R - G_n$; es ist $\varrho_{F_n}(x,y) < 1$ bei $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$. Man bilde

$$\varrho^*(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varrho_{F_n}(x,y).$$

das ist eine Entfernungsfunktion für $\mathcal{M}$. Es ist

$$\varrho_{F_n}(x,y) \leq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)};$$
$$\varrho^*(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)}.$$

Es sei x fest in $\mathcal{M}$ gegeben; es sei $\varepsilon > 0$; wir wählen $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\varepsilon)$ so, dass

$$\sum_{\mathcal{N}+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2};$$

es sei

$$a = \operatorname*{Min}_{n=1,2,\ldots,\mathcal{N}} \varrho(x,F_n);$$

es ist $a = a(\varepsilon) > 0$,

$$\sum_{1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_n)} \leqq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + a}.$$

Für $\varrho(x,y) < \eta = \eta(\varepsilon)$ ist der letzte Ausdruck $< \varepsilon$.[E4]

Also: für $y \in \mathcal{M}$, $\varrho(x,y) < \eta(\varepsilon, x)$, ist

$$\varrho^*(x,y) < \varepsilon.$$

Umgekehrt:

$$\begin{aligned}
\varrho^*(x,y) &\geqq \frac{1}{2} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_1) + \varrho(y,F_1)} \\
&\geqq \frac{1}{2} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + \varrho(x,F_1) + \varrho(x,F_1) + \varrho(x,y)} \\
&\geqq \frac{1}{4} \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,y) + a},
\end{aligned}$$

wo $a = \varrho(x,F_1) > 0$.

[E4] Editorial note: It is meant $\frac{\varepsilon}{2}$.

Also

$$\begin{aligned}\varrho(x,y) &\leqq \frac{4a\varrho^*(x,y)}{1-4\varrho^*(x,y)}\\ &\leqq 8a\varrho^*(x,y)\end{aligned}$$

für $\varrho^*(x,y) < \frac{1}{8}$. Also $\varrho(x,y) \to 0$, wenn bei festem $x \in \mathcal{M}$ $\varrho^*(x,y) \to 0$ $(y \in \mathcal{M})$.

Also ist $\varrho^*(x,y)$ eine erlaubte Abänderung der Metrik $\varrho(x,y)$ in $\mathcal{M}$.

Dasselbe gilt daher offenbar von

$$\varrho'(x,y) = \varrho(x,y) + \varrho^*(x,y).$$

In dieser Metrik $\varrho'(x,y)$ ist $\mathcal{M}$ vollständig. Denn es sei $x_1, x_2, \ldots$ eine Fundamentalfolge in $\mathcal{M}$ infolge der Metrik ϱ'; dann ist es umsomehr eine Fundamentalfolge in der Metrik ϱ und ϱ^*; es gibt also (da R vollständig) ein $\xi \subset R$ mit $\lim x_n = \xi$ (in der Metrik ϱ). Wäre nun ξ nicht in $\mathcal{M}$, so wäre ξ in einem gewissen G_k nicht enthalten; also

$$\varrho'(x_p,x_q) \geqq \varrho^*(x_p,x_q) \geqq \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\varrho(x_p,x_q)}{\varrho(x_p,x_q)+\varrho(x_q,F_k)}$$

Nun sei p beliebig und fest; bei $q \to \infty$ strebt die rechte Seite gegen

$$\frac{1}{2^{k+1}}\frac{\varrho(x_p,\xi)}{\varrho(x_p,\xi)+\varrho(\xi,F_k)};$$

aber $\xi \in F_k = R - G_k$, also $\varrho(\xi,F_k) = 0$.

Also: es würde Paare von beliebig grossen Zahlen p,q mit $\varrho'(x_p,x_q) \geq \frac{1}{2^{k+2}}$ geben; das ist aber ausgeschlossen.

Also liegt ξ in $\mathcal{M}$: es ist $\lim x_n = \xi$ in der Metrik ϱ; und weil ϱ' in $\mathcal{M}$ eine erlaubte Abänderung der Metrik ϱ ist, so ist auch $\lim x_n = \xi$ in der Metrik ϱ'; d. h. $\mathcal{M}$ ist in der Metrik ϱ' vollständig w. z. b. w.

Wenn also $\mathcal{M}$ eine G_δ Menge in einem vollständigen Raum ist, so ist sie topologisch vollständig; dann ist $\mathcal{M}$ eine G_δ-Menge in jedem (also speziell in jedem vollständigen) Raum, in welchen sie eingebettet werden kann. Wir nennen daher die Mengen, die in einem (also in jedem) vollständigen Raum G_δ Mengen sind, <u>absolute G_δ Mengen.</u>

Weiter ist nun klar, dass der Begriff einer absoluten G_δ Menge topologisch invariant ist. Genauer:

$\mathcal{M}$ sei eine G_δ Menge in einem vollständigen Raum; $\mathcal{M}^*$ sei in einem metrischen Raum R^* enthalten und es sei $\mathcal{M}^*$ ein homöomorphes Bild von $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}^*$ eine G_δ Menge in R^*.

Denn: $\mathcal{M}$ kann sich dadurch, dass man ihre Metrik ϱ durch eine erlaubte Abänderung ϱ' ersetzt, zu einem vollständigen Raum machen. In $\mathcal{M}^*$ können wir (wegen Homöomorphie mit $\mathcal{M}$) statt der ursprunglichen Metrik ϱ^* die Metrik ϱ, also auch ϱ' einführen. Und in dieser Metrik ist $\mathcal{M}^*$ vollständig; also ist $\mathcal{M}^*$ eine G_δ Menge in R^*.

Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen. **2**

Betrachten wir Funktionen (reelle Funtionen), die auf $\langle 0,1\rangle$ definiert sind.

Ein System von Funktionen heisst ein Bairesches System, wenn

1.) mit $f_1(x), f_2(x)$ auch $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ zum System gehören, solange die betreffende Operation ausführbar ist;
2.) mit $f_1(x), f_2(x), \ldots$ auch $\lim_{n=\infty} f_n(x)$ zum System gehört, wenn die Folge konvergiert (für $0 \leqq x \leqq 1$).

Der Durchschnitt von beliebig vielen Baireschen Systemen ist wieder ein Baireschen System. Weiter ist die Gesamtheit aller auf $\langle 0,1\rangle$ definierten Funktionen auch ein Bairesches System.

Also gibt es zu jedem Funktionensystem Σ ein kleinstes Bairesches System, das Σ enthält (nämlich der Durchschnitt aller B. Systeme, die Σ enthalten).

Ein System von Punktmengen[8] heisst ein Borelsches System, wenn es mit einer Folge $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ von Punktmengen auch ihren Durchschnitt und ihre Vereinigungsmenge enthält.

Der Durchschnitt von beliebig vielen Borelschen Systemen ist wieder ein Borelsches System; alle Punktmengen bilden auch ein Borelsches System. Also gibt es zu jedem System Σ von Mengen ein kleinstes Borelsches System, das Σ enthält (nämlich der Durchschnitt aller B. Systeme, die Σ enthalten).

Das kleinste Bairesche System, das die stetigen Funktionen enthält, wird folgendermassen erhalten: Man nenne „Funktionen 0-ter Klasse" die (auf $\langle 0,1\rangle$) stetigen Funktionen. Wenn α eine Zahl höchstens 2. Zahlklasse ist, und wenn schon alle Klassen $< \alpha$ definiert sind, so bedeutet die α-te Klasse die Gesamtheit aller Funktionen, die sich als Limites konvergenter Folgen von Funktionem von Klassen $< \alpha$ darstellen lassen.

Die Summe, das Produkt und der Quotient von zwei stetigen Funktionen sind wieder stetig, letzteres solange die Division ausführbar ist; also gehören sie in die 0-te Klasse.

Sei bis zur Klasse α exklusive bewiesen: wenn f_1, f_2 von einer Klasse β sind, so ist auch $f_1 \pm f_2$, $f_1 f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$ von der Klasse β, letzteres, wenn die Division durchführbar ist.

Dann seien F_1, F_2 zwei Funktionen der Klasse α; also $F_1 = \lim f_{1,n}$, $F_2 = \lim f_{2,n}$; $f_{i,n}$ von Klasse $< \alpha$; also auch $f_{1,n} \pm f_{2,n}$, $f_{1,n} \cdot f_{2,n}$ sind von Klasse $< \alpha$.

Daher sind $F_1 \pm F_2 = \lim(f_{1n} \pm f_{2n})$, $F_1 F_2 = \lim f_{1n} f_{2n}$ von Klasse α. Die Division bereitet einige Schwierigkeiten.[E5]

---

[8] auf der Zahlengeraden; oder auf $\langle 0,1\rangle$.

[E5] Editorial note: See the note E8.

Wir zeigen zuerst: Mit f ist auch $|f|$ von der Klasse α: denn dies gilt in der 0-ten Klasse, und weiter folgt es durch transfinite Induktion; denn aus $f_n \to f$ folgt $|f_n| \to |f|$.

Daher ist mit f_1, f_2 auch

$$\mathrm{Max}(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{|f_1 - f_2|}{2}$$

und

$$\mathrm{Min}(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{|f_1 - f_2|}{2}$$

von der Klasse α.

~~[Es sei nun $F(x)$ von der Klasse α, $F(x)$ stets $\neq 0$; $F(x) = \lim f_n(x)$]~~[E6]

Den Beweis, dass mit $F(x)$ auch $\frac{1}{F(x)}$ zur Klasse α gehört, wenn $F(x)$ nie Null wird, werden wir erst später führen.[E7]

Wenn nun $\lim f_n(x) = f(x)$, und $f_n(x)$ zur Klasse α_n gehört, so gibt es eine Zahl der 2. Klasse α mit $\alpha > \alpha_n$ für alle n; $f(x)$ ist dann von der Klasse α. Die Funktionen der Klassen $0, 1, \ldots, \alpha, \ldots$ bilden also in der Tat ein Bairesches System. Und zwar das kleinste System, das alle stetige Funkt. enthält. Denn, würde es ein noch kleineres solches System Σ geben, so würde es eine Klasse $\alpha > 0$ geben, so dass alle Klassen $< \alpha$ zu Σ gehören, aber mindestens eine Funktion $f(x)$ der Klasse α nicht zu Σ gehört. Dann wäre

$$f(x) = \lim f_n(x), \quad f_n \text{ von Klasse } < \alpha,$$

also f_n in Σ; es wäre daher Σ kein Bairesches System, gegen Voraussetzung.

Die eben definierten Klassen heissen kurz <u>Bairesche Klassen</u>, die in ihnen enthaltenen Funktionen <u>Bairesche Funktionen</u> oder <u>analytisch darstellbare Funktionen</u>; insbesondere die F. der α-ten Klasse heissen <u>Bairesche F.</u> der α-ten Klasse.

Ebenso zeigt man: Es sei die 0-te Klasse von Mengen definiert als die Gesamtheit aller offenen und abgeschlossenen Mengen.

Wenn die β-te Klasse für jedes $\beta < \alpha$ schon definiert ist (α aus 2. Zahlklasse), so sei die α-te Klasse die Menge aller $\sum_1^\infty \mathcal{M}_n$ und $\prod_1^\infty \mathcal{M}_n$, wo die $\mathcal{M}_n$ zu Klassen $< \alpha$ gehören. Die Gesamtheit der Mengen aller dieser Klassen für alle α aus 2. Zahlklasse ist das kleinste Borelsche System, das die Gesamtheit aller offenen und abgeschlossenen Mengen enthält. Diese Mengen heissen kurz <u>Borelsche Mengen</u>, insb. <u>Bor. Mengen α-ter Klasse.</u>

[E6] Editorial note: The text was crossed out by Jarník.

[E7] Editorial note: See the note E8.

Es bestehen enge Zusammenhänge zwischen den einzelnen Baireschen und Borelschen Klassen. Wir werden jedoch nur die Gesamtheit aller Baireschen Funktionen und aller Borelschen Mengen betrachten. Wir beweisen zunächst:

Satz. Es sei $\mathcal{M}$ eine Borelsche Menge; dann ist $\mathcal{M} = E(f > 0)$, wo f eine geeignete Bairesche Funktion ist.

Beweis: 0 in $E(f > 0)$ spielt keine besondere Rolle; denn mit f ist auch $f + a$ eine Bairesche Funktion und $E(f > 0) = E(f + a > a)$.

Ebenso spielt $E(f < 0)$ dieselbe Rolle wie $E(f > 0)$ ($-f$ statt f). Endlich:

Wenn $M = E(f > 0)$, so kann ich $\varphi = \operatorname{Max}(f, 0)$ setzen; φ ist auch eine Bairesche Funktion und $M = E(\varphi > 0)$.

Weiter setzen wir

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi}{1 + n\varphi};$$

das ist auch eine Bairesche F. (Denn $\frac{1}{f}$, wo f Bairesch von Klasse α, $f > 0$ ist auch Bairesch von Klasse α; Beweis: Es sei $f > 0$ von α-ter Klasse; es sei dies bis zur α-ter Klasse exclusive wahr; $f = \lim f_n(x)$; man kann statt f_n auch $\varphi_n = \operatorname{Max}(f_n, \frac{1}{n})$ schreiben; $f = \lim \varphi_n$, φ_n von Klasse $< \alpha$, also auch $\frac{1}{\varphi_n}$; $\frac{1}{f} = \lim \frac{1}{\varphi_n}$.)[E8]

Und es ist $\psi(x) = 1$ auf M, $\psi(x) = 0$ sonst. Also

$$M = E(\psi - 1 \geqq 0).$$

Also: wenn $M = E(f > 0)$, so ist auch $M = E(\overline{f} \geqq 0)$. ($\overline{f}$ Bairesch)

Wenn umgekehrt $M = E(f \geq 0)$, wo f Bairesch, so ist

$$R - M = E(f < 0);$$

wir bilden $\varphi = \operatorname{Min}(0, f)$;

$$R - M = E(\varphi < 0),$$

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \frac{n\varphi}{1 - n\varphi} = \begin{cases} -1 & \text{auf } R - M \\ 0 & \text{auf } M, \end{cases}$$

$$1 + \psi = \begin{cases} 1 & \text{auf } M \\ 0 & \text{auf } R - M. \end{cases}$$

[E8] Editorial note: If f is of Baire class α and f does not vanish anywhere, then $\frac{1}{f}$ is of Baire class α. One can write, for instance, $\frac{1}{f}$ as the limit of the product of f_n and $\frac{1}{f_n^2 + \frac{1}{n}}$; cf. E5, E7.

Also, wenn $M = E(f \geqq 0)$, so ist auch $M = E(\psi > 0)$ für ein geeignetes Baireschen ψ.

Nun die offenen und abgeschl. Intervalle lassen sich durch Bairesche Funktionen – sogar durch stetige Funktionen – so ausdrücken:

$$(a, b) = E(f > 0), \qquad \langle a, b\rangle = E(f \geqq 0)$$

Und aus diesen Intervallen kann man alle Borelschen Mengen aufbauen. Es genügt also zu zeigen (Transfinite Induktion):

Wenn $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ eine Folge von Mengen ist, von welchen jede die beiden Darstellungen

$$\mathcal{M}_n = E(f_n > 0), \qquad \mathcal{M}_n = E(\varphi_n \geqq 0)$$

zulässt (f_n, φ_n Bairesch), so ist

$$\sum \mathcal{M}_n = E(f > 0), \qquad \prod \mathcal{M}_n = E(\varphi \geqq 0),$$

wo f, φ Bairesch sind.

Wir setzen zu diesem Zweck

$$f(x) = \sup f_m = \lim_{m=\infty} \operatorname{Max}(f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

$$\varphi(x) = \inf \varphi_m = \lim_{m=\infty} \operatorname{Min}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m);$$

f, φ sind Bairesch, und

$$\sum \mathcal{M}_n = E(f > 0),$$

$$\prod \mathcal{M}_n = E(\varphi \geqq 0).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir haben nebenbei noch bewiesen: Zu jeder Borelschen Menge $\mathcal{M}$ gibt es eine Bairesche Funktion $f(x)$, die gleich 1 ist auf $\mathcal{M}$ und gleich 0 sonst.

Satz. Wenn $f(x)$ eine Bairesche Funktion ist, so sind für beliebige a, b

$$E(a \leqq f(x) \leqq b) \qquad \text{und} \qquad E(a < f(x) < b)$$

Borelsche Mengen.

Beweis: Es ist

$$E(a < f < b) = \sum_n E(a + \frac{1}{n} \leqq f \leqq b - \frac{1}{n}),$$

$$E(a \leqq f(x) \leqq b) = \prod_n E(a - \frac{1}{n} < f(x) < b + \frac{1}{n});$$

also wenn $E(a \leqq f \leqq b)$ für alle a, b Borelsch ist, so auch $E(a < f < b)$; und umgekehrt. Ebenso für alle anderen Kombinationen: $E(a < f \leqq b)$, $E(a \leqq f < b)$, $E(a < f)$ u. s. w.

Für die 0-te Klasse (stetige Funktionen) ist der Satz wahr; er sei für alle Klassen $< \alpha$ wahr. Dann sei $f(x) = \lim f_n(x)$ von der Klasse α, f_n von Klasse $\alpha_n < \alpha$.

Dann folgt der Satz für die α-te Klasse sofort aus

$$E(a \leqq f(x) \leqq b) = \prod_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} E\Big(a - \frac{1}{h} \leqq f_n \leqq b + \frac{1}{h}\Big).$$

Wir sehen also: Jede durch eine analytische Bedingung definierte Menge ist Borelsch und umgekehrt.

<u>Satz.</u> Wenn für ein $f(x)$ und jedes a, b gilt: $E(a \leqq f(x) \leqq b)$ ist eine Borelsche Menge, dann ist $f(x)$ analytisch darstellbar.

<u>Beweis.</u> Es genügt, es für beschränkte f zu beweisen. Denn: Es sei $f_n = f(x)$ für $|f| \leqq n$, $f_n = n$ für $f \geqq n$, $f_n = -n$ für $f \leqq n$.
Es sei der Satz für beschr. Funktionen bewiesen;

$$E(a \leqq f_n \leqq b) = E(a \leqq f \leqq b)$$

für $-n \leqq a \leqq b \leqq n$,

$$E(a \leqq f_n \leqq b) = E(f \leqq b)$$

für $a < -n \leqq b \leqq n$,

$$E(a \leqq f_n \leqq b) = E(f \geqq a)$$

für $-n \leqq a \leqq n \leqq b$,

$$E(a \leqq f_n \leqq b) = \langle 0, 1\rangle \quad \text{für} \quad a \leqq -n \leqq n \leqq b,$$

$$E(a \leqq f_n \leqq b) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Also $E(a \leqq f_n \leqq b)$ Borelsch, f_n Bairesch, also auch $f(x)$ Bairesch, da $f(x) = \lim f_n(x)$.

Es sei also $\quad m < f(x) < \mathcal{M}$.

Nun teilen wir $\mathcal{M} - m$ in k gleiche Teile:

$$m = a_0^k, a_1^k, \ldots, a_k^k = \mathcal{M},$$

$$a_i^k = m + \frac{i}{k}\Big(\mathcal{M} - m\Big),$$

$$E_i^k = E(a_{i-1}^k \leqq f < a_i^k).$$

Das sind punktfremde Borelsche Mengen; es sei

$$\varphi_i^k(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } E_i^k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ;$$

also (voriger Satz) $\varphi_i^k(x)$ Bairesch. $\varphi^k(x) = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i^k(x)$ ist auch Bairesch,

$$|f(x) - \varphi^k(x)| \leqq \frac{\mathcal{M} - m}{k}, \quad \text{also} \quad \varphi^k(x) \to f(x).$$

Also ist $f(x)$ eine Bairesche Funktion.

Durch diese Sätze ist gezeigt, wie eng die Bor. Mengen und Baireschen Funktionen zusammenhängen. Wir wollen jetzt zeigen:

Zu jedem α der 2. Zahlklasse gibt es eine Bairesche Funktion, die zur Klasse α, aber zu keiner niedrigeren Klasse gehört; und eine Borelsche Menge, die zur Klasse α, aber zu keiner niedrigeren Klasse gehört.

Es genügt, den die Borelschen Mengen betreffenden Satz zu beweisen. Denn: Zu jedem α der 2. Klasse gibt es ein $\beta = \beta(\alpha)$ der zweiten Klasse mit folgender Eigenschaft: für jede Funktion f der Klasse $\leqq \alpha$ ist $E(a \leqq f \leqq b)$ von der Klasse $\leqq \beta(\alpha)$. Denn, für $\alpha = 0$ ist $\beta = 0$.

Es sei bis zu α exclusive wahr; f eine Funktion höchstens α-ter Klasse; also $f(x) = \lim f_n(x)$, $f_n(x)$ von der Klasse $\alpha_n < \alpha$. $E(a \leqq f_n \leqq b)$ sind also von der Klasse $\leqq \beta(\alpha_n)$.

Es sei $\overline{\beta}$ grösser als $\beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(\nu) \ldots$ für alle $\nu < \alpha$; also $E(a \leqq f_n \leqq b)$ höchstens von der Klasse $\overline{\beta}$ für jedes a, b, n.

Also

$$E(a \leqq f \leqq b) = \prod_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} \left(a - \frac{1}{h} \leqq f_n \leqq b + \frac{1}{h}\right),$$

d. h. $E(a \leqq f \leqq b)$ höchstens von der Klasse $\beta(\alpha) = \overline{\beta} + 3$, w. z. b. w.

Gesetzt nun, der auf die Bor. Mengen sich beziehende Teil des Satzes sei wahr; dagegen seien alle Baireschen Funktionen höchstens von der Klasse α; dann wären, nach dem eben bewiesenen, alle Borelschen Mengen höchstens von der Klasse $\beta(\alpha)$, gegen die Voraussetzung.

Wir brauchen zunächst folgenden Hilfssatz. Zu jeder Ordnungszahl α der 2. Klasse gibt es eine Funktion

$$\Phi_\alpha(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots)^9$$

wo $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ eine beliebige Folge von beliebigen Mengen ist, mit folgender Eigenschaft:

[9] Der „Wert“ von Φ_α ist eine Menge.

Wenn die Folge $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ alle Folgen eines Mengensystems $\mathfrak{M}$ durchläuft, so durchläuft $\Phi_\alpha(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots)$ genau alle Mengen höchstens α-ter Klasse über $\mathfrak{M}$. (Sierpiński)

(Dabei soll 0-te Klasse genau $\mathfrak{M}$ sein; die α-te Klasse besteht aus Vereinigungs- bzw. Durchschnittsmengen von abzählbar vielen Mengen niedrigerer Klassen, je nachdem α gerade oder ungerade ist. $\mathfrak{M}$ soll die letzte Menge enthalten.)

Beweis: Man setze

$$\Phi_0(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots) = \mathcal{M}_1.$$

Zu jeder Zahl α zweiter Art wählen wir eine <u>bestimmte</u> Folge

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad \alpha_k \to \alpha.$$

Es sei nun alles für niedrigere Klassen als α bewiesen.

1.) α erster Art; $\alpha = \tau + 1$

a) τ ungerade (α gerade). Wir setzen

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\tau+1}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots) \\
&\quad = \Phi_\tau(\underbrace{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_5, \dots}_{\text{ungerade Indices}}) + \Phi_\tau(\underbrace{\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6, \mathcal{M}_{10}, \dots}_{\text{Indices } 2(2k+1)}) \\
&\quad + \Phi_\tau(\underbrace{\mathcal{M}_4, \mathcal{M}_{12}, \mathcal{M}_{20}, \dots}_{\text{Indices } 4(2k+1)}) + \dots
\end{aligned}$$

Die Summanden rechts sind Mengen höchstens der Klasse τ, also ist die linke Seite höchstens von der Klasse $\tau + 1 = \alpha$, wenn $\mathcal{M}_i \in \mathfrak{M}$. Umgekehrt, nach geeigneter Wahl von $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_5, \dots,$ $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6, \mathcal{M}_{10}, \dots, \dots,$ stehen rechts beliebig gewählt Mengen der Klasse $\leqq \tau$; also stellt die linke S. wirklich <u>alle</u> Mengen der Klasse $\leqq \tau + 1 = \alpha$ dar.

b) α ungerade (τ gerade)

Wir wählen analog

$$\begin{aligned}
\Phi_{\tau+1}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \dots) &= \Phi_\tau(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_5, \dots) \cdot \Phi_\tau(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6, \dots) \\
&\quad \cdot \Phi_\tau(\mathcal{M}_4, \mathcal{M}_{12}, \dots) \dots
\end{aligned}$$

2.) α sei von zweiter Art

Man setze

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots) &= \Phi_{\alpha_1}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_5, \dots) \\
&\quad + \Phi_{\alpha_2}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6, \mathcal{M}_{10}, \dots) + \dots \qquad (*)
\end{aligned}$$

Links steht eine Menge der Klasse $\leqq \alpha$. Aber es sei umgekehrt P von der Klasse $\leqq \alpha$, also $P = P_1 + P_2 + \dots$, P_n von Klasse $\beta_n < \alpha$. Es gibt zu jedem β_n ein α_{k_n} mit $\alpha_{k_n} > \beta_n$; und man kann die α_{k_n} noch so wählen, dass sie wachsen; dann ist P_n von der Klasse $\leqq \alpha_{k_n}$. Wir können nur die $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ in $\mathcal{M}$ so wählen, dass die rechte Seite von $(*)$ ist

$$\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{k_1 - 1} + P_1 + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{k_2 - k_1 - 1} + P_2 + \dots;$$

also durchläuft die linke Seite von $(*)$ wirklich alle Mengen der Klasse $\leqq \alpha$.

Wir wollen nun folgende Funktionen Φ bilden: Es sei $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{n}\}$ eine fest gegebene Menge von nichtabnehmenden Folgen natürlicher Zahlen: $\mathfrak{n} = \{i_1 \leqq i_2 \leqq i_3 \leqq \dots\}$. Wenn $\mathfrak{m} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots\}$ eine Mengenfolge ist, so sei

$$\Phi^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{m}) = \sum_{\mathfrak{n} \text{ aus } \mathfrak{N}} \Phi(\mathfrak{n}),$$

wo

$$\Phi(\mathfrak{n}) = \mathcal{M}_{i_1} \mathcal{M}_{i_2} \dots$$

Ich behaupte nun:

Man kann zu jedem α 2. Zahlklasse das $\mathfrak{N}_\alpha$ so bilden, dass die

$$\Phi^{\mathfrak{N}_\alpha}(\mathfrak{m}),$$

wenn $\mathfrak{m}$ alle Folgen aus einem (beliebigen) Mengensystem $\mathfrak{M}$ durchläuft, genau alle Mengen der Klasse $\leqq \alpha$ über $\mathfrak{M}$ darstellen.

Beweis: dies ist klar für die 0-te Klasse; es genügt

$$\mathfrak{N}_0 = \text{ der einzigen Folge } (1, 1, 1, \dots)$$

zu wählen.

Nun transf. Induktion:

1.) Es sei α gerade.

a) $\alpha = \beta + 1$. Dann stellt

$$\Phi(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots) = \Phi_\beta(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_5, \dots) \\ + \Phi_\beta(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6, \mathcal{M}_{10}) + \Phi_\beta(\mathcal{M}_4, \mathcal{M}_{12}, \dots) + \dots$$

genau die Mengen $\beta + 1 = \alpha$-ter Klasse dar.

Dabei ist

$$\Phi_\beta(\mathcal{M}_{2^k}, \mathcal{M}_{2^k \cdot 3}, \dots, \mathcal{M}_{2^k(2n+1)}, \dots) \\ = \Phi^{\mathfrak{N}_\beta}(\mathfrak{m}) = \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}_\beta} \Phi(\mathfrak{n}),$$

wo

$$\Phi(\mathfrak{n}) = \mathcal{M}_{2^k(2i_1+1)} \cdot \mathcal{M}_{2^k(2i_2+1)} \cdots,$$

falls $\mathfrak{n} = \{i_1, i_2, \dots\}$.

Man sieht, dass man $\mathfrak{N}_\alpha$ bekommt, indem man alle Folgen folgendes Art betrachtet: für jedes feste k bilde man die Folgen $2^k(2i_1+1), 2^k(2i_2+1)\dots$, wenn $i_1, i_2, \dots$ eine Folge aus $\mathfrak{N}_\beta$ ist.

Analog, wenn

b) α Limeszahl; man muss hier (bei der wie vorhin fest gewählten Folge $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots \to \alpha$) zu jedem festen k alle Folgen $2^k(2i_1+1), 2^k(2i_2+1)\dots$ bilden, wo $i_1, i_2, \dots$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{N}_{\alpha_k}$ (bei demselben k) ist.

2.) α ungerade; $\alpha = \beta + 1$ hier war

$$\Phi_\alpha(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots) = \Phi_\beta(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3 \dots) \cdot \Phi_\beta(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6) \cdot \dots$$

Wegen

$$\Phi_\beta = \Phi^{\mathfrak{N}_\beta} = \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}_\beta} \Phi(\mathfrak{n})$$

sind hier die Folgen aus $\mathfrak{N}_\alpha$ die „Vereinigungsfolgen“ immer von abzählbar vielen Folgen

$$\begin{array}{lll}
2^0(2i_l^0+1) & & (l = 1, 2, \dots, \\
2^1(2i_l^1+1) & & k = 0, 1, 2, \dots; \\
\dots\dots\dots\dots & & \\
2^k(2i_l^k+1) & i_1^k, i_2^k \dots & \text{eine bel. Folge aus } \mathfrak{N}_\beta).
\end{array}$$

Damit ist die Beh. bewiesen.

Die Suslinschen – oder $\mathcal{A}$-Mengen über ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ sind folgendermassen definiert: **3**

Man nehme aus $\mathfrak{M}$ irgend ein abzählbares Mengensystem und numeriere es so:

$$(*) \quad \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots; \mathcal{M}_{1,1}, \mathcal{M}_{1,2}, \mathcal{M}_{2,1}, \dots; \mathcal{M}_{1,1,1}, \mathcal{M}_{1,1,2}, \dots; \mathcal{M}_{i_1,i_2,\dots,i_k}, \dots$$

($k, i_1, i_2, \dots, i_k$ voneinander unabh. natürliche Zahlen). Aus diesem abzählbaren System nehme man eine Folge – sog. Kette heraus:

$$\mathcal{M}_{i_1}; \mathcal{M}_{i_1,i_2}; \mathcal{M}_{i_1,i_2,i_3}; \dots$$

(i_1 fest in der ganzen Folge; ebenso i_2 von dem 2. Glied an usw.).

Der Durchschnitt aller Mengen dieser Kette heisst Kern der Kette. Und die Vereinigungsmenge der Kerne aller Ketten, die aus dem System $(*)$ gebildet werden können, heisst eine Suslinsche Menge über $\mathfrak{M}$.

Es gibt ein System $\mathfrak{N}$ von Folgen natürlicher Zahlen, so dass durch

$$\Phi^{(\mathfrak{N})}(\mathfrak{m}),$$

wo $\mathfrak{m}$ alle Mengenfolgen aus $\mathfrak{M}$ durchläuft, genau alle $\mathcal{A}$-Mengen über $\mathfrak{M}$ dargestellt werden.

Beweis: Wir nehmen ein System $(*)$ aus $\mathfrak{M}$ und werden es so unnumerieren:

$$\mathcal{M}_{i_1,i_2,\dots i_k} = \mathcal{M}^{m(i_1,i_2,\dots,i_k)},$$

wo

$$m(i_1,i_2,\dots,i_k) = 2^{i_1-1} + 2^{i_1+i_2-1} + \dots + 2^{i_1+\dots+i_k-1}.$$

(Also im dyadischen System:

$$m(i_1,i_2,\dots,i_k) = 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{i_k-1 \text{ Nullen}}1\underbrace{000\ldots}_{i_{k-1}-1}0\ldots\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{i_1-1}\Big)$$

Eine Kette aus dem System $(*)$ ist dann nichts anderes als eine Folge

$$\mathcal{M}^{m(i_1)}, \mathcal{M}^{m(i_1,i_2)}, \mathcal{M}^{m(i_1,i_2,i_3)}, \dots$$

wo $i_1, i_2, \dots$ eine beliebige Folge von wachsenden Zahlen ist; also genügt es, $\mathfrak{N} =$ der Gesamtheit aller Folgen $m(i_1), m(i_1,i_2), \dots$ zu setzen.

(Diese Folgen (im dyad. Syst.) sehen etwa so aus:

$$10, \quad 110, \quad 1000110, \quad 101000110, \quad 100101000110, \quad \dots\Big)$$

Ich will zeigen, dass es Borelsche Mengen jeder Klasse gibt.

Zunächst dürfen wir statt der Menge aller reellen Zahlen R^1 die Menge $\mathcal{I}$ der Irrationalzahlen betrachten: denn diese ist ein G_δ, also bedeutet „Menge α-ter Klasse in bez. auf $\mathcal{I}$“ dasselbe wie „Menge α-ter Kl. in bez. auf R^1“, wenn $\alpha > 1$.

Es sei $x = (i_1, i_2, \dots, i_m, \dots)$ eine irrationale Zahl. Als die m-te Umgebung von x $\mathcal{U}_m(x)$ bezeichnen wir die Menge der Irrationalzahlen, deren Kettenbruchentwickelung mit $i_1, i_2, \dots, i_m$ anfängt. Die Gesamtheit aller dieser Umgebungen ist abzählbar:

$$\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_m, \dots\} = \mathfrak{M}.$$

Zu jeder Irrationalzahl $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ ordne ich eine bestimmte Menge α-ter Klasse $X^\alpha(x)$ über $\mathfrak{M}$ folgendermassen:

Ich wende die Operation $\Phi^{\mathfrak{N}_\alpha}$ auf die Folge

$$\{\mathcal{U}_{x_1}, \mathcal{U}_{x_2}, \dots, \mathcal{U}_{x_k}, \dots\} = \mathfrak{m}$$

an:

$$X^\alpha(x) = \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}_\alpha} \Phi(\mathfrak{n}).$$

Es sei A die Menge der Irrationalzahlen x mit $x \subset X^\alpha(x)$; B die Menge derjenigen Irrationalzahlen mit $x \not\subset X^\alpha(x)$.

Wenn ich statt $\mathfrak{N}_\alpha$ die früher definierte Gesamtheit $\mathfrak{N}$ nehme, bekomme ich so als $X(x)$ alle $\mathcal{A}$-Mengen über $\mathfrak{M}$; es sei wieder

$$A = \{x,\, x \subset X(x)\},$$
$$B = \{x,\, x \not\subset X(x)\}.$$

Es sei $A_k = \{x,\, x \subset \mathcal{U}_{x_k}\}$.

Aus $x \in A$ folgt $x \in X^\alpha(x)$ (bei $\mathcal{A}$-Mengen ist der Index α wegzulassen); also

$$x \in \mathcal{U}_{x_k},$$

wo die k eine in $\mathfrak{N}_\alpha$ bzw. in $\mathfrak{N}$ enthaltene Folge durchlaufen.

Es gehört dann A zu der entsprechenden Folge der A_k; d. h.

$$(*) \qquad x \in \Phi^{\mathfrak{N}_\alpha}(A_1, A_2, \dots).$$

Wenn umgekehrt $(*)$ gilt, so ist x in einer in $\mathfrak{N}_\alpha$ enthaltenen Teilfolge der A_k enthalten, also $x \subset \mathcal{U}_{x_k}$ für eine erlaubte Teilfolge der x; also $x \subset X^\alpha(x)$.

Es ist also $A = \Phi^{\mathfrak{N}_\alpha}(A_1, A_2, \dots)$.

Es sei $x \subset A_k$ für ein x; also $x \subset \mathcal{U}_{x_k}$; alle (irration.) Zahlen, die hinreichend nahe an x liegen, liegen auch in $\mathcal{U}_{x_k}$ und haben x_k an der k-ten Stelle der Kettenbruchentwickelung. Also ist A_k offen.

‖ D. h. A ist eine Borelsche Menge höchstens der Klasse α über $\mathfrak{M}$

bzw.

‖ A ist eine $\mathcal{A}$-Menge über $\mathfrak{M}$. B ist aber keine Borelsche Menge der Klasse α bzw. keine $\mathcal{A}$-Menge;

denn sonst wäre $B = X^\alpha(x_0)$ für ein bestimmtes x_0; und entweder $x_0 \subset A$, d. h. $x_0 \subset X^\alpha(x_0)$, also $x_0 \subset B$ – das ist aber ein Widerspruch, da $AB = 0$; oder aber

$$x_0 \subset B, \quad \text{also} \quad x_0 \not\subset X^\alpha(x_0), \quad x_0 \not\subset B$$

– was wieder ein Widerspruch ist.

B ist aber im ersten Falle eine Borelsche Menge, denn:

‖ Die komplementärm. einer Borelschen Menge ist wieder eine Borelsche Menge.

Beweis: Es sei $\mathcal{M}$ Borelsch; also $\mathcal{M} = (f(x) \leqq a)$ für eine anal. darstellb. Funktion $f(x)$; also ist die Komplementärmenge $(f(x) > a)$, d. h. auch Borelsch.

Wir zeigen nun: Jede Borelsche Menge ist eine $\mathcal{A}$-Menge.

Dazu genügt es zu zeigen: Die Summe und Durchschnitt von abzählbar vielen $\mathcal{A}$-Mengen ist wieder eine $\mathcal{A}$-Menge.

Und dazu genügt es folgendes zu zeigen: Die $\mathcal{A}$-Operation auf ein Mengensystem $(\mathcal{M}_{i_1 i_2 \dots})$ wurde definiert als die Summe der Kerne aller Ketten dieses Mengensystems. Es genügt also, zweierlei zu zeigen:

‖ 1.) Summe und Durchschnitt von abz. vielen Mengen ist ein Spezialfall der A-Operation.

‖ 2.) Die A-Operation, auf $\mathcal{A}$-Mengen angewandt, gibt wieder $\mathcal{A}$-Mengen.[10]

Beweis von 1.):

a) $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots$; wir wählen $\mathcal{M}_{i_1 i_2 \dots i_k} = \mathcal{M}_{i_1}$; also die Summe der Kerne aller Ketten ist $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \dots$.

b) $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots$; wir setzen $\mathcal{M}_{i_1 i_2 \dots i_k} = \mathcal{M}_k$; der Kern ist $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots$, die Summe der Kerne also auch $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_3 \dots$

Beweis von 2.):

Es sei $\left\{A^{i_1 i_2 \dots i_k}\right\}$ ein System von $\mathcal{A}$-Mengen; also

$$A^{i_1 i_2 \dots i_k} = A\Big(\mathcal{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}\Big).$$

Wir sollen die „Grundmengen“ $\mathcal{M}^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_h}$ so unnummerieren, dass

$$A(A^{i_1 \dots i_k}) = A\big(\mathcal{M}_{\lambda_1 \dots \lambda_k}\big)$$

Das machen wir so:

Ich ordne die abz. vielen Mengen

$$\mathcal{M}^{i_1}_{h_1^1} = \mathcal{M}_{\lambda_1}.$$

(Die Zuord. von i_1, h_1^1 zu λ_1 ist eineindeutig.) Weiter

$$\mathcal{M}_{\lambda_1, \lambda_2} = \mathcal{M}^{i_1}_{h_1^1} \mathcal{M}^{i_1}_{h_1^1 h_2^1} \mathcal{M}^{i_1 i_2}_{h_1^2}$$

[10] Wenn der Durchschnitt von endlich vielen Grundmengen wieder eine Menge des Grundsystems ist.

(bei gegeb. λ_1 soll die Zuordnung $(h_2^1, i_2, h_1^2) \to \lambda_2$ eineindeutig sein).

Allgemein

$$\mathcal{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k} = \mathcal{M}_{h_1^1}^{i_1} \mathcal{M}_{h_1^1 h_2^1}^{i_1} \ldots \mathcal{M}_{h_1^1 h_2^1 \ldots h_k^1}^{i_1} \cdot \mathcal{M}_{h_1^2}^{i_1 i_2} \mathcal{M}_{h_1^2 h_2^2}^{i_1 i_2} \ldots \mathcal{M}_{h_1^2 \ldots h_{k-1}^2}^{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot \mathcal{M}_{h_1^k}^{i_1 i_2 \ldots i_k};$$

$x \subset A(A^{i_1 i_2} \ldots)$ ist gleichbedeutend mit:

Es gibt eine Folge $i_1, i_2, \ldots$ und eine Folge von Folgen $h_1^l, h_1^l h_2^l, \ldots$, so dass

$$x \subset \mathcal{M}_{h_1^k h_2^k \ldots h_l^k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

für alle k. Das ist aber nach dem Bildungsgesetz der $\mathcal{M}_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}$ gleichbedeutend damit, dass

$$x \subset \mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}$$

für alle k und eine geeignete Folge

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn wir also die $\mathcal{A}$-Mengen über das System der offenen und abgeschlossenen Mengen in bezug auf die Menge $\mathcal{I}$ der Irrationalzahlen betrachten, dürfen wir unterscheidslos entweder von abgeschlossenen oder offenen Mengen ausgehen, denn jedes F ist ein G_δ, jedes G ein F_σ; ebenso können wir sogar als das Grundsystem $\mathfrak{M}$ die Menge der Baireschen Umgebungen $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ nehmen, da sich jede offene Menge in $\mathcal{I}$ aus abzählbar vielen solchen Umgebungen aufbauen lässt.

($[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ ist die Menge aller Irrationalzahlen, deren Kettenbruchentwickelung mit $i_1 + \frac{1|}{|i_2} + \frac{1|}{|i_3} + \ldots \frac{1|}{|i_k}$ beginnt.)

Wir behaupten nun: wenn

$$A = S(\mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k})$$

eine nicht leere $\mathcal{A}$-Menge ist (S bedeutet die A-Operation), so kann man die $\mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k}$ so modifizieren, dass:

1.) $\mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k}$ ist eine Bairesche Umgebung k-ten Ranges (d. h. ein $[i_1, i_2 \ldots i_k]$).

2.) $\mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k} \supset \mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k u_{k+1}}$.

3.) Der Durchmesser von $\mathcal{F}_{u_1 u_2 \ldots u_k}$ strebt gegen Null mit wachsendem k.

4.) Jede Kette hat genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis:

3. und 4. sind unmittelbare Folgerungen von 1., 2.

Wir führen nun folgendes ein: Es seien schon $\mathcal{F}_{u_1\dots u_k}$ Bairesche Umgebungen – das geht, wie eben gezeigt. Nun wollen wir erstens die $\mathcal{F}_{u_1\dots u_k}$ zu $\Phi_{i_1 i_2\dots i_k}$ so modifizieren, dass $\Phi_{i_1 i_2\dots i_k}$ eine Bairesche Umgebung mindestens k-ten Ranges ist. Und zwar folgendermassen:

1.) $\Phi_{i_1} = \mathcal{F}_{i_1}$

2.) Wenn $\mathcal{F}_{i_1 i_2}$ vom Rang $\geqq 2$ ist, so sei

$$\mathcal{F}^1_{i_1,i_2} = \mathcal{F}_{i_1,i_2}.$$

Sonst zerlege ich $\mathcal{F}_{i_1 i_2}$ in abzählbar viele Umgeb. 2. Ranges

$$\mathcal{F}_{i_1 i_2} = \mathcal{F}^1_{i_1,i_2} + \dots + F^m_{i_1,i_2} + \dots$$

(Denn $[k] = [k,1] + [k,2] + \dots$)

Und nun sei

$$\Phi_{h_1} = \mathcal{F}_{i_1} \quad (h_1 = i_1).$$

Die $\mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^m_{i_1 i_2}$ numeriere ich durch als

$$\Phi_{h_1 h_2} = \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^{m_2}_{i_1 i_2}$$

(mit dem h_1, das zu i_1 entspricht).

Es sei schon

$$\Phi_{h_1\dots h_n} = \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^{m_2}_{i_1 i_2}\dots\mathcal{F}^{m_n}_{i_1\dots i_n};$$

dann setze ich

$$\mathcal{F}^1_{i_1\dots i_n i_{n+1}} = \mathcal{F}_{i_1\dots i_{n+1}},$$

wenn der Rang von $\mathcal{F}_{i_1\dots i_{n+1}}$ mindestens $n+1$ ist; sonst zerlege ich $\mathcal{F}_{i_1\dots i_{n+1}}$ in abz. viele Umg. $n+1$-ten Ranges

$$\mathcal{F}_{i_1\dots i_{n+1}} = \sum \mathcal{F}^m_{i_1\dots i_{n+1}}$$

und numeriere so

$$\Phi_{h_1\dots h_n h_{n+1}} = \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^{m_2}_{i_1 i_2}\dots\mathcal{F}^{m_n}_{i_1\dots i_n}\mathcal{F}^{m_{n+1}}_{i_1\dots i_{n+1}}$$

(die h_{n+1} sind den Paaren (m_{n+1}, i_{n+1}) eineindeutig zugeordnet).

Es sei $B = S(\Phi^{m_1}_{h_1 h_2\dots h_n})$. Aus $x \subset A$ folgt $x \subset \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}_{i_1 i_2}\dots\mathcal{F}_{i_1\dots i_n}\dots$ also

$$x \subset \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^{m_2}_{i_1 i_2}\mathcal{F}^{m_3}_{i_1 i_2 i_3}\dots$$

d. h.

$$x \subset \Phi_{h_1}\Phi_{h_1 h_2}\Phi_{h_1 h_2 h_3}\dots,$$

also $x \subset B$.

Aus $x \subset B$ folgt

$$x \subset \Phi_{h_1}\Phi_{h_1h_2}\cdots = \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}^{m_2}_{i_1i_2}\cdots \subset \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}_{i_1i_2}\cdots \subset A.$$

Also $A = B = S(\Phi_{h_1h_2\ldots h_n})$.

Es sei also

$$A = S(\mathcal{F}_{u_1u_2\ldots u_k}),$$

wo $\mathcal{F}_{u_1\ldots u_k}$ eine Bairesche Umgeb. mindestens k-ten Ranges ist; und

$$\mathcal{F}_{u_1u_2\ldots u_{k+1}} \subset \mathcal{F}_{u_1u_2\ldots u_k}.$$

Es sei $\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_1i_2}, \ldots \mathcal{F}_{i_1i_2\ldots i_k}$ eine Kette; wenn ihr Durschnitt nicht leer ist, so ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i_1} &= [m_1m_2\ldots m_{\nu_1}] \\ \mathcal{F}_{i_1i_2} &= [m_1\ldots m_{\nu_2}] \end{aligned}$$

u. s. w., wo $k \leqq \nu_k \leqq \nu_{k+1}$.

Wir setzen

$$\Phi_{i_1,i_2\ldots i_k} = [m_1\ldots m_k];$$

dann ist

$$\Phi_{i_1,i_2\ldots i_k} \supset \mathcal{F}_{i_1\ldots i_k};$$

also: aus $x \subset \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}_{i_1i_2}\ldots$ folgt $x \subset \Phi_{i_1}\Phi_{i_1i_2}\ldots$, also $x = \{m_1, m_2, \ldots\}$; d. h. die Φ-Kette hat genau einen gemeinsamen Punkt, u. zwar denselben, wie die $\mathcal{F}$-Kette. Also erzeugen die (von 0 verschiedenen) Φ dieselbe $\mathcal{A}$-Menge wie die $\mathcal{F}$.

Wir müssen noch diejenigen Ketten beseitigen, die einen leeren Durchschnitt haben. Das geschieht so:

Ich streiche alle leeren Φ_{i_1}, und alle diejenigen Φ_{i_1} überhaupt, für welche alle mit Φ_{i_1} beginnenden Ketten leer sind. Die übringbleibenden unnummeriere ich so, dass i_1 wieder alle nat. Zahlen durchläuft (freilich muss ich auch die 1. Indizes der $\Phi_{i_1i_2}, \Phi_{i_1i_2i_3}, \ldots$ entsprechend unnumerieren; wenn nur endlich viele Φ_{i_1} übrig bleiben, so nehme ich eine von ihnen ∞ oft).

Ebenso weiter mit den $\Phi_{i_1i_2}$ u. s. w.

Dann erzeugen die unnummerierten Φ wieder die Menge A; und sie haben offenbar alle verlangten Eigenschaften.

w. z. b. w.

Satz: Jede nich abzählbare $\mathcal{A}$-Menge enthält eine perfekte Teilmenge (hat also die Mächtigkeit des Kontinuums).

Beweis: Es sei $A = S(\mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots i_k})$; die $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ seien Bairesche Umg. k-ten Ranges, $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k} \supset \mathcal{F}_{i_1 \dots i_{k+1}}$. Wir streichen alle diejenigen $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ weg, für welche

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = S(\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k h_{k+1} \dots h_r})$$

(bei veränderl. $h_{k+1}, h_{k+2}, \dots$) abzählbar ist.

Dann enthält also jedes übrigbleibende $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ unabzählbar viele Punkte von A. Zu $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ gibt es dann ein $k' > k$, so dass es unter den übrigbleibenden $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k \dots i_{k'}}$ mindestens zwei geometrisch verschiedene gibt: denn sonst würde es (geometrisch) nur eine übrigbleibende Kette durch $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ geben, und die hat nur einen Punkt als Durchschnitt, und nicht unabzählbar viele.

Wir nehmen also ein übriggebliebenes $\mathcal{F}_1 = \Phi$; finden ein k_1, zu welchem es zwei verschiedene Nachfolger Φ_0, Φ_1 gibt; dann gibt es zu Φ_0 wieder zwei verschiedene Nachfolger Φ_{00}, Φ_{01} und ebenso Φ_{10}, Φ_{11} zu Φ_1 u. s. w.

$$\Psi_k = \sum_{h_1 \dots h_k = 0}^{1} \Phi_{h_1 \dots h_k}$$

sind abgeschlossene Mengen; ebenso

$$\Psi = \Psi_1 \Psi_2 \dots;$$

Ψ ist in A enthalten. Und Ψ ist unabzählbar: denn jede Folge $\Phi_{h_1} \Phi_{h_1 h_2} \dots$ definiert eineindeutig einen Punkt von Ψ.

w. z. b. w.

|| Jede $\mathcal{A}$-Menge ist ein stetiges Bild der Menge der Irrationalzahlen.

Beweis: Es sei $A = S(F_{i_1 \dots i_k})$, wo wieder $F_{i_1 \dots i_k} \supset F_{i_1 \dots i_{k+1}}$ und $F_{i_1 \dots i_k}$ eine Bairesche Umg. k-ten Ranges ist. Zu jedem irration. $x = (i_1, i_2, \dots)$ gibt es genau eine Kette

$$\mathcal{F}_{i_1} \supset \mathcal{F}_{i_1 i_2} \supset \dots,$$

die genau einen Punkt $f(x)$ enthält. Da die Durchmesser der $F_{i_1 \dots i_k}$ mit k gegen 0 streben, so ist für $\varepsilon > 0$, $m > m(\varepsilon)$: für $x' \subset [i_1 \dots i_m]$ ist

$$f(x') \subset F_{i_1 \dots i_m}$$

aber auch $f(x) \subset F_{i_1 \dots i_m}$, also

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad -$$

$f(x)$ <u>stetig</u>.

Es ist noch für uns einer der Hauptsätze, denn sich dieser Satz auch umkehren lässt. Das kommt später.

|| Jede Borelsche Menge ist eine $\mathcal{A}$-Menge, deren Komplement auch eine $\mathcal{A}$-Menge ist.

Denn das Komplement eines Bor. Menge ist sogar eine Borelsche Menge. Auch dieser Satz ist umkehrbar; diese Umkehrung wollen wir jetzt beweisen.

Satz: Wenn $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{A}$-Menge ist, und wenn auch die Komplementärmenge $\mathcal{R} - \mathcal{M}$ eine $\mathcal{A}$-Menge ist, so ist $\mathcal{M}$ eine Borelsche Menge.

Beweis: Wir sagen: Zwei Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ lassen sich durch Borelsche Mengen trennen, wenn es zwei B. Mengen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ gibt, so dass

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{A}, \qquad \mathcal{B}' \supset \mathcal{A}', \qquad \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0.$$

Es genügt zu zeigen, dass sich $\mathcal{M}$ von $\mathcal{R} - \mathcal{M}$ durch Borelsche Mengen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ trennen lassen: denn dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{M}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{R} - \mathcal{M}$. Aber es gilt sogar etwas allgemeiner der Satz: Wenn 2 Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sich durch Borelsche Mengen trennen lassen, so ist $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Borelsch in bezug auf den Raum $\mathcal{A} + \mathcal{A}'$; denn aus

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}' \supset \mathcal{A}', \quad \mathcal{B}\mathcal{B}' = 0$$

folgt

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A} + \mathcal{A}')\mathcal{B}, \quad \mathcal{A}' = (\mathcal{A} + \mathcal{A}')\mathcal{B}'.$$

Wir haben nur folgendes zu zeigen: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ seien zwei $\mathcal{A}$-Mengen in einem vollst. Raum, $\mathcal{A}\mathcal{A}' = 0$; dann lassen sich $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ durch Borelsche Mengen trennen.

Hilfssatz Es sei $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_k \neq 0$ für $k = 1, 2, \dots$, und $\mathcal{A}_0$ lasse sich von jedem $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ durch Borelsche Mengen trennen; dann lässt sich auch $\mathcal{A}_0$ von $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ trennen.

Beweis: Es gibt Borelsche Mengen $\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_m^0$ $(m = 1, 2, \dots)$ mit

$$\mathcal{B}_m^0 \supset \mathcal{A}_0, \quad \mathcal{B}_m \supset \mathcal{A}_m, \quad \mathcal{B}_m^0\mathcal{B}_m = 0.$$

Es sei $\mathcal{B} = \sum \mathcal{B}_m$; $\mathcal{B}_0 = \prod \mathcal{B}_m$; dann ist $\mathcal{B} \supset \sum \mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{A}_0$,

$$\mathcal{B}\mathcal{B}_0 = \sum_m \mathcal{B}_m \prod_n \mathcal{B}_n^0 \subset \sum \mathcal{B}_m\mathcal{B}_n^0 = 0.$$

Hilfssatz $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ mögen sich von einander durch B. Mengen trennen lassen; d. h. zu jedem Paar i, k gibt es zwei Borelsche Mengen $\mathcal{B}_{ik}$, $\mathcal{B}_{ki}$ mit $\mathcal{B}_{ik} \supset A_i$, $\mathcal{B}_{ki} \supset A_k$, $\mathcal{B}_{ik}\mathcal{B}_{ki} = 0$ für $i \neq k$. Dann lassen sich Borelsche Mengen $\mathcal{B}_i$ so finden, dass $\mathcal{B}_i \supset \mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i\mathcal{B}_k = 0$ für $i \neq k$.

Beweis: Ich trenne nach dem vorangehenden Hilfssatz $\mathcal{A}_n$ von $\sum_{i \neq m} \mathcal{A}_i$ durch $\mathcal{B}_m^* \supset \mathcal{A}_m$; $\mathcal{B}'_m \supset \sum_{i \neq m} \mathcal{A}_i$; $\mathcal{B}_m^*\mathcal{B}'_m = 0$.

Es sei

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{B}'_1\mathcal{B}'_2 \dots \mathcal{B}'_{m-1}\mathcal{B}_m^*\mathcal{B}'_{m+1} \dots;$$

dann ist $\mathcal{B}_m \supset \mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_n\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_m^*\mathcal{B}'_m = 0$ für $n \neq m$.

Nun den Hauptsatz; es sei

$$\mathcal{A} = S(\mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}), \qquad \mathcal{A}' = S(\mathcal{F}'_{j_1 j_2 \ldots j_k}), \qquad \mathcal{A}\mathcal{A}' = 0.$$

Es sei $\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_k}$, $\mathcal{F}'_{j_1 \ldots j_k}$ eine k-te Bairesche Umgebung,

$$\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_k} \supset \mathcal{F}_{i_1 \ldots i_{k+1}}; \qquad \mathcal{F}'_{j_1 \ldots j_k} \supset \mathcal{F}'_{j_1 \ldots j_{k+1}}.$$

Es sei $\mathcal{A}_{i_1 \ldots i_k} = S(\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_k j_{k+1} \ldots j_k})$. Ebenso $\mathcal{A}'_{i_1 \ldots i_k}$.

Wäre die Trennung von $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ nicht möglich, so wäre (wegen $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}_{i_1}$, $\mathcal{A}' = \sum \mathcal{A}'_{i_1}$) auch mindestens ein $\mathcal{A}_{i_1}$ von mind. einem $\mathcal{A}'_{j_1}$ nicht trennbar (nach dem 1. Hilfssatz); ebenso dann ein $\mathcal{A}_{i_1 i_2}$ von einem $\mathcal{A}'_{j_1 j_2}$ u. s. w.

Weil

$$\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_k} \supset A_{i_1 \ldots i_k}, \quad \mathcal{F}'_{j_1 \ldots j_k} \supset A'_{j_1 \ldots j_k},$$

und weil $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ Borelsch sind, so wären die eingeschachtelten abgeschlossenen Mengen $\Phi_1 = \mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}'_{j_1}$, $\Phi_2 = \mathcal{F}_{i_1 i_2}\mathcal{F}'_{j_1 j_2} \ldots$ nicht leer; also würde es einen Punkt geben, der zu $\Phi_1 \Phi_2 \ldots$ gehört, also auch zu

$$\mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}_{i_1 i_2} \ldots$$

und zu

$$\mathcal{F}'_{j_1}\mathcal{F}'_{j_1 j_2} \ldots$$

also zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ – gegen Voraussetzung.

Wir wissen:

$f(x)$ ist dann und nur dann analytisch darstellbar, wenn[E9]

$$\mathcal{M}(f > a), \quad \mathcal{M}(f \leqq a), \quad \mathcal{M}(f < a), \quad \mathcal{M}(f \geqq a)$$

für jedes a Borelsche Mengen sind; weil aber hier zu jeder Menge auch ihr Komplement vorkommt so genügt es, vorauszusetzen, dass diese Mengen $\mathcal{A}$-Mengen sind; dann sind sie auch Borelsch.

Also:

$f(x)$ ist genau dann analytisch darstellbar, wenn für jedes a die 4 Mengen

$$\mathcal{M}(f > a), \quad \mathcal{M}(f \leqq a), \quad \mathcal{M}(f < a), \quad \mathcal{M}(f \geqq a)$$

$\mathcal{A}$-Mengen sind.

Es genügt sogar, dies für rationale a zu fordern; denn z. B. für $a_n > a$, $a_n \to a$ ist

$$\mathcal{M}(f > a) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(f > a_n)$$

[E9] Editorial note: Here the previous notation $E(f > a)$ is replaced by $\mathcal{M}(f > a)$.

Wir beweisen noch:

‖ Jedes stetige Bild der Menge aller Irrationalzahlen ist eine $\mathcal{A}$-Menge

und noch allgemeiner

‖ Jedes stetige Bild einer $\mathcal{A}$-Menge ist eine $\mathcal{A}$-Menge.

Beweis:

Es sei

$$A = S(\mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots i_k}), \quad \mathcal{F}_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset \mathcal{F}_{i_1 \dots i_k i_{k+1}},$$

$\mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}$ sei eine Bairesche Umgebung k-ten Ranges.

Es sei

$$\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k} = A \cdot \mathcal{F}_{i_1 \dots i_k}.$$

In A sei eine stetige Funktion $f(x)$ definiert;

$$f(A) = A'.$$

$$f(\mathcal{A}_{i_1 \dots i_k}) = \mathcal{A}'_{i_1 \dots i_k}.$$

Wir bilden die abgeschl. Hülle

$$\overline{A}'_{i_1 \dots i_k} = \mathcal{F}'_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Es sei $S(\mathcal{F}'_{i_1 i_2 \dots i_k}) = A^*$. Es sei $x \in A$; also

$$x = \mathcal{F}_{i_1} \mathcal{F}_{i_1 i_2} \dots$$

Also

$$x \subset \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

also

$$f(x) \subset \mathcal{A}'_{i_1 \dots i_k} \subset \mathcal{F}'_{j_1 \dots j_k}.$$

Also

$$f(x) \subset \mathcal{F}'_{j_1} \mathcal{F}'_{j_1 j_2 \dots}$$

Also

$$f(x) \subset A^*;$$

also

$$A' \subset A^*.$$

Wenn wir noch zeigen, dass die Durchmesser $\delta \mathcal{F}'_{i_1 \dots i_k}$ in jeder Kette mit wachsendem k gegen Null streben, so folgt daraus: Jede Kette $\mathcal{F}'_{i_1} \dots \mathcal{F}'_{i_1 \dots i_k} \dots$ enthält höchstens einen Punkt; sie enthält aber wirklich einen Punkt, nämlich das Bild des Punktes $\mathcal{F}_{i_1} \mathcal{F}_{i_1 i_2} \dots$; also: $A^* \subset A'$; also $A^* = A'$; weil A^* eine $\mathcal{A}$-Menge ist, so wird damit der Satz bewiesen sein.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x'| < \delta,$$

wenn x der gem. Punkt der festgewählten Kette $\mathcal{F}_{i_1}\mathcal{F}_{i_1 i_2,\dots}$ ist.

Für $k > \mathcal{K}$ ist aber $\delta\mathcal{F}_{i_1\dots i_k} < \delta$, also umsomehr

$$\delta\mathcal{A}_{i_1\dots i_k} < \delta,$$

also

$$\delta\mathcal{A}'_{i_1\dots i_k} < 2\varepsilon$$

also

$$\delta\mathcal{F}'_{i_1\dots i_k} < 2\varepsilon, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Durch Kombination dieser Resultate haben wir:

$f(x)$ ist genau dann analytisch darstellbar, wenn für jedes a (oder auch: für jedes rationale a) die 4 Mengen

$$\mathcal{M}(f > a), \quad \mathcal{M}(f \leqq a), \quad \mathcal{M}(f < a), \quad \mathcal{M}(f \geqq a)$$

stetige Bilder der Menge aller Irrationalzahlen sind.

Wir sehen insbesondere, dass die $\mathcal{A}$-Mengen gegenüber den Operationen $\sum$, $\prod$, A-Operation und Bildung stetiger Funktionen invariant sind.

Insbesondere sind also die $\mathcal{A}$-Mengen topologisch invariant.

Dasselbe gilt von den G_δ-Mengen, wie wir wissen. Trivial ist, dass die stetigen Bilder von $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}_\sigma$ wieder $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}_\sigma$ sind.

Und allgemein gilt:

Das homöomorphe Abbild einer Borelschen Menge ist wieder eine Borelsche Menge derselben Klasse.

Es genügt, die Klasse $\alpha > 1$ vorauszusetzen; denn für die 1. Klasse wissen wir es schon.

Es sei also $\mathcal{B}$ von der Klasse $\alpha > 1$; $\mathcal{B}^*$ ein homöomorphes Abbild von $\mathcal{B}$. Wie wir wissen, kann man diese Homöomorphie zu einer Homöomorphie zwischen zwei G_δ-Mengen Γ, Γ^* erweitern; $\mathcal{B}$ ist eine absolute Menge α-ter Klasse, also auch von Klasse $\leqq \alpha$ in bezug auf Γ. Bei der Homöomorphie von Γ auf Γ^* gehen abgeschlossene Mengen in bez. auf Γ in agbeschlossene in bez. auf Γ^* über u. s. w., also ist B^* von der Klasse $\leqq \alpha$ in Bez. auf Γ^*. Und Γ^* ist ein G_δ, also: ein G_δ in bez. auf Γ^* ist ein absolutes G_δ; also gilt dasselbe von $G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}$ usw.

Also ist $\mathcal{B}^*$ (absolut) von der Klasse $\leqq \alpha$.

Ebenso, wenn wir von der $\mathcal{F}$-Klassifikation ausgehen: Γ^* ist ein $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, also ist ein $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ in bez. auf Γ^* auch ein absolutes $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$; dasselbe gilt daher von $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$, $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}\ldots$. Also ist $\mathcal{B}^*$ (absolut) von der Klasse $\leqq \alpha$, wenn wir die $\mathcal{F}$-Klassifikation Zugrunde legen.

w. z. b. w.

Es gelten noch folgende Sätze:

Die (unabzählbaren) Borelschen Mengen sind genau die eineindeutigen und (einseitig) stetigen Bilder der Menge der Irrationalzahlen.

Die Wertmenge jeder analytisch darst. Funktion ist eine $\mathcal{A}$-Menge.

Jede $\mathcal{A}$-Menge ist die Wertmenge einer überall definierten Funktion 1. Klasse, die nur in den rationalen Punkten unstetig ist.

Urysohn hat $\mathcal{A}$-Mengen konstruiert, die keine Borelsche sind:

1.) Als Menge der Randwerte einer Potenzreihen.

2.) Als die von aussen erreichbaren Punkte einer abgeschloss. Menge.

3.) Als Wertmengen des Grenzwertes einer konvergenten Folge von Polynomen.

Sehr wenig weiss man über die Komplementärmengen von $\mathcal{A}$-Mengen.

Jede $\mathcal{A}$-Menge und auch jede Komplementärmenge zu einer $\mathcal{A}$-Menge ist Summe von höchstens $\aleph_1$ fremden Borelschen Mengen (also Mächtigkeit $\aleph_1$ oder $\aleph$ oder höchstens abzählbar).

Man kann (Alex. Fundamente V) die Komplementärmengen zu $\mathcal{A}$-Mengen so definieren: Es seien $\mathcal{F}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ abg. Mengen; die $\mathcal{A}$-Mengen definiert man durch Summen von Ketten, wo die Indizes

$$i_1, i_1 i_2, i_1 i_2 i_3, \ldots$$

sind, d. h. wo die zu den Indizes gehörigen Baireschen Umgebungen genau einen Punkt enthalten. Ebenso kann man die Komplementärmengen zu $\mathcal{A}$-Mengen darstellen, in dem man solche Ketten von Umgebungen

$$[i_1^1] \quad [i_1^2, i_2^2] \quad [i_1^3 i_2^3 i_3^3] \ldots$$

betrachtet, deren Vereinigungsmenge den ganzen Nullraum überdeckt.

Sierpiński hat einen Prototyp der Komplemente zu $\mathcal{A}$-Mengen folgendermassen definiert (Poln. Akad. Okt. 1927).

Zu jeder ganzen Zahl > 0

$$p = 2^{m-1}(2^{n_1} + 2^{n_1+n_2} + \cdots + 2^{n_1+\cdots+n_k} - 1)$$

$(n_i > 0)$ ordne man die Bairesche Umg. $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$ zu. Man betrachte alle Irrationalzahlen

$$x = \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \ddots}}$$

und zähle die Zahl x zu der Menge, wenn die zu $p_1, p_2, \ldots$ gehörigen Baireschen Umgebungen den ganzen Nullraum überdecken.