Jaromír Šimša

Matematika v komerční televizi

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 181–190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401044

MATEMATIKA V KOMERČNÍ TELEVIZI

JAROMÍR ŠIMŠA

Jevíčko, 21. srpna 1995

Ekonomické a politické změny posledních let proměnily zájmy lidí, jejich přání a cíle. Učitelé si dnes často stěžují, že mladí lidé ztrácejí zájem o techniku a přírodní vědy a na místo toho se věnují vědám humanitním: filosofii, psychologii, cizím jazykům a právu. Objektivně to lze prokázat například u maturantů, když si vybírají obory, které by chtěli studovat na vysoké škole. Přitom o zbytky přírodovědeckého zájmu se věda musí ještě dělit s různými okultními paradisciplínami.

Nemyslím si, že by bylo potřeba vést kampaň za zvýšení prestiže matematiky. Věřím totiž, že rodiče a učitelé pomalým, leč vytrvalým a důsledným úsilím naučí naše děti v tomto světě neomezené svobody a volného trhu rozpoznávat, co je stálé, co pomíjivé a co má hodnotu. Přemíra zájmu o humanitní obory je zajisté jen dočasná, neboť se nakonec stane obecně známým, že lidé, kteří umí pouze dva světové jazyky a nic víc, budou v životě hledat uplatnění s obtížemi téměř tak velikými jako ti, kteří znají jen čistou matematiku.

Přesto rád přemýšlím o tom, jak posílit zájem laické veřejnosti o stále mladou a krásnou královnu věd. Bylo by možné k tomu využít nejsledovanější sdělovací prostředek, celoplošnou komerční televizi? Jak víme, v jejím programu nejsou slabá místa, vše v něm musí pobavit a zaujmout, aby televize nepřišla o své diváky. Pokusím se vám ukázat na několika příkladech, že lze – alespoň teoreticky – na obrazovku takové televize propašovat zajímavé matematické problémy, aniž by se musela měnit osvědčená témata programů. Doufám, že vás moje parodie nejen pobaví svou formou, ale i potěší svým (matematickým) obsahem.[1]

DIVOKÝ VÍKEND

(podvečerní seriál o životě americké mládeže)

Devět mladíků a dívek z Holywoodu odjelo na víkend k jezeru. V chatě, která měla prostornou jídelnu a řadu pokojů, byli mladí lidé sami. Každý z obou večerů se na chatě rozpoutala uvolněná zábava se spoustou veselí, a tak se vždy ráno mnozí udiveně rozhlíželi, ve kterém pokoji skončili a kdo tam popřípadě s nimi spí. Úkol pro diváky: Do příštího pokračování seriálu dokažte, že někteří dva teenageři měli na chatě stejný počet spoluspících první noc i stejný počet

[1] Po přednášce v Jevíčku jsem byl dotázán jedním účastníkem, zda jsem to vše mínil tak vážně, jak si to popularizace matematiky a fyziky zasluhuje. Omlouvám se proto všem, kteří seriózní popularizace v televizi skutečně realizovali nebo realizují. Velmi si jejich práce vážím.

spoluspících druhou noc. (Dodejme, že každý z devíti hrdinů seriálu spal každou noc v právě jednom pokoji.)

ŘEŠENÍ. Nechť účastník X spal první noc v pokoji sdíleném právě p_X osobami (včetně samotného X), druhou noc v pokoji o d_X osobách. Naší úlohou je dokázat, že lze najít účastníky $X \neq Y$, pro které $p_X = p_Y$ a $d_X = d_Y$. Protože součet čtyř různých přirozených čísel je alespoň $1 + 2 + 3 + 4$, tedy více než 9, jsou mezi všemi devíti přirozenými čísly p_X nejvýše tři různá. Rozdělíme-li proto všech devět účastníků do skupin podle hodnot p_X (tj. X a Y zařadíme do téže skupiny, právě když $p_X = p_Y$), dostaneme *nejvýše tři* skupiny. (Jestli tomu dobře rozumíte, pak snadno vysvětlíte, proč ve skupině libovolného účastníka X je právě $n \cdot p_X$ osob pro vhodné přirozené číslo n. Jaké má toto číslo význam?) V některé z utvořených skupin najdeme dva účastníky $X \neq Y$, pro které platí $d_X = d_Y$ (právě takové hledáme), jsou-li mezi všemi hodnotami d_X některá *čtyři* čísla stejná (známý Dirichletův princip). Předpokládejme dále, že tomu tak není. Pak ale druhou noc byly nejvýše tři pokoje obsazené jedním účastníkem, nejvýše jeden dvěma (jinak by $d_X = 2$ pro aspoň 4 X), nejvýše jeden třemi (jinak by $d_X = 3$ pro aspoň 6 X) a žádný čtyřmi nebo více účastníky. To není možné, neboť

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 8 < 9 .$$

Proto dvojice účastníků $X \neq Y$, pro které platí $p_X = p_Y$ i $d_X = d_Y$, existuje.

JEDNÁNÍ O ROZPOČTU

(první zpráva Televizních novin)

Vláda na své dnešní schůzi jednala o rozdělení rozpočtového přebytku ve výši 100,–Nk (makroekonomická měnová jednotka zvaná nedělitelná koruna; jak tento název napovídá, nelze částku 1,–Nk rozdělit na menší obnosy). Tento přebytek byl původně rozdělen na x navzájem různých částek. Pak ale jeden z ministrů menší koaliční strany upozornil, že počet resortů, jež jsou ve finančním nedostatku, není x, ale $x + 1$. Premiér proto navrhl pragmatické řešení: některou z x dohodnutých částek rozdělit na dvě menší. Přes veškerou snahu všech přítomných se však toto řešení nepodařilo realizovat tak, aby mezi výslednými $x + 1$ částkami nebyly dvě téže výše. (Tato podmínka je výrazem jasných priorit, jež vláda jednotlivým resortům přisuzuje: žádné dva z nich si nezaslouží stejnou podporu.) Proto se vláda nakonec usnesla, že celá částka 100,–Nk zůstane ve fondu vládních rezerv. Na následné tiskové konferenci si už však žádný ministr na počet x resortů nedokázal vzpomenout. Úkol pro diváky: Za předpokladu, že věříte matematickým schopnostem ministrů, dokážete domněnku naší televize, že neznámý počet x je alespoň 10?

ŘEŠENÍ. Označme původně navržené částky (v Nk) podle velikosti

$$0 < c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_x , \qquad c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_x = 100 .$$

Každé c_i je přirozené číslo. Nejmenší z nich, c_1, nelze podle zadání rozložit na součet dvou menších *různých* přirozených čísel. To jistě znamená, že $c_1 = 1$ nebo $c_1 = 2$ (kdyby totiž $c_1 \geqq 3$, napadl by rozklad $c_1 = 1 + (c_1 - 1)$ určitě každého ministra). Dokážeme nyní obecnější závěr, že pro každé i platí odhad $c_i \leqq 2i$. Připusťme, že naopak pro některé i platí $c_i > 2i$. V této situaci uvážíme celkem i různých rozkladů čísla c_i:

$$c_i = 1 + (c_i - 1) = 2 + (c_i - 2) = 3 + (c_i - 3) = \cdots = i + (c_i - i)\,.$$

Protože z $c_i > 2i$ plyne $i < c_i - i$, jsou všechny sčítance ve vypsaných rozkladech navzájem různé. Proč žádný z těchto rozkladů vláda neakceptovala? Jedině proto, že aspoň jeden z jeho sčítanců leží mezi čísly $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}$. Posledních čísel je však $i - 1$, tedy méně než je počet vypsaných rozkladů. Proto musí některé z čísel c_1, c_2, …, c_{i-1} vystupovat v alespoň dvou z uvažovaných rozkladů, a to je spor. Tím je nerovnost $c_i \leqq 2i$ dokázána.

Podle předchozího platí

$$100 = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_x \leqq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot x = x(x+1)\,.$$

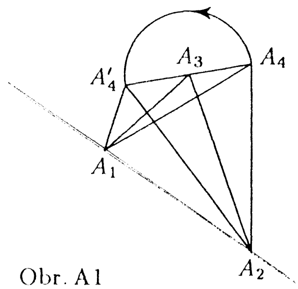
Nerovnost $100 \leqq x(x+1)$ je však pro přirozené číslo x splněna, jen když $x \geqq 10$. Domněnka televize je tak dokázána.

UFO NAD JEVÍČKEM

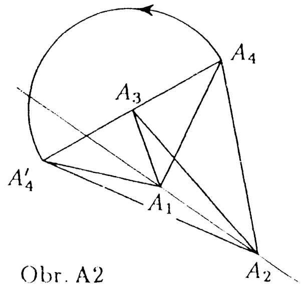
(*poslední zpráva Televizních novin*)

Včera ve večerních hodinách spatřili občané Jevíčka nad Palackého náměstím neobvyklý optický úkaz. Šlo o čtyři svítící body, které původně tvořily vrcholy čtverce. Pak se body začaly pohybovat po fázích, které vypadaly takto: v každé fázi byly některé tři ze svítících bodů nehybné a kolem jednoho z nich opsal čtvrtý bod půlkružnici. Po několika takových fázích se body dostaly opět do vrcholů některého čtverce, pak pohasly, a tak pozorovatelům zmizely. Úkol pro diváky: Rozhodněte o správnosti hypotézy jednoho jevíčského matematika, který tvrdí, že čtverec na konci úkazu musel mít stejnou velikost jako čtverec na jeho počátku, přestože se o celé příhodě dozvěděl, teprve když udivení očití svědkové dorazili do hostince Na dvorci.

ŘEŠENÍ 1. Náš postup bude založen na tom, že si všimneme, jak se mění obsahy všech čtyř trojúhelníků s vrcholy ve svítících bodech. Nechť tedy na počátku některé fáze svítí body A_1, A_2, A_3, A_4, na jejím konci po řadě body A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Obsahy trojúhelníků označme $S_1 = S(A_2A_3A_4)$, $S_2 = S(A_1A_3A_4)$, $S_3 = S(A_1A_2A_4)$ a $S_4 = S(A_1A_2A_3)$; podobný význam bude mít i čárkované označení S'_i. Jak vyjádřit obsahy ve čtveřici (S'_1, S'_2, S'_3, S'_4) pomocí čtveřice (S_1, S_2, S_3, S_4)? Protože pořadí obsahů ve čtveřicích nebude dále důležité, stačí na otázku odpovědět jen v případě, kdy v naší fázi jsou body A_1, A_2, A_3 nehybné (tj. $A_i = A'_i$ pro $i = 1, 2, 3$, takže $S'_4 = S_4$) a bod A_4 opíše půlkružnici kolem středu A_3 (obr. A1). Tehdy jsou body A_4 a A'_4 souměrně sdružené podle středu A_3. Odtud plyne, že trojúhelníky $A_2A_3A_4$ a $A_2A_3A_4'$ mají shodné výšky z vrcholu A_2 i strany protilehlé tomuto vrcholu, tudíž mají i stejné obsahy: $S_1' = S_1$. Úplně stejně se zdůvodní rovnost $S_2' = S_2$. Zbývá určit obsah S_3'. Pomocí obr. A1 a obr. A2 se odvodí (podrobnosti jsou natolik zřejmé, že je zde



Obr. A1



Obr. A2

vynecháme), že platí

$$\text{buď} \quad S_4 = \frac{|S_3 - S_3'|}{2}, \quad \text{nebo} \quad S_4 = \frac{S_3 + S_3'}{2},$$

podle toho, zda přímka A_1A_2 protne úsečku A_4A_4' či nikoliv. Z těchto rovností dostáváme vzorec $S_3' = \pm 2S_4 \pm S_3$ (obě znaménka jsou navzájem nezávislá, dále to nehraje roli).

Shrneme naše vyšetřování: při každé fázi se (neuspořádaná) čtveřice obsahů trojúhelníků s vrcholy ve svítících bodech mění podle zákona

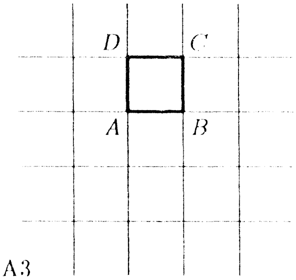
$$(*) \qquad (S_1, S_2, S_3, S_4) \longrightarrow (S_1, S_2, \pm 2S_4 \pm S_3, S_4).$$

Zvolme nyní jednotku obsahu tak, aby na počátku úkazu měla zkoumaná čtveřice obsahů tvar $(1,1,1,1)$. Na základě pravidla $(*)$ se snadno vysvětlí, že pak libovolná čtveřice (S_1, S_2, S_3, S_4) v průběhu úkazu je tvořena čtyřmi nezápornými celými čísly, jejichž *největší společný dělitel je roven* 1. Skutečně, každý společný dělitel čtveřice na jedné straně $(*)$ je i společným dělitelem čtveřice na straně druhé. Čtveřici svítících vrcholů čtverce na konci úkazu ovšem odpovídá čtveřice obsahů (S, S, S, S); podle našeho závěru o největším společném děliteli musí být $S = 1$. To ale znamená, že čtverce na počátku i konci úkazu měly tutéž velikost.

ŘEŠENÍ 2.[2] Nechť na počátku úkazu svítily vrcholy čtverce $ABCD$. Tento čtverec určuje na nebeské rovině čtvercovou síť (obr. A3). Vrcholy čtverců této sítě nazveme *mřížovými body*. Snadno se vysvětlí poznatek, že když jeden mřížový bod opíše půlkružnici kolem druhého mřížového bodu, skončí svou cestu opět v mřížovém bodě. Proto platí: na konci každé fáze úkazu svítí některé čtyři mřížové body naší sítě. Na úplném konci to byly, jak víme, vrcholy jistého čtverce $KLMN$. Protože vzdálenost libovolných dvou mřížových bodů není menší než $|AB|$, musí platit $|KL| \geqq |AB|$. A teď přijde to hlavní: *Celý úkaz*

[2] Na přednášce v Jevíčku jsem vyložil pouze Řešení 1. Přesto připojuji krásné Řešení 2, které mi později prozradil Oldřich Stražovský, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně.

se svíticími body by mohl stejně dobře probíhat i pozpátku: po několika fázích (pohybech stejného druhu jako při původním úkazu) by se vrcholy čtverce $KLMN$ přemístily do vrcholů čtverce $ABCD$. Úvahou o nové síti čtverců (generované čtvercem $KLMN$) zjistíme, že musí platit také opačná nerovnost $|AB| \geqq |KL|$. Dohromady dostáváme $|AB| = |KL|$, což jsme měli dokázat.



Obr. A3

POLICAJTOVO DESATERO

(*akční film pro hlavní večerní čas*)

Černošský policejní poručík Gabriel má ke své uniformě deset párů ponožek různých barev: od středně šedých (barva č. 1), po absolutně černé (barva č. 10). Jednou navečer zjistil, že pro zítřejší službu nemá žádné ponožky čisté. Proto všech deset párů odnesl vyprat do sklepní prádelny chicagského činžáku, ve kterém bydlel. V prádelně bylo mizerné osvětlení, a tak Gabriel po vyprání spároval ponožky náhodně, jak mu při vytahování z bubnu pračky přicházely pod ruku. Libovolnou dvojici ponožek nazveme služebně přijatelnou, liší-li se čísla jejich barev nejvýše o 1. Otázka pro diváky: Jaká je pravděpodobnost toho, že Gabriel v prádelně vytvořil 10 služebně přijatelných párů?

ŘEŠENÍ. Označme Gabrielovy ponožky 1a, 1b, 2a, 2b, ..., 10a, 10b (na počátku je vždy číslo příslušné barvy.) Předpokládejme, že všechna možná spárování ponožek jsou stejně pravděpodobná, takže hledanou pravděpodobnost vypočteme jako poměr počtu těch spárování, jež jsou tvořena deseti služebně přijatelnými páry, ku počtu všech spárování.

Nejprve určíme počet všech spárování. Gabriel mohl vytáhnout ponožky z pračky v celkem 20! pořadích. Protože výsledné spárování nezáleží na pořadí ponožek v každé dvojici ani na celkovém pořadí těchto deseti dvojic, musíme číslo 20! vydělit číslem $(2!)^{10} \cdot 10!$, abychom dostali hledaný počet:

$$\frac{20!}{(2!)^{10} \cdot 10!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} = 19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1\,.$$

Pro zajímavost dodejme, že tento počet můžeme určit i jinak. Předpokládejme, že všechny ponožky jsou v tom pořadí, v jakém jsme je označovali, a párujme ponožky postupně zleva doprava. Ponožku 1a můžeme doplnit do páru právě

19 způsoby. Poté doplníme do páru první zleva nespárovanou ponožku (je to ponožka 1b nebo 2a, podle toho, kterou ponožkou jsme doplnili ponožku 1a), to lze učinit 17 způsoby. Podobně pak třetí pár vytvoříme 15 způsoby, atd. Podle kombinatorického pravidla součinu tak dostaneme stejný výsledek, jako je uveden výše.

Počet všech spárování do služebně přijatelných dvojic je výhodné určovat rekurentně podle počtu všech párů, které jsou k dispozici. Označíme proto symbolem $P(n)$ počet všech těch spárování n párů ponožek (barev n po sobě jdoucích přirozených čísel), jež jsou tvořena n služebně přijatelnými dvojicemi (říkejme jim dále stručněji *přijatelná spárování*). Zřejmě platí $P(1) = 1$ a $P(2) = 3$ (promyslete sami). Pro každé $n \geqq 3$ dokážeme rekurentní vztah

$$P(n) = P(n-1) + 2 \cdot P(n-2)\,.$$

K tomu rozdělíme všechna přijatelná spárování n párů (barev č. 1 až n) do tří skupin. Do první dáme ta spárování, jež obsahují pár (1a,1b), do druhé ta, jež obsahují pár (1a,2a), konečně do třetí ta, jež obsahují pár (1a,2b); jiné možnosti pro doplnění ponožky 1a nepřicházejí v úvahu. V první skupině je právě tolik prvků, kolik je všech přijatelných spárování $n-1$ párů ponožek barev čísel 2 až n, tedy $P(n-1)$. Každé spárování ze druhé skupiny obsahuje kromě dvojice (1a,2a) také dvojici (1b,2b), takže počet prvků ve druhé skupině je roven počtu přijatelných spárování $n-2$ párů barev čísel 3 až n, tedy $P(n-2)$. Stejný počet prvků je i ve třetí skupině – tam každé spárování kromě dvojice (1a,2b) obsahuje také dvojici (1b,2a). Tím je avízovaný rekurentní vztah dokázán.

Postupným dosazováním do odvozeného vztahu určíme $P(3) = 5$, $P(4) = 11$, atd. až $P(10) = 683$. (Pro zajímavost uveďme obecný vzorec

$$P(n) = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}\,,$$

který můžete ověřit indukcí.) Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{683}{19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \doteq 1{,}04 \cdot 10^{-6}\,.$$

SPOUTANÉ DĚVY

(*noční podívaná nejen pro pány*[3])

Na obvodu záhonu, plného nízkého bodláčí a ostrých střepů, stojí v horkém a dusném žáru poledního slunce tři bosé dívky. Záhon má tvar a velikost rovnostranného trojúhelníku o straně délky s. Markýz de Sade připoutal každé dvě z dívek navzájem tenkým koženým řemínkem stejné délky d (použil tedy tři shodné řemínky). Určete všechny poměry $d : s$, při kterých se dívky vhodným

[3]Na poslední dva náměty nezbyl při přednášce v Jevíčku čas. Přesto je zde na přání několika posluchačů uvádím.

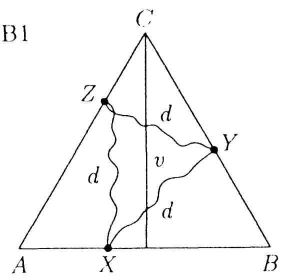
pohybem po obvodu záhonu mohou sejít na jednom místě, bez ohledu na to, kde byly ve výchozí okamžik. Rozměry dívek jsou vzhledem k veličinám s a d zanedbatelné.

ŘEŠENÍ. Polohu dívek budou určovat body X, Y, Z pohybující se po obvodu rovnostranného trojúhelníku ABC o straně s. Ukažme nejdříve, že je-li výška v tohoto trojúhelníku (tj. $v = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$) větší než délka d řemínků, nemohou se dívky sejít, stojí-li na počátku každá na jiné straně záhonu (obr. B1). Připusťme naopak, že přes toto výchozí postavení vhodným pohybem dívek k setkání došlo, a všimněme si okamžiků v jeho průběhu, kdy některá dívka *dosáhla vrcholu* trojúhelníku. Takové okamžiky musely nastat (jinak by dívky zůstaly na stranách, kde stály původně). Vyberme *první* z nich, kdy například $X = A$ (libovůle našeho označení to připouští). Protože v průběhu celého pohybu platí

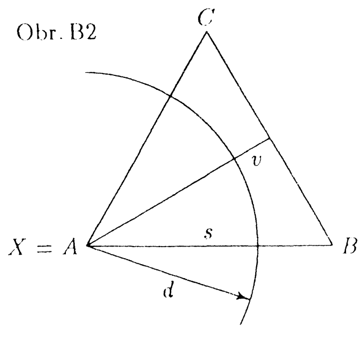
$$\max\{|XY|, |XZ|\} \leqq d < v < s,$$

v uvažovaném okamžiku (kdy $X = A$) se žádná z dívek nenacházela na straně BC (obr. B2), a to je spor: Na této straně původně některá dívka stála; když ji opouštěla, musela projít vrcholem B nebo vrcholem C, a to *dříve*, než nastala situace $X = A$. Tak jsme dokázali, že v případě $d < v$ (tj. $d : s < \sqrt{3} : 2$) existují takové výchozí pozice dívek, které jim znemožňují kýžené setkání.

Obr. B1



Obr. B2



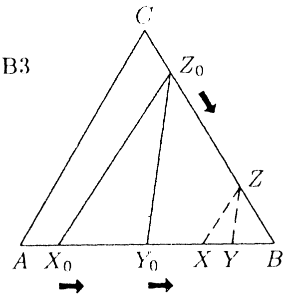
Ve druhé části řešení naopak zdůvodníme, že pokud výška v trojúhelníku není větší než délka řemínků d, mohou se dívky v jednom místě sejít, ať bylo jejich výchozí postavení jakékoliv. Podle něho rozlišíme tři případy:

(1) Dívky stály na jedné straně trojúhelníku.
(2) Dvě dívky stály na jedné straně trojúhelníku, třetí dívka na straně jiné.
(3) Každá dívka stála na jiné straně trojúhelníku.

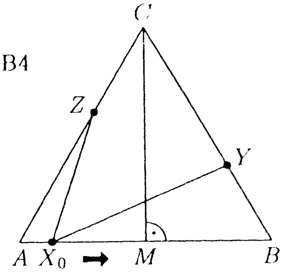
Pohyb dívek, který vede k jejich setkání, je v případě (1) zřejmý. Popíšeme nyní odděleně, jak by mohly dívky postupovat v případech (2) a (3).

ad (2). Předpokládejme, že ve výchozí moment body X a Y leží na straně AB, bod Z na straně BC (obr. B3). Poraďme dívkám, aby se všechny vydaly do vrcholu B stálými rychlostmi přímo úměrnými jejich výchozím vzdálenostem do bodu B. V průběhu takového pohybu se trojúhelník XYZ zmenšuje tak, že

Obr. B3



Obr. B4



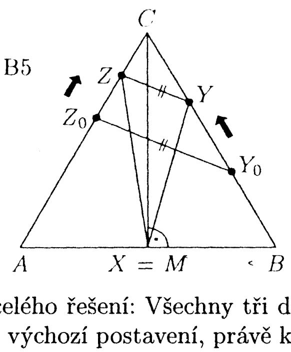
zůstává podobný své výchozí kopii $X_0Y_0Z_0$. Proto se řemínky dívek nenapnou a všechny tři se ve stejný okamžik šťastně v bodě B setkají.

ad (3). Nechť ve výchozím momentu $X \in AB$, $Y \in BC$ a $Z \in AC$. (Jak víme, vzdálenosti $|XY|$, $|XZ|$ a $|YZ|$ nepřevyšují délku d.) Požádejme nejdříve dívky v bodech Y a Z, aby zůstaly na svých místech, a dívku v bodě $X = X_0$, aby se přemístila do středu M strany AB (obr. B4). Budeme předpokládat, že výchozí bod X_0 leží na úsečce AM (kdyby ležel na BM, vyměnili bychom označení vrcholů A a B). Může se dívka do bodu M skutečně dostat? Ano, neboť při pohybu $X \to M$ se délka $|XY|$ zřejmě zmenšuje; délka $|XZ|$ třeba i roste, splňuje však přitom nerovnost

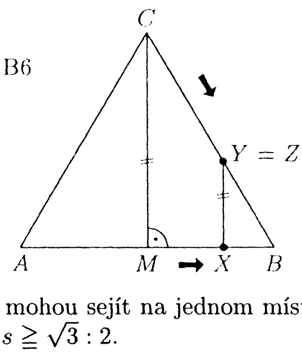
$$|XZ| \leqq \max\left\{|X_0Z|, |MZ|\right\} \leqq \max\left\{d, |MC|\right\} = \max\{d, v\} = d.$$

Jakmile se dívka dostane do bodu M, požádáme ji, aby si tam odpočinula. Zároveň dívkám v bodech $Y = Y_0$ a $Z = Z_0$ doporučíme přesun do vrcholu C způsobem popsaným v (2), tedy tak, aby při něm úsečka YZ zůstávala rovnoběžná se svou výchozí kopií Y_0Z_0 (obr. B5). Při takovém přesunu se délka $|YZ|$ zmenšuje, zatímco délky $|XY|$ a $|XZ|$ (rovné $|MY|$ a $|MZ|$) nepřevyšují větší z délek $|MA|$ a $|MC|$, tedy délku v. Proto mohou dívky svěřené úkoly splnit. Nakonec poradíme všem třem dívkám (jedna je bodě M, druhé dvě v bodě C) aby se vydaly do bodu B, opět způsobem popsaným v (2) (obr. B6). Tím naše rádcovská role končí.

Obr. B5



Obr. B6



Závěr celého řešení: Všechny tři dívky se mohou sejít na jednom místě bez ohledu na výchozí postavení, právě když $d : s \geqq \sqrt{3} : 2$.

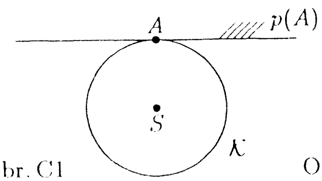
ÚKRYT NA PLANETĚ

(*půlnoční sci-fi seriál pro nespavce*)

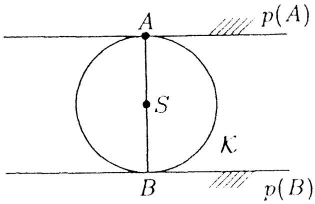
Osamocený hrdina Alone se ukrývá na planetě, která má tvar koule. Povrch planety je monitorován ze tří nepřátelských kosmických lodí. Otázka pro diváky: Může Alone bez ohledu na to, jak se lodě pohybují, v každém okamžiku vyhledat na povrchu planety takové místo, které z žádné ze tří lodí není vidět? Předpokládejte, že lodě mají oproti planetě zanedbatelné rozměry.

ŘEŠENÍ. Alone takové místo může vyhledat vždy (je jen otázkou, zda se stačí při pátracích pohybech lodí dostatečně rychle po povrchu planety přemísťovat.) Abychom toto povzbudivé tvrzení vysvětlili, uvědomíme si nejdříve některé poznatky o viditelnosti bodů na povrchu koule.

Předpokládejme, že planeta je koule $\mathcal{K}$ o středu S a že zmíněné lodě se nacházejí ve stejný okamžik v bodech, které označíme L_1, L_2 a L_3. Libovolný bod A na povrchu koule je z bodu L_i vidět, právě když bod L_i leží uvnitř poloprostoru $p(A)$, který neobsahuje střed S a jehož hraniční rovina se dotýká koule $\mathcal{K}$ právě v bodě A (obr. C1). Je zřejmé, že takové dva poloprostory $p(A)$ a $p(B)$ nemají společný bod, právě když je úsečka AB průměrem naší koule (obr. C2). Proto platí: z každého bodu L_i není vidět aspoň jeden koncový bod libovolného průměru koule $\mathcal{K}$.

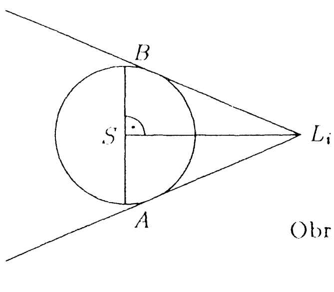


Obr. C1

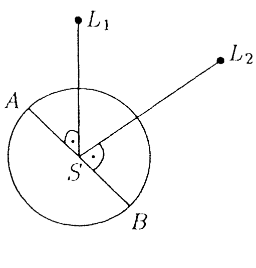


Obr. C2

Z úvahy o poloprostoru $p(A)$ rovněž plyne, že bod A na povrchu koule $\mathcal{K}$ není vidět z žádného bodu té roviny, která prochází středem S a je kolmá k úsečce AS. To také znamená, že pokud je úsečka L_iS kolmá k průměru AB koule, pak z bodu L_i není vidět ani bod A, ani bod B (obr. C3). Dodejme, že uvedené poznatky o viditelnosti lze názorně vysvětlit pomocí minimálního kužele, který obsahuje kouli $\mathcal{K}$ a má vrchol v daném pozorovacím bodě L_i.



Obr. C3



Obr. C4

Nyní už snadno Aloneovi poradíme, jak podle daných bodů L_1, L_2 a L_3 vyhledat vhodnou skrýš: Nejdříve vyhledej průměr AB koule $\mathcal{K}$, který je kolmý k oběma úsečkám L_1S a L_2S (obr. C4). (Takový průměr je jediný, právě když střed S neleží na přímce L_1L_2; v opačném případě je takových průměrů dokonce nekonečně mnoho.) Podle předchozích úvah není z bodů L_1 a L_2 vidět žádný z bodů A a B, zatímco z bodu L_3 není vidět aspoň jeden z nich. To je bod, který odpovídá místu, kam se, milý Alone, můžeš schovat.

★ ★ ★

Akademik J. Š. přednáší v Jevíčku v r. 2020