pro konečné grupy a Schreier pro nekonečné, ale jen existenčně, Zassenhaus našel konstruktivní důkaz a ten byl jistě Borůvkovi podnětem k hledání množinové a grupoidové varianty. Podařilo se mu to do té míry, že z věty o řetězcích rozkladů se dá zrekonstruovat grupová věta. Je to znamenitý výsledek sám o sobě, ale i proto, že mnohá zobecnění vět nedovolují vrátit se k předloze, kterou zobecnily.

Kromě práce [29], učebnic o maticích [23] (viz. seznam ostatních publikací), [71] a do jisté míry i prací [30], [31], je Borůvkovo algebraické dílo shrnuto do čtyř knih, a to do učebnice *„Úvod do teorie grup“* [37] a do monografie, která vyšla ve třech verzích, německé *„Grundlagen der Grupoid- und Gruppentheorie“* [47], anglické [73] a české [52]. Výsledky této monografie měly vždy živý ohlas při přednáškách, které Borůvka přednesl při různých příležitostech doma i v zahraničí.

Práce z obyčejných diferenciálních rovnic

prof. RNDr. František Neuman, DrSc.

V padesátých letech se O. Borůvka začal cílevědomě věnovat studiu diferenciálních rovnic, disciplíny v té době v Československu málo pěstované. V roce 1946 založil vědecký seminář, který se stal zdrojem nových vědeckých problémů a místem, kde vždy vznikala nová, původní řešení. Velké množství významných zahraničních matematiků právě zde předneslo své originální myšlenky.

O. Borůvka nikdy zcela neopustil pole klasické analýzy, diferenciální geometrie a algebry. Na základě své dokonalé znalosti těchto oblastí zavedl nové metody a originální přístup k řadě problémů v teorii diferenciálních rovnic.

V práci [43] podal kritérium pro jednoznačnost řešení rovnice $y' = f(x, y)$, které zobecňuje většinu podmínek v té době známých.

Jeho učebnice [36] (viz. seznam ostatních publikací) *Diferenciálne rovnice* (ve slovenštině), kterou vydala Univerzita Komenského v Bratislavě v roce 1961, je vysoce ceněna jak pro vynikající pedagogický přístup, tak i vysokou vědeckou kvalitu.

Hlavní činnost O. Borůvky na poli vědeckém byla však zaměřena na studium lineárních diferenciálních rovnic. Předložil program vyšetřování globálního chování řešení těchto rovnic. Sám začal zkoumat první netriviální třídu – Jacobiův typ homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu se spojitým koeficientem, tj. rovnice tvaru

$$(p) \quad y'' = p(x)y, \quad p \in C^0(I), \quad I = (a,b), \; -\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Uvažuje transformaci Kummerova typu,

$$z(t) = f(t)y(h(t)),$$

která je nejobecnější bodovou transformací lineárních homogenních diferenciálních rovnic, jež převádějí tyto rovnice počínaje rovnicemi druhého řádu na rovnice stejného druhu. Důležitým rysem Borůvkova výzkumu bylo, že studoval řešení a jejich transformace na celých definičních intervalech těchto řešení, to znamená *globální* transformace. Nejen detailní analytický výzkum, ale rovněž důmyslné použití algebraických a geometrických metod umožnilo O. Borůvkovi pochopit podstatu transformací, rozšířit a prohloubit mnohé tradiční představy a také uvést řadu nových pojmů a objevovat často velmi překvapující skutečnosti.

Svou sérií článků [40], [42], [45], [48–49], [51], [53–60] položil základy teorii globálních transformací. Zavedl pojem fáze a disperze, které mu umožnily spojit oscilatorické vlastnosti řešení s transformacemi odpovídajících rovnic, zvláště objevit kritérium globální ekvivalence rovnic druhého řádu, odvodit všechny globální transformace daných rovnic, tak zvané *obecné disperze*, a tímto způsobem *algebraicky* popsat strukturu všech globálních transformací.

Vznikla tak globální kvalitativní teorie lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s vysokým stupněm geometrizace a algebraizace, teorie obsahově nesmírně rozsáhlá, bohatá množstvím použitých metod, teorie s rozsáhlým použitím. Borůvka shrnul základní principy a výsledky této moderní teorie ve své monografii [61]: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung*, vydané v Berlíně v roce 1967 a v rozšířené verzi [70]: *Linear Differential Transformations of the Second Order* v Londýně roku 1971. Mnoho českých i zahraničních matematiků se zabývalo metodami a výsledky jeho teorie při řešení problémů týkajících se nejen rovnice druhého, ale i vyšších řádů.

Poté Borůvka svou teorii rozšířil a prohloubil podrobným výzkumem a zobecněním algebraických struktur vznikajících při popisu struktury transformací, [62–69], [72]. Zavedl také pojem bloku a inverze diferenciálních rovnic druhého řádu, pomocí nichž zejména podstatně rozšířil Floquetovu teorii pro tyto rovnice, [74–78]. Diferenciálně-geometrické a algebraické vlastnosti globálních transformací se výrazně uplatňují při podrobném studiu spojitých jedno- a víceparametrických grup disperzí diferenciálních rovnic druhého řádu a jejich speciálních vlastností, [79–84].

Pro stručné objasnění Borůvkova přístupu ke globálním transformacím diferenciálních rovnic druhého řádu, uvedeme zde některé základní pojmy a výsledky jeho teorie. Pro zjednodušení užíváme pojmů *fáze* a *disperze* místo *první fáze* a *základní centrální disperze prvního druhu*, i když Borůvka zavedl a studoval i další typy fází a disperzí.

Nechť y_1 a y_2 jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (p). Spojitá funkce $\alpha, \alpha \in C^0(I)$ splňující relaci

$$\mathrm{tg}\alpha(x) = y_1(x)/y_2(x), \quad \text{pro všechna} \quad x \in I, \quad \text{kde} \quad y_2(x) \neq 0,$$

se nazývá *fáze* rovnice (p). Potom

$$\alpha \in C^3(I), \quad \alpha'(x) \neq 0 \quad \text{na} \quad I, \quad p(x) = -\{\alpha, x\} - \alpha'^2(x),$$

$$\text{kde} \quad \{\alpha, x\} = \frac{1}{2}\alpha'''(x)/\alpha'(x) - \frac{3}{4}\Big(\alpha''(x)/\alpha'(x)\Big)^2,$$

je Schwarzovská derivace fáze α v čísle x.

Obecné řešení y rovnice (p) může být napsáno ve tvaru

$$y(x; c_1, c_2) = c_1 \frac{\sin(\alpha(x) + c_2)}{\sqrt{|\alpha'(x)|}}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \ \text{jsou lib. konstanty.}$$

Nechť x_0 je libovolný bod definičního intervalu I a y značí netriviální řešení rovnice (p) mající nulový bod v x_0. Označme $\varphi(x_0)$ první nulový bod tohoto řešení y napravo od x_0. Funkce φ se nazývá *disperze* rovnice (p). Každá taková disperze splňuje

$$\varphi(x) > x, \quad \varphi \in C^3, \quad \varphi'(x) > 0$$

na svém definičním intervalu (který může být i prázdný).

Mezi každou fází α a disperzí φ téže diferenciální rovnice platí následující vztah

$$\alpha(\varphi(x)) = \alpha(x) + \pi \cdot \mathrm{sign}\alpha',$$

který je Abelovou funkcionální rovnicí.

Spolu s rovnicí (p) uvažujme rovnici téhož tvaru

$$(q) \quad z'' = q(t)z, \quad q \in C^0(J), \quad J = (c, d), \ -\infty \leq c < d \leq \infty.$$

Rovnice (p) je *globálně transformovatelná* na rovnici (q), jestliže existuje bijekce

$$h \in C^3(J), \quad h(J) = I, \quad h'(t) \neq 0 \quad \text{na} \quad J$$

taková, že kdykoliv y je řešením rovnice (p), pak z dané vztahem

$$z(t) := \frac{1}{\sqrt{|h'(t)|}} \, y(h(t)), \quad t \in J$$

je řešením rovnice (q); faktor f v Kummerově transformaci závisí na změně nezávislé proměnné h, protože rovnice (p) a (q) jsou speciálního, Jacobiho tvaru, tj. s nulovým koeficientem u první derivace.

O. Borůvka studoval bohaté algebraické struktury grupy fází, kdy uvažoval množinu všech bijekcí α,

$$\mathcal{G} = \{\alpha; \alpha \in C^3(-\infty, \infty)\}$$

se skládáním funkcí jako grupovou operací. Tato grupa je ve skutečnosti sjednocením všech fází oboustranně oscilatorických rovnic na intervalu $(-\infty, \infty)$. Pak množina, grupa všech globálních transformací takové rovnice do sebe je podgrupou grupy $\mathcal{G}$, a všechny iterace její disperze φ, $\{\varphi^{[n]}; n \in \mathbb{N}\}$ tvoří centrum této podgrupy. Borůvka pak čistě algebraickými prostředky popsal všechny globální transformace mezi dvěma oboustranně oscilatorickými diferenciálními rovnicemi druhého řádu. Dále pokračoval axiomatizací vlastností těchto objektů a studiem tzv. *abstraktních fázových grup*.

Všechna řešení dané rovnice (p) mají buď jen konečně, nebo jen nekonečně mnoho nulových bodů na intervalu I. V prvním případě je rovnice (p) neoscilatorická, její *konečný typ* m je definován jako kladné číslo m, které představuje maximální počet nul svých netriviálních řešení, tj. rovnice (p) má řešení s m nulovými body, ale žádné z jejích řešení nemá $m + 1$ nulových bodů na I. Navíc, rovnice (p) konečného typu m má *obecný charakter*, jestliže má dvě lineárně nezávislá řešení s $m - 1$ nulovými body na I, jinak má *speciální charakter*.

V druhém případě je rovnice (p) typu ∞. Její charakter je buď *jednostranně* oscilatorický (pravo- nebo levostranně), nebo *oboustranně* oscilatorický.

Nyní můžeme formulovat Borůvkovo kritérium globální ekvivalence lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu:

Rovnice (p) *a* (q) (vždy i se svými definičními intervaly) *jsou globálně ekvivalentní, když a jen když jsou stejného typu a současně mají i týž charakter.*

Kanonické diferenciální rovnice druhého řádu reprezentující všechny třídy globálně ekvivalentních rovnic jsou:

$y'' + y = 0$	na	$(0, \pi/2)$	typ 1,	obecná
$y'' + y = 0$	na	$(0, \pi)$	typ 1,	speciální
$y'' + y = 0$	na	$(0, 3\pi/2)$	typ 2,	obecná
$y'' + y = 0$	na	$(0, 2\pi)$	typ 2,	speciální
...			...	...
$y'' + y = 0$	na	$(0, (m - 1/2)\pi)$	typ m,	obecná
$y'' + y = 0$	na	$(0, m\pi)$	typ m,	speciální
...			...	...
$y'' + y = 0$	na	$(0, \infty)$	typ ∞,	jednostranně oscilatorická
$y'' + y = 0$	na	$(-\infty, \infty)$	typ ∞,	oboustranně oscilatorická.

Více informací o Borůvkově teorii globálních transformací lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu je uvedeno v jeho přehledném článku [79] publikovaném v časopise *Differencialnyje uravněnija* (viz. též anglická verze v *Differential equations*).

Nyní, kdy byla teorie transformací vybudována pro lineární diferenciální rovnice libovolného řádu, můžeme konstatovat, že nevzniklo pouze zobecnění a rozšíření Borůvkovy teorie pro rovnice druhého řádu, ale že tato teorie zůstává základním kamenem obecné teorie.