4. Základní operace s maticemi

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971. pp. 17--20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401331

4. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATICEMI

Vedle pojmu rovnosti dvou matic, který jsme zavedli už v odst. 1.4, jsou důležitými pojmy sčítání (popř. odčítání), skalární násobení a násobení matic.

4.1. Sčítání dvou matic je operace, která ke dvěma maticím $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ téhož typu m/n přiřazuje novou matici, která se nazývá *součet* matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a značí se $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Je to matice opět typu m/n; její každý prvek c_{jk} se dostane sečtením stejnolehlých prvků $a_{jk} \in \mathbf{A}$, $b_{jk} \in \mathbf{B}$, takže

$$c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}\,.$$

Podobně se definuje *rozdíl* $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ matice $\mathbf{A}$ a matice $\mathbf{B}$ (v tomto pořadí). Pro jeho prvky d_{jk} platí vztah

$$d_{jk} = a_{jk} - b_{jk}\,.$$

Je tedy

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix},$$

4.2. Poznámky. 1. Jsou-li matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nad týmž tělesem T, pak vzhledem k definici 1.1 jsou obě matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ opět nad tělesem T.

2. Zřejmě pro každou matici $\mathbf{A}$ typu m/n a matici $\mathbf{O}$ téhož typu platí

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{O} = \mathbf{A}\,.$$

Příklad 3. Vypočtěme součet $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a rozdíl $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 + \sqrt{2} \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 - \sqrt{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.3. Skalární násobení matice číslem je operace, která k libovolné matici $\boldsymbol{A}$ typu m/n a libovolnému číslu r přiřazuje novou matici, kterou značíme $\boldsymbol{A}r$. Nazýváme ji *skalární součin* matice $\boldsymbol{A}$ s číslem r. Je to opět matice typu m/n a je utvořena tak, že každý její prvek je součinem stejnolehlého prvku $a_{jk} \in \boldsymbol{A}$ s číslem r. Je to tedy matice

$$\boldsymbol{A}r = \begin{bmatrix} a_{11}r & a_{12}r & \dots & a_{1n}r \\ a_{21}r & a_{22}r & \dots & a_{2n}r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}r & a_{m2}r & \dots & a_{mn}r \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Podobně se definuje skalární součin čísla r s maticí $\boldsymbol{A}$, který značíme symbolem $r\boldsymbol{A}$, přičemž klademe

$$r\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Protože platí $ra_{jk} = a_{jk}r$, jsou si matice (1) a (2) rovny, takže je vždy

$$\boldsymbol{A}r = r\boldsymbol{A}. \tag{3}$$

Všimněme si, že skalární součin $\boldsymbol{A}r$, popř. $r\boldsymbol{A}$ je definován pro každou matici $\boldsymbol{A}$ a každé číslo r. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je nad tělesem T a číslo r je v tělese T, je matice $\boldsymbol{A}r$, popř. $r\boldsymbol{A}$ také nad tělesem T. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je nad tělesem T, ale číslo r není v T, pak matice $\boldsymbol{A}r$, popř. $r\boldsymbol{A}$ není nutně nad tělesem T, avšak je nad každým tělesem, které obsahuje těleso T a současně číslo r (např. nad tělesem všech komplexních čísel).

4.4. Poznámky. 1. Vzhledem ke vztahu (3) je jedno, mluvíme-li o skalárním součinu matice $\boldsymbol{A}$ s číslem r nebo čísla r s maticí $\boldsymbol{A}$.

2. Místo výrazu $(-1)\,\boldsymbol{A}$ píšeme stručněji $-\boldsymbol{A}$.

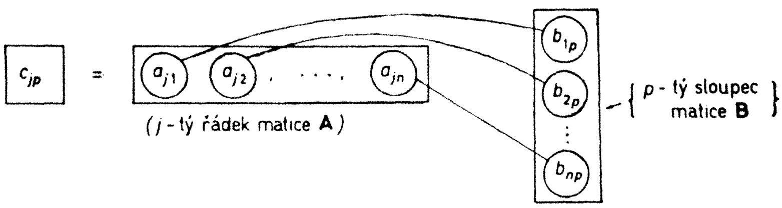
3. Snadno se zjistí, že čtvercová matice $\boldsymbol{B}$ je polosymetrická, právě když pro ni platí vztah

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}' .$$

4.5. Násobení dvou matic je operace, která k matici $\boldsymbol{A}$ typu m/n a matici $\boldsymbol{B}$ typu n/r přiřazuje matici typu m/r, kterou značíme $\boldsymbol{AB}$ a nazýváme *součin* matice $\boldsymbol{A}$ s maticí $\boldsymbol{B}$ (v tomto pořadí). Přitom matice $\boldsymbol{AB}$ má prvky c_{jp}, které se z prvků $a_{jk} \in \boldsymbol{A}$ a $b_{kp} \in \boldsymbol{B}$ (kde $j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $p = 1, 2, \ldots, r$) dostanou podle vztahu

$$c_{jp} = a_{j1}b_{1p} + a_{j2}b_{2p} + \ldots + a_{jn}b_{np} . \qquad (4)$$

Ačkoliv se toto pravidlo zdá na první pohled složité a umělé, uvidíme brzy, že jeho původ je zcela přirozený. Zapamatuje se snadno pomocí tohoto schématu:



Příklad 4. Vypočtěme součin matice $\boldsymbol{A}$ s maticí $\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice **AB** má prvky

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= 0.(-1) + 1.2 + 2.1 &&= 4,\\
c_{12} &= 0.3 + 1.0 + 2.1 &&= 2,\\
c_{13} &= 0.1 + 1.0 + 2.(-1) &&= -2,\\
c_{21} &= 3.(-1) + (-1).2 + 0.1 &&= -5,\\
c_{22} &= 3.3 + (-1).0 + 0.1 &&= 9,\\
c_{23} &= 3.1 + (-1).0 + 0.(-1) &&= 3.
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.6. Poznámka. Pro čtvercové matice (stupně n) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{O}$ zřejmě platí vztahy

$$\boldsymbol{AO} = \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}.$$