# 6. MATICE RECIPROKÉ NEBOLI INVERZNÍ

**6.1. Matice reciproká zprava a reciproká zleva.** Obdoba mezi počítáním s maticemi a obyčejnými čísly vede k této otázce: Existuje nějaká operàce s maticemi, která by byla obdobou dělení čísel? Nejprve připomeňme, co se rozumí reciprokou hodnotou nějakého čísla $a$.

Reciprokou hodnotou čísla $a$ rozumíme takové číslo $x$, které vyhovuje rovnici

$$ax = 1 .$$

Tato reciproká hodnota se značí symbolem $1/a$, popř. $a^{-1}$, takže je

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 , \quad \text{popř.} \quad aa^{-1} = 1 .$$

Z aritmetiky víme, že reciproká hodnota čísla $a$ existuje, právě když $a \neq 0$. Dělit číslo $b$ číslem $a \neq 0$ znamená násobit číslo $b$ číslem $a^{-1}$.

V odst. 4.6 jsme zjistili, že pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ platí vztah

$$\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A} .$$

Proto jednotková matice $\boldsymbol{E}$ je obdobou jedničky v aritmetice. Je tudíž přirozené se tázat, zda k libovolné matici $\boldsymbol{A}$ typu $m/n$ existuje taková matice $\boldsymbol{X}$ typu $n/m$, že platí maticová rovnice

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E} , \tag{7}$$

popř. zda existuje taková matice $\boldsymbol{Y}$ typu $n/m$, že je

$$\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{E} . \tag{8}$$

V případě, že matice $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ splňující vztahy (7), (8) existují, budeme nazývat matici $\boldsymbol{X}$ *reciprokou zprava*, kdežto $\boldsymbol{Y}$ maticí *reciprokou zleva* k matici $\boldsymbol{A}$, a budeme je značit $\boldsymbol{A}^{-1}$, popř. ${}^{-1}\boldsymbol{A}$.

**6.2. Věta o matici reciproké zprava, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.** Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu $m/n$. 1. Je-li $m < n$, pak k ní existují matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ reciproké zprava, právě když hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna $m$. V tom případě se každá matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{HL} + \tilde{\boldsymbol{X}}, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{H}$ je libovolná matice typu $n/(n - m)$ vyhovující rovnici

$$\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{O} \tag{10}$$

a mající hodnost $n - m$, $\boldsymbol{L}$ je matice typu $(n - m)/m$, kdežto $\tilde{\boldsymbol{X}}$ je libovolná matice, která je partikulárním řešením rovnice (7). Přitom se matice $\boldsymbol{H}$ nazývá *fundamentální řešení* rovnice (10).

2. Je-li $m = n$, tj. je-li matice $\boldsymbol{A}$ čtvercová řádu $n$, a je-li její hodnost $n$, existuje k ní právě jedna matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ reciproká zprava. V případě, že hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je menší než $n$, neexistuje k matici $\boldsymbol{A}$ žádná matice reciproká zprava.

3. Je-li $m > n$, pak neexistuje k matici $\boldsymbol{A}$ žádná matice reciproká zprava.

Důkaz: Je-li $\boldsymbol{A} = \|a_{jk}\|$, $\boldsymbol{X} = \|x_{kj}\|$ a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice řádu $m$, představuje rovnice (7) celkem $m^2$ lineárních rovnic tvaru

$$a_{j1}x_{1r} + a_{j2}x_{2r} + \ldots + a_{jn}x_{nr} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq r, \\ 1 & \text{pro } j = r, \end{cases}$$

přičemž $j, r = 1, 2, \ldots, m$.

Při každém pevně zvoleném $r\,(= 1, 2, \ldots, m)$ dostaneme tedy $m$ rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_{1r} + a_{12}x_{2r} + \ldots + a_{1n}x_{nr} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_{1r} + a_{r2}x_{2r} + \ldots + a_{rn}x_{nr} &= 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_{1r} + a_{m2}x_{2r} + \ldots + a_{mn}x_{nr} &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

1. Nechť $m < n$. (11) je soustava $m$ nehomogenních rovnic o $n$ neznámých $x_{1r}, \ldots, x_{nr}$. Víme, že taková soustava má řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice. Nechť $p$ značí hodnost matice soustavy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} & \ldots & a_{pn} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

To znamená, že aspoň jeden determinant řádu $p$ vybraný z matice $\boldsymbol{A}$ je od nuly různý, kdežto všechny determinanty řádu $p + 1$ (pokud existují) jsou rovny nule. Nechť např. právě determinant řádu $p$ v levém rohu nahoře v matici $\boldsymbol{A}$ je nenulový. Je-li $p < m$, pak rozšířená matice soustavy (11), v níž je $r = p + 1$, je tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} & 0 \\ a_{p+1,1} & \ldots & a_{p+1,n} & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

Tato matice má zřejmě hodnost rovnou $p + 1$.

Odtud plyne, že má-li mít soustava (11) při každém $r$ $(= 1, 2, \ldots, m)$ řešení, musí být $p = m$. V tom případě však existuje $n - m$ lineárně nezávislých řešení

$$\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{n1}; \ldots; \xi_{1,n-m}, \ldots, \xi_{n,n-m} \tag{12}$$

homogenního systému rovnic patřícího k soustavě (11), přičemž obecné řešení soustavy (11) je

$$\begin{aligned} x_{1r} &= t_{1r}\xi_{11} + t_{2r}\xi_{12} + \ldots + t_{n-m,r}\xi_{1,n-m} + \tilde{x}_{1r} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{nr} &= t_{1r}\xi_{n1} + t_{2r}\xi_{n2} + \ldots + t_{n-m,r}\xi_{n,n-m} + \tilde{x}_{nr}. \end{aligned}$$

Přitom $\tilde{x}_{1r}, \ldots, \tilde{x}_{nr}$ značí libovolné partikulární řešení nehomogenní soustavy (11) a $t_{1r}, t_{2r}, \ldots, t_{n-m,r}$ jsou libovolné konstanty. Proto matici $\boldsymbol{X}$, která je řešením rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$, můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1,n-m} \\ \xi_{21} & \ldots & \xi_{2,n-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{n,n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ t_{21} & \ldots & t_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n-m,1} & \ldots & t_{n-m,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \ldots & \tilde{x}_{1m} \\ \tilde{x}_{21} & \ldots & \tilde{x}_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{x}_{n1} & \ldots & \tilde{x}_{nm} \end{bmatrix}.$$

Označíme-li matice vyskytující se na pravé straně tohoto vzorce postupně $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}$, dostaneme pro matici $\boldsymbol{A}$ vztah (9), který jsme měli dokázat. Matice $\boldsymbol{L}$ je libovolná matice typu $(n - m)/m$, $\tilde{\boldsymbol{X}}$ je matice typu $n/m$ vyhovující rovnici (7) a konečně $\boldsymbol{H}$ je matice typu $n/(n - m)$, přičemž platí

$$\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{O}$$

a její hodnost je rovna $n - m$ vzhledem k tomu, že řešení (12) homogenního systému, který přísluší k soustavě (11), jsou nezávislá.

Naopak se snadno nahlédne, že každá matice $\boldsymbol{X}$ typu $n/m$, která je tvaru (9), vyhovuje rovnici (7), je-li $\boldsymbol{H}$ matice vyhovující rovnici $\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{L}$ libovolná matice typu $(n - m)/m$ a $\tilde{\boldsymbol{X}}$ libovolná matice vyhovující rovnici (7).

2. Nechť $m = n$. V tomto případě má soustava (11) podle Cramerova pravidla právě jedno řešení, když hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna $n$. Je-li však její hodnost $p < n$ a je-li v této matici determinant $p$-tého řádu, např. v levém rohu nahoře, nenulový, pak soustava (11), v níž je $r = p + 1$, nemá řešení vzhledem k tomu, že příslušná rozšířená matice má hodnost $p + 1$, kdežto matice $\boldsymbol{A}$ hodnost $p$. Proto v případě $p < n$ neexistuje řešení rovnice (7).

3. Nechť $m > n$ a nechť $p$ je hodnost matice $\boldsymbol{A}$. Pak nutně

$$p \leqq n .$$

Nechť determinant řádu $p$ v levém rohu nahoře matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový. Soustava (11), v níž je $r = p + 1$, nemá opět řešení z téhož důvodu jako v předešlém případě 2.

**6.3.** Poznámky o výpočtu matice reciproké zprava. 1. Matice $\boldsymbol{H}$ v případě, kdy $m < n$, se snadno určí podle Frobeniovy metody pro řešení systému lineárních homogenních rovnic takto:

Matici $\boldsymbol{A}$ doplníme $n - m$ řádky

$$z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{in}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n - m)$ na čtvercovou matici stupně $n$, čímž obdržíme matici

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \\ z_{11} & \ldots & z_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n-m,1} & \ldots & z_{n-m,n} \end{bmatrix}.$$

Čísla $z_{ik}$ zvolíme libovolně, ale tak, aby determinant $|\tilde{\boldsymbol{A}}| \neq 0$. To lze, protože matice $\boldsymbol{A}$ má podle předpokladu hodnost $m$.

Značí-li $Z_{ik}$ algebraický doplněk prvku $z_{ik}$ v matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, tvoří

$$Z_{11}, Z_{12}, \ldots, Z_{1n}; \ldots; Z_{n-m,1}, Z_{n-m,2}, \ldots, Z_{n-m,n}$$

$n - m$ lineárně nezávislých řešení homogenního systému rovnic patřícího k soustavě (11).

Matice

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \ldots & Z_{n-m,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{1n} & \ldots & Z_{n-m,n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

splňuje rovnici $\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{O}$.

Nakonec si všimněme, že matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ vyjádřená ve tvaru (9) je nad tělesem $T$, když nad tělesem $T$ jsou matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}$. A zřejmě nad tělesem $T$ existují takové matice $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{L}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}$, že příslušná matice $\boldsymbol{X}$ vyhovuje rovnici (9).

2. V případě, kdy $m = n$ a kdy hodnost čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ stupně $n$ je $n$ (takže $|\boldsymbol{A}| \neq 0$), určí se matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ reciproká zprava podle vzorce

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A}\,, \tag{14}$$

kde adj **A** značí adjungovanou (neboli přidruženou) matici k matici **A**. Matice adj **A** je definována takto:

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

přičemž $A_{ik}$ značí algebraický doplněk prvku $a_{ik}$ v matici **A**. Všimněme si, že prvky matice adj **A** v libovolném $j$-tém *řádku* jsou algebraickými doplňky prvků v $j$-tém *sloupci* matice **A**. Podle známé vlastnosti reciprokých determinantů je determinant

$$|\operatorname{adj} \mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{n-1} .$$

Přitom matice adj **A** je zřejmě nad tělesem $T$ a platí

$$\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \dots A_{n1} \\ \dots\dots\dots \\ A_{1n} \dots A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix} =$$

$$= |\mathbf{A}| \,.\, \mathbf{E} \,.$$

Odtud plyne vpředu uvedený vzorec (14) pro výpočet matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. Tato matice jako skalární součin čísla $1/|\mathbf{A}|$ a adjungované matice adj **A** je také nad tělesem $T$.

*Příklad 7.* Určeme matici reciprokou zprava k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice **A** (typu 2/3, takže $m < n$) má hodnost $p = 2$, neboť determinant $D$ utvořený z prvních 2 řádků a sloupců má hodnotu $D = -4 \neq 0$. Proto existuje matice reciproká zprava k matici **A**. Vypočteme ji podle odst. 6.3.1 tak, že nejprve vezmeme v úvahu matici

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jejíž determinant $|\tilde{\mathbf{A}}| = D = -4$.

Matice $\boldsymbol{H}$ bude typu 3/1 a určí se pomocí algebraických doplňků prvků třetího řádku matice $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Protože

$$Z_{31} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -2\,, \quad Z_{32} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 0\,,$$

$$Z_{33} = D = -4\,,$$

na základě vztahu (13) dostaneme $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Dále matice $\boldsymbol{L}$ typu 1/2 bude tvaru

$$\boldsymbol{L} = [t_1 \;\; t_2]\,.$$

Partikulární řešení $\tilde{\boldsymbol{X}}$ rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ obdržíme řešením rovnice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Protože jde o partikulární řešení a protože matice $\boldsymbol{A}$ má hodnost 2, přičemž determinant různý od nuly je např. vpředu uvedený determinant $D$, můžeme položit $x_3 = x_6 = 0$. Tím dostaneme rovnice

$$2x_1 - x_2 = 1\,, \qquad 2x_4 - x_5 = 0\,,$$
$$-2x_1 - x_2 = 0\,, \quad -2x_4 - x_5 = 1\,,$$

jejichž řešením je $x_1 = 1/4$, $x_2 = -1/2$, $x_4 = -1/4$, $x_5 = -1/2$. Je tedy

$$\tilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hledanou matici $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{HL} + \tilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} [t_1 \;\; t_2] + \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2t_1 & -2t_2 \\ 0 & 0 \\ -4t_1 & -4t_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 - 2t_1 & -1/4 - 2t_2 \\ -1/2 & -1/2 \\ -4t_1 & -4t_2 \end{bmatrix}$$

takže máme

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 - 2t_1 & -1/4 - 2t_2 \\ -1/2 & -1/2 \\ -4t_1 & -4t_2 \end{bmatrix},$$

přičemž za $t_1$ a $t_2$ můžeme volit libovolná, např. reálná čísla.

Proveďme zkoušku tím, že určíme součin $\boldsymbol{AX}$. Obdržíme

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 - 4t_1 + 1/2 + 4t_1 & -1/2 - 4t_2 + 1/2 + 4t_2 \\ -1/2 + 4t_1 + 1/2 - 4t_1 & 1/2 + 4t_2 + 1/2 - 4t_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}.$$

**6.4. Věta o matici reciproké zleva** $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$. Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je typu $m/n$.

1. Je-li $m < n$, neexistuje k matici $\boldsymbol{A}$ žádná matice reciproká zleva.

2. Je-li $m = n$, tj. je-li matice $\boldsymbol{A}$ čtvercová stupně $n$, a je-li její hodnost $n$, pak k ní existuje právě jedna matice $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$ reciproká zleva. V případě, že hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je menší než $n$, neexistuje k $\boldsymbol{A}$ žádná matice $\boldsymbol{Y}$ reciproká zleva.

3. Je-li $m > n$, pak k $\boldsymbol{A}$ existují matice $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$ reciproké zleva, právě když hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna $n$. V tom případě se každá matice $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$ dá vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PF} + \tilde{\boldsymbol{Y}}, \tag{15}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je libovolná matice typu $(m - n)/m$ vyhovující rovnici

$$\boldsymbol{FA} = \boldsymbol{O} \tag{16}$$

a mající hodnost $m - n$, $\boldsymbol{P}$ je matice typu $n/(m - n)$, kdežto $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ je libovolná matice, která je partikulárním řešením rovnice $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}$. Přitom se matice $\boldsymbol{F}$ nazývá *fundamentální řešení* rovnice (16).

Důkaz se provede tím, že se věta 6.2. aplikuje na rovnici $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$ a pak se přejde k maticím transponovaným ($\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{P}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}' = \tilde{\boldsymbol{Y}}$).

**6.5.** Poznámky. 1. Matice $\boldsymbol{F}$ se určí metodou Frobeniovou (obdobně jako matice $\boldsymbol{H}$) a je nad týmž tělesem $\boldsymbol{T}$ jako matice $\boldsymbol{A}$. Také matice $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$ (pokud existuje) je nad tělesem $T$, jsou-li obě matice $\boldsymbol{P}$ a $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ nad tělesem $T$, což lze vždy zařídit.

2. Má-li čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ stupně $n$ hodnost $n$, tj. je-li $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, pak se jediná matice $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$ reciproká zleva určí podle vzorce

$$ {}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \operatorname{adj} \boldsymbol{A}, \tag{17}$$

přičemž matice ${}^{-1}\boldsymbol{A}$ je opět nad tělesem $T$.

**6.6. Závěr.** Z vět 6.2 a 6.4 plyne, že matice $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$ (popř. $\boldsymbol{Y} = {}^{-1}\boldsymbol{A}$) existují, jen když je $m \leqq n$ (popř. $m \geqq n$).

1. Je-li tedy $m \neq n$, pak matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, ${}^{-1}\boldsymbol{A}$ neexistují současně.

2. Je-li však $m = n$, pak ze vztahů (14) a (17) plyne, že pro $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ je

$$\boldsymbol{A}^{-1} = {}^{-1}\boldsymbol{A}. \tag{18}$$

Tento vztah, který je důležitý pro svou jednoduchost i pro své aplikace, plyne také z toho, že každé řešení rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ je zároveň řešením rovnice $\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{E}$. Je-li totiž $\boldsymbol{X}$ řešením rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{Y}$ řešením rovnice $\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{E}$, pak zřejmě platí

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{EX} = (\boldsymbol{YA})\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AX}) = \boldsymbol{YE} = \boldsymbol{Y},$$

takže

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}.$$

**6.7. Definice.** 1. Čtvercová matice $\boldsymbol{A}$, jejíž determinant $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, nazývá se *regulární*. V opačném případě se nazývá *singulární*.

2. Je-li čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ regulární, pak matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ nazýváme *reciprokou* (neboli *inverzní*) k matici $\boldsymbol{A}$.

*Příklad 8.* Vypočtěme matici inverzní k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Daná matice je regulární, neboť její determinant $|\boldsymbol{A}| = -85$. Proto k ní existuje matice reciproká

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \operatorname{adj} \boldsymbol{A} .$$

Pro adjungovanou matici dostáváme tyto prvky

$$A_{11} = 4 . 2 - 5 . 1 = 3 , \qquad A_{12} = -(-1 . 2 - 3 . 5) = 17 ,$$
$$A_{13} = -1 . 1 - 3 . 4 = -13 ,$$

$$A_{21} = -(0 . 2 - 1 . 7) = 7 , \quad A_{22} = 2 . 2 - 3 . 7 = -17 ,$$
$$A_{23} = -(2 . 1 - 3 . 0) = -2 ,$$

$$A_{31} = 0 . 5 - 4 . 7 = -28 , \quad A_{32} = -(2 . 5 + 7 . 1) = -17 ,$$
$$A_{33} = 2 . 4 + 1 . 0 = 8 .$$

Je tedy

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix} .$$

Hledaná inverzní matice je

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{85} \begin{bmatrix} -3 & -7 & 28 \\ -17 & 17 & 17 \\ 13 & 2 & -8 \end{bmatrix} .$$

Přitom platí

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{85} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -7 & 28 \\ -17 & 17 & 17 \\ 13 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{85} \begin{bmatrix} -3 & -7 & 28 \\ -17 & 17 & 17 \\ 13 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

**6.8. Věta o reciprokých maticích.** Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou regulární matice stupně $n$. Pak platí

$$1.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\,; \quad 3.\ (\boldsymbol{A}^{-1})' = (\boldsymbol{A}')^{-1}\,;$$

$$2.\ |\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}\,; \quad 4.\ (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}\,;$$

$$5.\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\,.$$

Důkaz: 1. První tvrzení plyne ze vztahu (18).

2. Pro determinant $|\boldsymbol{A}^{-1}|$ platí podle (14) vztahy

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{|\text{adj}\ \boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}|^n} = \frac{|\boldsymbol{A}|^{n-1}}{|\boldsymbol{A}|^n} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\,.$$

3. Obě matice $(\boldsymbol{A}^{-1})'$, $(\boldsymbol{A}')^{-1}$ mají tytéž prvky. Vskutku, prvek $c_{jk}$ první matice je

$$c_{jk} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} A_{jk}\,,$$

kdežto prvek $d_{jk}$ druhé je

$$d_{jk} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} A_{jk} = c_{jk} \quad \text{pro} \quad j, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

4. Matice $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$ představuje jediné řešení rovnice

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}\,,$$

jíž podle vztahu 1. vyhovuje řešení $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$.

5. Levá strana posledního vztahu je řešením rovnice

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}\,.$$

Takové řešení $\boldsymbol{X}$ je jediné, protože z relace $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,.\,|\boldsymbol{B}|$ a z předpokladu $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $|\boldsymbol{B}| \neq 0$ plyne, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ je regulární matice. Odtud a ze vztahů

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

vychází tvrzení.

**6.9.** Poznámka. Tvrzení 5 předešlé věty se dá rozšířit na libovolný konečný počet regulárních matic řádu $n$: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{M}$. Platí totiž

$$(\boldsymbol{ABC}\ldots\boldsymbol{M})^{-1} = \boldsymbol{M}^{-1}\ldots\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

**6.10. Věta.** Nechť regulární čtvercové matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou zaměnitelné. Pak jsou zaměnitelné též matice

1. $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}$;
2. $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}$; popř. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{-1}$.

Důkaz: 1. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{BA})^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BAA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1}$.

Analogicky se dokáže druhá část tvrzení 2.

**6.11. Definice podílu matic.** Jsou-li matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ zaměnitelné a je-li $\boldsymbol{A}$ regulární, pak *podílem* $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ matice $\boldsymbol{B}$ maticí $\boldsymbol{A}$ rozumíme matici

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}, \quad \text{popř.} \quad \boldsymbol{BA}^{-1},$$

takže (podle věty 6.10.2) je

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{BA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

**6.12. Věta.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice stupně $n$ a matice $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ jsou regulární stupně $n$. Jsou-li každé dvě z matic $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ zaměnitelné, pak platí

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{CA}}{\boldsymbol{CB}} = \frac{\boldsymbol{CA}}{\boldsymbol{BC}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{CB}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{BC}}.$$

Důkaz: Zřejmě platí

$$\boldsymbol{AB}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{CB})^{-1}\,\boldsymbol{CA} =$$
$$= (\boldsymbol{BC})^{-1}\,\boldsymbol{CA} = (\boldsymbol{CB})^{-1}\,(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BC})^{-1}\,(\boldsymbol{AC}).$$

*Příklad 9.* Určete podíl matice $\mathbf{B}$ maticí $\mathbf{A}$, přičemž

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Dané matice jsou regulární, neboť $|\mathbf{A}| = -9$, $|\mathbf{B}| = -81$. Určíme matici $\mathbf{A}^{-1}$. Protože

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{je} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\mathbf{B}.$$

Proto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{9}\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$.

Přitom je

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 18 & -9 & 0 \\ -9 & 27 & -18 \\ 9 & -18 & 27 \end{bmatrix}.$$

Je tedy

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$