CVIČENÍ 1

1. Určete $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Určete $2\boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, jsou matice z cvičení 1.

3. Určete součiny:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Vypočtěte mocniny matic:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}^2, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3, \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

5. Stopou čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme součet prvků v její hlavní diagonále, tj. $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Dokažte, že matice $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$ mají stejné stopy.

6. Použitím výsledku cvičení 5 dokažte, že nikdy nemůže platit $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$.

7. Určete všechny matice zaměnitelné s maticí $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

8. Určete matici $\boldsymbol{X}$, která vyhovuje rovnici

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b)}\ \boldsymbol{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Určete reciprokou matici k dané matici

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

10. Určete matice $\boldsymbol{AB}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, je-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

3. a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}$.

4. a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 18 & -9 & 0 \\ -9 & 27 & -18 \\ 9 & -18 & 27 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Levá strana má stopu rovnou $s = 0$, kdežto pravá strana $s = n$.

7. $\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a + 3b \end{bmatrix}.$

8. a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

9. a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$.

10. $\boldsymbol{AB}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$