7. VEKTORY A LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

7.1. Definice. 1. *Aritmetickým vektorem* o n ($\geqq 1$) souřadnicích (složkách) nad tělesem T, stručněji *vektorem* o n souřadnicích (složkách), rozumíme matici typu $n/1$ nad tělesem T. Prvky této matice nazýváme *souřadnice* neboli *složky* vektoru.

Vektory označujeme obvykle malými tučnými písmeny, např. $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ... popř. též s indexy. Vektor nulový označujeme zpravidla $\boldsymbol{0}$.

2. Množina všech aritmetických vektorů o n souřadnicích nad tělesem T se nazývá *aritmetický vektorový prostor* V_n nad tělesem T, stručněji *vektorový prostor* V_n.

Ve smyslu definice 7.1.2 mluvíme obvykle o aritmetických vektorech v prostoru V_n, popř. vektorech v prostoru V_n místo o vektorech o n souřadnicích (složkách).

3. Ke každému vektoru $\boldsymbol{a}$ v prostoru V_n patří tzv. *sdružený* neboli *transponovaný* vektor; je to matice $\boldsymbol{a}'$ typu $1/n$, sdružená s maticí $\boldsymbol{a}$.

Je zřejmé, že matice sdružená s libovolnou maticí typu $1/n$ nad tělesem T je vektor v prostoru V_n nad tělesem T.

7.2. Tři základní operace s vektory. Protože vektory v prostoru V_n jsou matice typu $n/1$, jsou pro ně definovány tři základní operace: rovnost, sčítání a skalární násobení ve smyslu odst. 1.4, 4.1, 4.3. Kvůli úplnosti je zopakujeme:

7.2.1. Rovnost vektorů $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ je vyjádřena n rovnicemi tvaru $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$ a zapisujeme ji symbolem $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

7.2.2. Součet vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je vektor tvaru $\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$. Značíme jej symbolem $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

7.2.3. *Skalární součin* čísla k s vektorem $\boldsymbol{x}$ je vektor $\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$, který stručně označujeme $k\boldsymbol{x}$.

Podobně se skalární součin vektoru $\boldsymbol{x}$ s číslem k značí $\boldsymbol{x}k$.

7.3. Poznámky. 1. Pro uvedené operace s vektory platí pravidla 5.1 a 5.2.

2. Dále si všimněme, že každou matici typu m/n můžeme považovat za uspořádaný systém n vektorů v prostoru V_m anebo za uspořádaný systém m transponovaných vektorů z prostoru V_n.

7.4. Závislost vektorů. Buď dáno $k\,(\geqq 1)$ vektorů v prostoru V_n

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, \boldsymbol{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ se nazývají *vzájemně nezávislé*, stručněji *nezávislé*, když matice typu n/k z nich utvořená,

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k] = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \\ a_{21} \ldots a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk} \end{bmatrix}$$

má hodnost k. V opačném případě se ony vektory nazývají *vzájemně závislé*, stručněji *závislé*. Někdy mluvíme též o *lineárně* nezávislých, popř. závislých vektorech.

Podle této definice je mezi každými k vektory v prostoru V_n nejvýše n vektorů vzájemně nezávislých. Je-li $k = n$, jsou ony vektory vzájemně nezávislé právě tehdy, když čtvercová matice stupně n z nich utvořená, je regulární. Je-li mezi danými k vektory vektor nulový, jsou tyto vektory vzájemně závislé.

7.5. Věta. Vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ v prostoru V_n jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, když vektorová rovnice

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

o neznámých číslech $x_1, \ldots, x_k$, je splněna jedině nulami, tj. $x_1 = = \ldots = x_k = 0$.

Důkaz: Při hořejším označení složek vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ zastupuje uvedená vektorová rovnice systém n lineárních homogenních rovnic o neznámých $x_1, \ldots, x_k$

$$\begin{gathered} x_1 a_{11} + \ldots + x_k a_{1k} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 a_{n1} + \ldots + x_k a_{nk} = 0\,. \end{gathered}$$

Tento systém má jediné řešení $x_1 = \ldots = x_k = 0$ právě tehdy, když matice jeho koeficientů má hodnost k.

7.6. Lineární transformace o dané matici. Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu m/n a nechť $\boldsymbol{x}$ je vektor v prostoru V_n.

Matice

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

je zřejmě typu $m/1$, a tedy je to vektor v prostoru V_m. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{x}^*$ vznikl z vektoru $\boldsymbol{x}$ *lineární transformací* (popř. *lineární substitucí*) *o matici* $\boldsymbol{A}$.

Při obvyklém označení prvků v matici $\boldsymbol{A}$ máme pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}^*$ vztahy

$$\begin{gathered} x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m^* = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\,. \end{gathered}$$

7.7. Vztahy mezi operacemi s maticemi a lineárními transformacemi. V souvislosti s pojmem lineární transformace jeví se definice rovnosti, sčítání, skalárního násobení a násobení matic, jak jsme je zavedli v kap. 4, přirozenými.

7.7.1. Rovnost matic. Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ značí matice téhož typu m/n. Transformuje-li lineární substituce o matici $\boldsymbol{A}$ každý vektor

$\mathbf{x} \in V_n$ v týž vektor jako lineární transformace o matici $\mathbf{B}$, pak je $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Důkaz: Za daných předpokladů platí identické rovnosti

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n$$

Odtud plyne, dosadíme-li např. $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$,

$$a_{11} = b_{11},\ a_{21} = b_{21},\ \ldots,\ a_{m1} = b_{m1}\,.$$

Podobně dostaneme pro $x_j = 1$, $x_k = 0$, $k \neq j$, vztahy

$$a_{1j} = b_{1j},\ \ldots,\ a_{mj} = b_{mj}\,.$$

Je tedy $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

7.7.2. Sčítání matic. Nechť opět $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ značí matice téhož typu m/n, kdežto $\mathbf{x}$ je libovolný vektor v prostoru V_n, $\mathbf{x}^*$ (popř. $\mathbf{x}^{**}$) vektor transformovaný z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ (popř. $\mathbf{B}$).

Pak matice $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (tj. součet matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{B}$) je právě taková, že lineární transformace o matici $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**}$.

Důkaz: Nechť lineární transformace o matici $\mathbf{C}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**}$.

Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}\mathbf{x}$ plyne

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{**} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{x}$$

podle pravidla 5.3.2. Odtud podle 7.7.1 vychází $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

7.7.3. Skalární násobení matice číslem. Nechť $\mathbf{A}$ značí matici typu m/n a nechť k je libovolné číslo. Je-li $\mathbf{x}$ libovolný vektor v prostoru V_n a $\mathbf{x}^*$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$, pak matice $k\mathbf{A}$ (jakožto skalární součin čísla k a matice $\mathbf{A}$) je právě taková, že lineární transformace o matici $k\mathbf{A}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $k\mathbf{x}^*$.

Důkaz: Nechť lineární transformace o matici $\mathbf{C}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $k\mathbf{x}^*$.

Z rovnice $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$ plyne

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = k\mathbf{x}^* = k(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (k\mathbf{A})\,\mathbf{x}$$

podle pravidla 5.2.2. Odtud podle 7.7.1 vychází $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$.

7.7.4. *Násobení matic.* Nechť $\mathbf{A}$ značí matici typu m/n a $\mathbf{B}$ matici typu h/m. Dále nechť $\mathbf{x}$ je libovolný vektor v prostoru V_n $\mathbf{x}^*$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}^{**}$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}^*$ lineární transformací o matici $\mathbf{B}$.

Pak matice $\mathbf{BA}$ (tj. součin matice $\mathbf{B}$ s maticí $\mathbf{A}$) je právě taková, že lineární transformace o matici $\mathbf{BA}$ převede vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^{**}$.

Důkaz: Nechť lineární transformace o matici $\mathbf{C}$ transformuje vektor $\mathbf{x}$ ve vektor $\mathbf{x}^{**}$.

Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}\mathbf{x}^*$ plyne

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{BA})\,\mathbf{x}$$

podle pravidla 5.3.1. Odtud podle 7.7.1 vychází $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$.

7.7.5. *Inverzní matice.* Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice řádu n a nechť $\mathbf{x}$ značí libovolný vektor v prostoru V_n kdežto $\mathbf{x}^*$ vektor vzniklý z vektoru $\mathbf{x}$ lineární transformací o matici $\mathbf{A}$.

Pak matice $\mathbf{A}^{-1}$, reciproká (inverzní) k matici $\mathbf{A}$, je právě taková, že lineární transformace o matici $\mathbf{A}^{-1}$ převede vektor $\mathbf{x}^*$ v původní vektor $\mathbf{x}$.

Důkaz: Nechť lineární transformace $\mathbf{C}$ transformuje vektor $\mathbf{x}^*$ ve vektor $\mathbf{x}$.

Z rovnic $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{C}\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ plyne

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{CA})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x}$$

podle pravidla 5.3.1. Odtud podle 7.7.1 vychází $\mathbf{CA} = \mathbf{E}$, takže $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$.

7.7.6. *Upozornění.* Všimněme si, že se každý vektor v prostoru V_n libovolnou transformací o matici typu m/n převede ve vektor v prostoru V_m