12. Poznámka o maticích převádějících danou matici v sebe

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971. pp. 82--83.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401340

12. POZNÁMKA O MATICÍCH PŘEVÁDĚJÍCÍCH DANOU MATICI V SEBE

12.1. Definice. Nechť $\boldsymbol{A}$ je daná čtvercová matice stupně n. Má-li nějaká čtvercová matice $\boldsymbol{P}$ řádu n takovou vlastnost, že

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\,, \tag{45}$$

říkáme, že matice $\boldsymbol{P}$ *převádí* matici $\boldsymbol{A}$ *v sebe.*

Je-li přitom determinant $|\boldsymbol{P}| = +1$, říkáme, že transformace matice $\boldsymbol{A}$ v sebe je *vlastní.* Je-li však $|\boldsymbol{P}| = -1$, mluvíme o *nevlastní* transformaci matice $\boldsymbol{A}$ v sebe.

Všimněme si nyní některých vlastností matice $\boldsymbol{P}$, která převádí *regulární* matici $\boldsymbol{A}$ v sebe.

12.2. Věta. Nechť matice $\boldsymbol{P}$ převádí regulární matici $\boldsymbol{A}$ v sebe. Pak platí tato tvrzení:

1. determinant $|\boldsymbol{P}| = \pm 1$;

2. matice $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'$ jsou zaměnitelné, takže platí

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}')\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}')\,; \tag{46}$$

3. matice $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'$ převádí matici $\boldsymbol{A}$ v sebe transformací vlastní.

Důkaz: 1. Z relace (45) plyne

$$|\boldsymbol{P}'|\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A}|$$

neboli

$$|\boldsymbol{P}|^2\,|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|\,.$$

Protože $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, máme $|\boldsymbol{P}|^2 = 1$, takže $|\boldsymbol{P}| = \pm 1$.

2. Z relace (45) dostáváme jednak

$$(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}'^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,,$$

jednak

$$(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})' = \boldsymbol{A}' \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}'.$$

Vynásobením posledních dvou rovnic obdržíme

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}'^{-1})(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'$$

neboli

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}'^{-1}\boldsymbol{P}')\,\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}',$$

takže

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}')\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'.$$

Odtud násobením zleva maticí $\boldsymbol{P}$ dostáváme vztah (46).

3. Dosadíme-li vlevo v (45) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'$, obdržíme

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}')'\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}') = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})\,\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1})'\,\boldsymbol{A}' =$$
$$= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'^{-1}\,\boldsymbol{A}') = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}.$$

Dále je

$$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}^{-1}|\,|\boldsymbol{A}'| = |\boldsymbol{A}|^{-1}\,|\boldsymbol{A}| = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{A}|} = +1.$$

12.3. Poznámky. 1. Zvolíme-li ve vztahu (45) za matici $\boldsymbol{A}$ matici jednotkovou $\boldsymbol{E}$, vidíme že všechny matice $\boldsymbol{R}$, které převádějí matici $\boldsymbol{E}$ v sebe, vyhovují vztahu

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{E}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$$

neboli

$$\boldsymbol{R}'\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}.$$

Jsou tedy $\boldsymbol{R}$ matice ortogonální. Proto každá ortogonální matice má vlastnosti 1, 2, 3 uvedené ve větě 12.2; vidíme však, že vlastnosti 2 a 3 jsou pro ortogonální matice triviální.

2. Kdybychom definici transformace matice $\boldsymbol{A}$ v sebe maticí $\boldsymbol{Q}$ definovali vztahem

$$\overline{\boldsymbol{Q}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A},$$

obdrželi bychom podobné výsledky a jako zvláštní případ pro $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ dostali bychom (místo ortogonálních matic) matice unitární.