23. KLASIFIKACE REGULÁRNÍCH PÁRŮ MATIC

V této kapitole stručně pojednáme o klasifikaci regulárních párů matic, založené na předcházející teorii. Nejprve uveďme následující větu (důkaz viz např. [19], 39–41):

23.1. Věta. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_m$ libovolná čísla, kdežto $e_1, e_2, \ldots, e_m$ libovolná přirozená čísla, pro něž je $e_1 + e_2 + \ldots + e_m = n$, pak svazek matic

$$\lambda \mathbf{E} - \mathbf{W}$$

stupně n, kde $\mathbf{W}$ značí matici (124) (odst. 22.6) utvořenou z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$; $e_1, e_2, \ldots, e_m$ má právě tyto elementární dělitele

$$(\lambda - a_1)^{e_1}, (\lambda - a_2)^{e_2}, \ldots, (\lambda - a_m)^{e_m}.$$

Podle této věty existují tedy svazky matic libovolného stupně n, které mají předem dané elementární dělitele.

23.2. Definice regulárního páru matic. *Regulárním párem matic* rozumíme pár čtvercových matic téhož stupně, z nichž aspoň jedna je regulární, přičemž si je myslíme uspořádány tak, že vždy první matice je regulární.

23.3. Segreova charakteristika regulárního páru matic. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ je regulární pár matic stupně n a nechť polynomy

$$\begin{array}{l} (\lambda - a_1)^{e'_1}, \ \ldots, (\lambda - a_1)^{e'_{k_1}}, \\ (\lambda - a_2)^{e''_1}, \ \ldots, (\lambda - a_2)^{e''_{k_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda - a_h)^{e_1^{(h)}}, \ldots, (\lambda - a_h)^{e_{k_h}^{(h)}} \end{array}$$

představují všechny elementární dělitele svazku $\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}$, přičemž čísla $a_1, a_2, \ldots, a_h$ jsou vzájemně různá.

Při označení elementárních dělitelů jsme volili takové uspořádání, že exponenty e_j příslušné k témuž základu s rostoucím indexem nerostou, takže je např.

$$e_1' \geqq e_2' \geqq \ldots \geqq e_{k_1}', \text{ atd.},$$

a kromě toho $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_h$.

Dále ovšem platí

$$e_1' + \ldots + e_{k_1}' + e_1'' + \ldots + e_{k_h}^{(h)} = n\,. \tag{128}$$

Pak k regulárnímu páru matic **A**, **B** přiřazujeme tzv. *Segreovu charakteristiku páru matic* **A**, **B**:

$$\left[(e_1', \ldots, e_{k_1}'), (e_1'', \ldots, e_{k_2}''), \ldots, (e_1^{(h)}, \ldots, e_{k_h}^{(h)})\right]. \tag{129}$$

Tedy každý regulární pár matic **A**, **B** má určitou Segreovu charakteristiku, která udává

1. počet vzájemně různých základů elem. dělitelů svazku $\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}$.
2. exponenty elem. dělitelů, příslušných ke každému základu.

V případě $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ mluvíme o Segreově charakteristice matice **B** Segreovou charakteristikou matice **B** rozumíme Segreovu charakteristiku regulárního páru matic **E**, **B**.

Příklad 24. Určeme Segreovu charakteristiku matice **A** uvedené v příkladu 19.

Řešení: Svazek matic $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ má elementární dělitele (viz příklad 23)

$$\lambda, \lambda^3\,,$$

takže počet různých kořenů a_k je $h = 1$. Příslušné exponenty uspořádané podle velikosti jsou $e_1 = 3 > e_2 = 1$. Proto Segreova charakteristika matice **A** je $[(3, 1)]$.

23.4. Počet vzájemně různých Segreových charakteristik regulárních párů matic stupně n. Vezměme v úvahu množinu všech regulárních párů matic stupně n, kde n značí libovolné (ale pevné) přirozené číslo.

Každý regulární pár matic má jistou Segreovu charakteristiku (stručně charakteristiku), avšak vzájemně různých charakteristik je pouze konečný počet. To plyne z toho, že čísla každé charakteristiky jsou přirozená a podle (128) je jejich součet roven n.

Mysleme si všechny rozklady čísla n v přirozené sčítance uspořádány tak, že na prvním místě je rozklad obsahující pouze jediného sčítance (tj. číslo n samo), pak rozklady o dvou sčítancích, pak o třech sčítancích atd., až konečně rozklad o n sčítancích rovných jedničkám.

Tak např. pro $n = 4$ máme rozklady

$$4;\ 3,1;\ 2,2;\ 2,1,1;\ 1,1,1,1\ .$$

Zařaďme nyní čísla každého uvažovaného rozkladu do $h = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ skupin (pokud to jde) a uspořádejme je v každé skupině tak, aby nerostla. Mimoto uspořádejme všechny tyto skupiny podle počtu čísel tak, že první skupina obsahuje nejvíce čísel, atd. Počet všech možných charakteristik regulárních párů matic stupně n je zřejmě nanejvýš roven počtu těchto uspořádaných skupin.

Např. pro $n = 4$ dostaneme celkem 14 skupin tvaru

pro $h = 1$: $4;\ (3,1);\ (2,2);\ (2,1,1);\ (1,1,1,1);$

pro $h = 2$: $3,1;\ 2,2;\ (2,1),1;\ (1,1),2;\ (1,1),(1,1);\ (1,1,1),1;$

pro $h = 3$: $2,1,1;\ (1,1),1,1;$

pro $h = 4$: $1,1,1,1.$

Vraťme se opět k obecnému n. Z věty 23.1 plyne, že existují regulární páry matic řádu n, které mají předepsanou charakteristiku. Odtud plyne, že všech možných charakteristik regulárních párů matic stupně n je právě jenom tolik, kolik je skupin, o nichž jsme vpředu mluvili.

Tak např. každý regulární pár matic stupně 4 má jednu z těchto charakteristik

$$[4],\ [(3,1)],\ [(2,2)],\ [(2,1,1)],\ [(1,1,1,1)]\ ;$$
$$[3,1],\ [2,2],\ [(2,1),1],\ [(1,1),2],\ [(1,1),(1,1)],\ [(1,1,1),1]\ ;$$
$$[2,1,1],\ [(1,1),1,1];\ [1,1,1,1]\ .$$

23.5. Definice třídy regulárních párů matic. Množina všech regulárních párů matic stupně n, které mají stejnou Segreovu charakteristiku, se nazývá *třídou* uvažovaných regulárních párů matic. Množina všech regulárních párů matic stupně n se tedy rozpadá na konečný počet tříd, přičemž všechny páry téže třídy se dají regulárními maticemi převést na stejný kanonický tvar téhož typu.

Příklad 25. Uveďme v kanonickém tvaru všechny třídy regulárních párů matic stupně 4.

Řešení: Značí-li $\mathbf{E}$ jednotkovou matici řádu 4, pak každý regulární pár matic stupně 4 se dá převést na jeden z těchto kanonických tvarů:

$$(1)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}; \qquad (2)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix};$$

$$(3)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}; \qquad (4)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix};$$

$$(5)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}; \qquad (6)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix};$$

$$(7)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}; \qquad (8)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix};$$

$$(9)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}; \qquad (10)\quad \mathbf{E},\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix};$$

$$(11)\quad \mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}; \qquad (12)\quad \mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix};$$

$$(13)\quad \mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}; \qquad (14)\quad \mathbf{E}, \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix}.$$

Tyto páry mají charakteristiky uvedené v odst. 2.4. Např. pár (1) má charakteristiku [4], pár (2) charakteristiku [(3,1)], atd. Zdůrazněme, že písmena a_k s různými indexy značí různá čísla.

23.6. Poznámka. Uvedli jsme, že se všechny regulární páry matic stupně n, které patří do téže třídy, dají převést regulárními maticemi na týž kanonický tvar. Přitom čísla a_k vyskytující se v kanonickém tvaru jednoho páru nejsou vždy rovna číslům a_k vyskytujícím se v kanonickém tvaru druhého páru. To ovšem souvisí s tím, že charakteristika každého regulárního páru matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ udává počet h vzájemně různých základů elementárních dělitelů svazku $\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}$ a exponenty elementárních dělitelů patřících k jednotlivým základům; neudává však tyto základy, tj. příslušná čísla a_k.

Např. regulární pár matic $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ stupně 4, kde $\mathbf{A}$ značí matici uvedenou v příkladu 23, má charakteristiku [(3,1)] a jeho kanonický tvar je

$$\mathbf{E}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ takže } a_1 = 0 .$$

Regulární pár matic $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

který je již v kanonickém tvaru, má též charakteristiku $[(3,1)]$, takže patří do téže třídy jako předešlý pár **E**, **A**, třebaže $a_1 = 1$.

23.7. Věta. (souvislost mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou matice). Buď **A** čtvercová matice stupně n a λ_1 některý její kořen o násobnosti α. Buďte

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r \, (>0) \tag{130}$$

charakteristická čísla matice **A** patřící ke kořenu λ_1 a

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots \geqq e_j \, (>0) \tag{131}$$

exponenty elementárních dělitelů svazku $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ příslušných k základu $\lambda - \lambda_1$.

Pak je $j = \alpha_1$ a mezi čísly (130), (131) jsou vztahy

$$\begin{array}{lllll} e_1 & = \ldots = e_{\alpha_r} & = r & , \\ e_{\alpha_r+1} & = \ldots = e_{\alpha_{r-1}} & = r - 1 & , \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ e_{\alpha_2+1} & = \ldots = e_{\alpha_1} & = 1 & . \end{array}$$

Důkaz: Podle odst. 18.7 existuje čtvercová matice **B** stupně n, která je podobná matici **A** a má blokově diagonální tvar

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k) .$$

Přitom každá z (čtvercových) matic $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k$ patří k některému kořenu a matice **A** a je tvaru (104).

Při vhodném označení matic $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ patří ke kořenu λ_1 matice

$$\begin{array}{ll} \mathbf{B}_1 \quad , \ldots, \mathbf{B}_{\alpha_r} & \text{stupně } r , \\ \mathbf{B}_{\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{B}_{\alpha_{r-1}} & \text{stupně } r - 1 , \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \mathbf{B}_{\alpha_2+1}, \ldots, \mathbf{B}_{\alpha_1} & \text{stupně } 1 , \end{array}$$

tedy celkem α_1 matic.

Matice $\mathbf{B}'$ (sdružená s $\mathbf{B}$) má týž tvar jako matice $\mathbf{W}$ (124), přičemž je

$$e_1 = \ldots = e_{\alpha_r} = r;\ e_{\alpha_r+1} = \ldots = e_{\alpha_{r-1}} = r - 1; \ldots$$
$$\ldots;\ e_{\alpha_2+1} = \ldots = e_{\alpha_1} = 1\,.$$

Podle věty 23.1. jsou

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_1)^{e_{\alpha_1}} \tag{132}$$

všichni elementární dělitelé svazku $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}'$ patřící k základu $\lambda - \lambda_1$.

Matice $\mathbf{B}'$ je podobná matici $\mathbf{B}$ (19.8) a tato matici $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{B}'$ je tedy podobná matici $\mathbf{A}$ (19.2.3). Polynomy (132) představují tedy všechny elementární dělitele svazku $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ patřící k základu $\lambda - \lambda_1$ (22.9). Tím je důkaz proveden.