CVIČENÍ 3

23. Napište Weierstrassův tvar matic

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

24. Určete kanonický tvar $\boldsymbol{W}$ idempotentní matice $\boldsymbol{A}$ (tj. matice, pro kterou platí $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$).

25. Dokažte, že involuční matice $\boldsymbol{A}$ (tj. matice, pro niž je $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$) je podobná diagonální matici, a určete tvar této diagonální matice. (Diagonální matice má všecky prvky, neležící v hlavní diagonále, rovny nule.)

26. Dokažte, že periodická matice $\boldsymbol{A}$ (tj. matice, pro niž $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ pro vhodné přirozené číslo k) je podobná diagonální matici, a určete tvar této diagonální matice.

27. Ukažte, že matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & -2 \\ -1 & 1/2 & 4 \end{bmatrix}$ je podobná diagonální matici $\boldsymbol{D}$ (s nenulovými prvky $d_{11} = 2$, $d_{22} = -3$, $d_{33} = 4$), a určete příslušnou matici $\boldsymbol{Q}$, pro niž platí $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{D}$.

28. Zjistěte, zda matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ se dá převést transformací podobnosti na diagonální tvar.

29. Dokažte, že matice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$ je podobná diagonální matici $\boldsymbol{D}$; určete matici $\boldsymbol{D}$ a příslušnou matici transformace.

30. Ukažte, že matici $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ nelze převést transformací podobnosti na diagonální tvar.

31. Určete elementární dělitele matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix}$.

32. Určete, které z matic jsou podobné

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

33. Určete Segreovu charakteristiku matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a její elementární dělitele.

Výsledky

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

24. Diagonální matice s prvky $d_{jj} = 0$ nebo 1.

25. Diagonální matice s prvky $d_{jj} = \pm 1$.

26. Je-li p nejmenší z čísel k, pro která je $\mathbf{A}^k = \mathbf{E}$, pak diagonální matice má prvky d_{jj} rovny některým z p hodnot odmocniny $\sqrt{1}$.

27. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -68 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 126 & 7 & 70 \\ 4 & -2 & 0 \\ 10 & -5 & -70 \end{bmatrix}$.

28. Nedá.

29. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

31. $(\lambda + 1)^3, \lambda + 1$.

32. **A, B** podobné; **C** není podobná žádné z nich.

33. $[(2,1),2,1]$; $\lambda^2, (\lambda - 2)^2, \lambda - 2, \lambda - 1$.