Úvod do teorie grup

7. O homomorfním zobrazení grupoidů

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do teorie grup. (Czech). Praha: Královská česká společnost nauk, 1944. pp. 33--36.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401366

7. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak 1. každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$ est asociativní, 2. pro všechny podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ platí rovnost $A(BC) = (AB)C$.

8. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid a A, B jsou grupoidní a zaměnitelné podmnožiny v $\mathfrak{G}$, pak také podmnožina AB jest grupoidní. Poznámka. Když $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou zaměnitelné podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, nazývá se podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k součinu jejich polí, *součin* podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ označuje se $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ anebo $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

9. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak množina všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou zaměnitelné s každým prvkem v $\mathfrak{G}$, jest grupoidní, není-li prázdná. Poznámka. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *centrum* grupoidu $\mathfrak{G}$.

10. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a násobení jest definováno takto: Součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ jest největší společná míra čísel a, b. Ukažte že grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský a asociativní.

7. O homomorfním zobrazení grupoidů.

Nechť $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili (na str. 28.) rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G^* grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly, které jsme popsali (v odst. **3.**) při studiu zobrazení množin. Podle této definice týká se tedy pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem míti nějaký vztah k násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^*$. Pro teorii grupoidů jsou nejdůležitější t. zv. *homomorfní* zobrazení, která, stručně řečeno, jsou charakterisována tím, že zachovávají násobení v obou grupoidech. Podrobná definice jest tato: Libovolné zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ se nazývá homomorfní, když součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ jest zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení $\boldsymbol{d}$, t. j. když pro $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $\boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b$. Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *homomorfismus.* Název homomorfní zobrazení jest v literatuře ustálen, ale jest dlouhý a proto budeme zpravidla místo něho používati názvu *deformace.* Již při studiu zobrazení množin jsme si všimli, že nemusí vždycky existovati zobrazení nějaké množiny na libovolnou jinou množinu; odtud plyne, že zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ a ovšem tím méně deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí existovati. Jestliže nějaká deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje, pak pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest *homomorfní* s grupoidem $\mathfrak{G}$.

Nechť na př. n značí libovolné přirozené číslo a $\boldsymbol{d}$ zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ na grupoid $\mathfrak{Z}_n$ definované takto: Pro $a \in \mathfrak{Z}$ jest $\boldsymbol{d}a \in \mathfrak{Z}_n$ zbytek dělení čísla a číslem n. Snadno zjistíme, že $\boldsymbol{d}$ jest deformace a tedy homomorfismus grupoidu $\mathfrak{Z}$ na $\mathfrak{Z}_n$. Vskutku, nechť a, b značí libovolné prvky v $\mathfrak{Z}$. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}$ jest součin ab prvku a s prvkem b součet $a + b$ a podle definice zobrazení $\boldsymbol{d}$ jsou $\boldsymbol{d}a$, $\boldsymbol{d}b$, $\boldsymbol{d}ab$ zbytky dělení čísel $a, b, a + b$ číslem n. Podle definice násobení v $\mathfrak{Z}_n$ jest součin $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b$ prvku $\boldsymbol{d}a$ s prvkem $\boldsymbol{d}b$ zbytek dělení čísla $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$ číslem n a protože čísla $\boldsymbol{d}a + \boldsymbol{d}b$, $a + b$ se liší jenom o celý násobek čísla n, jest $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b$ zbytek dělení čísla $a + b$ číslem n. Odtud vychází rovnost $\boldsymbol{d}a\boldsymbol{d}b = \boldsymbol{d}ab$ a vidíme, že zobrazení $\boldsymbol{d}$ jest deformace. Při dalším studiu grupoidů setkáme se ještě častěji s příklady deformace a proto se prozatím spokojíme s tímto jedním příkladem.

Nechť $\boldsymbol{d}$ značí libovolnou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$. Snadno dokážeme, že *obraz pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$ jest grupoidní podmnožina* v $\mathfrak{G}^*$, takže $\boldsymbol{d}G . \boldsymbol{d}G \subset \boldsymbol{d}G \subset \mathfrak{G}^*$. Podle své definice jest $\boldsymbol{d}G$ především neprázdná podmnožina v $\mathfrak{G}^*$. Máme ukázati, že součin a^*b^* libovolného prvku $a^* \in \boldsymbol{d}G$ s libovolným dalším prvkem $b^* \in \boldsymbol{d}G$ jest opět prvkem v $\boldsymbol{d}G$. Každý prvek množiny $\boldsymbol{d}G$ jest obrazem v $\boldsymbol{d}$ alespoň jednoho prvku grupoidu $\mathfrak{G}$ a tedy existují prvky $a, b \in \mathfrak{G}$, jejichž obrazy v $\boldsymbol{d}$ jsou právě prvky a^*, b^*, takže $\boldsymbol{d}a = a^*$, $\boldsymbol{d}b = b^*$. Podle definice deformace platí rovnost $\boldsymbol{d}ab = a^*b^*$, která vyjadřuje, že součin a^*b^* jest obrazem v $\boldsymbol{d}$ prvku $ab \in \mathfrak{G}$. Vychází tedy skutečně $a^*b^* \in \boldsymbol{d}G$. Podgrupoid v $\mathfrak{G}^*$, jehož pole jest $\boldsymbol{d}G$, nazývá se *obraz* grupoidu $\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$ a označuje se symbolem $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$; grupoid $\mathfrak{G}$ se nazývá *vzor* grupoidu $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$. Jest zřejmé, že $\boldsymbol{d}$ jest deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$, takže grupoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ jest homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$.

Když $\boldsymbol{d}$ jest deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ a $\boldsymbol{f}$ deformace grupoidu $\mathfrak{G}^*$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{F}$, pak $\boldsymbol{fd}$ jest deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{F}$. Vskutku, podle definice složeného zobrazení $\boldsymbol{fd}$ a protože $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}$ jsou deformace, platí pro $a, b \in \mathfrak{G}$ rovnosti

$$\boldsymbol{fd}(ab) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}ab) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}a) \,.\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}b) = \boldsymbol{fd}a \,.\, \boldsymbol{fd}b,$$

a tedy skutečně platí $\boldsymbol{fd}(ab) = \boldsymbol{fd}a \,.\, \boldsymbol{fd}b$.

K pojmu deformace připojují se některé další důležité pojmy, které jsou v něm zahrnuty. Jest to především pojem prosté deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$, t. j. tedy takové deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$, v níž každý prvek grupoidu $\mathfrak{G}^*$ má nejvýše jeden vzor. Pro prostou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$ jest ustálen název *isomorfní* zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do (na) $\mathfrak{G}^*$. Isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^*$ nazývá se také *isomorfismus*. Ke každé prosté deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ existuje ovšem zobrazení inversní $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$, které jest prosté a snadno se přesvědčíme, že jest deformací. Nechť a^*, b^* značí libovolné prvky v $\mathfrak{G}^*$ a $a, b \in \mathfrak{G}$ jejich vzory v $\boldsymbol{d}$, takže $\boldsymbol{d}a = a^*$, $\boldsymbol{d}b = b^*$,

$\boldsymbol{d}ab = a^*b^*$. Podle definice inversního zobrazení $\boldsymbol{d}^{-1}$ plynou odtud rovnosti $a = \boldsymbol{d}^{-1}a^*$, $b = \boldsymbol{d}^{-1}b^*$, $ab = \boldsymbol{d}^{-1}a^*b^*$ a z nich skutečně vychází $\boldsymbol{d}^{-1}a^*b^* = \boldsymbol{d}^{-1}a^* . \boldsymbol{d}^{-1}b^*$. Když tedy existuje nějaký isomorfismus $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$, pak existuje isomorfismus $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^*$ na $\mathfrak{G}$; v tomto případě pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}^*)$ jest *isomorfní* s $\mathfrak{G}^*(\mathfrak{G})$, anebo, že grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ jsou isomorfní a píšeme $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}^*$. Jest zřejmé, že pole každých dvou isomorfních grupoidů jsou ekvivalentní množiny.

Příklady. Abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\boldsymbol{e}\}$ a násobení jest popsáno v první multiplikační tabulce na str. 26., jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_1$; abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}\}$ a násobení jest popsáno v druhé multiplikační tabulce na str. 26., jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_2$; abstraktní grupoid, jehož pole jest $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}\}$ a násobení jest popsáno v třetí multiplikační tabulce na str. 26., jest isomorfní s grupoidem $\mathfrak{S}_3$.

Další pojmy zahrnuté v pojmu deformace se vztahují na případ, kdy jde o deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe anebo na sebe. Deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe nazývá se také *operátor* na grupoidu $\mathfrak{G}$, anebo kratčeji operátor grupoidu $\mathfrak{G}$. Prostý operátor na $\mathfrak{G}$ anebo, což jest totéž, isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do sebe, nazývá se také *meromorfní* zobrazení na grupoidu $\mathfrak{G}$, anebo meromorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$. Meromorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ se nazývá *vlastní*, když obraz grupoidu $\mathfrak{G}$ jest vlastní podgrupoid v $\mathfrak{G}$; isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na sebe nazývá se také *automorfní* zobrazení na $\mathfrak{G}$, stručněji *automorfismus* na $\mathfrak{G}$. Na př. zobrazení grupoidu $\mathfrak{Z}$ do sebe, v němž jest každý prvek $a \in \mathfrak{Z}$ zobrazen na součin (aritmetickém smyslu) $ka \in \mathfrak{Z}$, při čemž k značí libovolné celé nezáporné číslo, jest operátor na $\mathfrak{Z}$; v případě $k \geqq 1$ máme meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$, v případě $k = 1$ automorfismus na $\mathfrak{Z}$ a v případě $k = 0$ operátor, ale nikoli meromorfní zobrazení na $\mathfrak{Z}$. Nejjednodušším příkladem automorfismu libovolného grupoidu $\mathfrak{G}$ jest identické zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$, t. zv. *identický automorfismus* na $\mathfrak{G}$.

Cvičení. 1. Když některé dva prvky v grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou zaměnitelné, pak jejich obrazy v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jsou také zaměnitelné. Obraz každého abelovského grupoidu v každé deformaci jest opět abelovský.

2. Když některá uspořádaná trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{G}$ má jenom jeden součin, pak totéž platí o uspořádané trojici jejich obrazů $\boldsymbol{d}a, \boldsymbol{d}b, \boldsymbol{d}c \in \mathfrak{G}^*$ v každé deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do nějakého grupoidu $\mathfrak{G}^*$. Obraz každého asociativního grupoidu v každé deformaci jest opět asociativní.

3. Když grupoid $\mathfrak{G}$ jest asociativní a má centrum, pak obraz centra v každé deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na nějaký grupoid $\mathfrak{G}^*$ jest v centru grupoidu $\mathfrak{G}^*$.

4. Vzorem grupoidní podmnožiny v $\mathfrak{G}^*$ v nějaké deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$ nemusí býti podmnožina grupoidní.

5. Každé meromorfní zobrazení na libovolném konečném grupoidu $\mathfrak{G}$ jest automorfismus na $\mathfrak{G}$.

6. Uveďte sami příklady deformace!

8. O faktoroidech.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy a předpokládejme, že existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. Deformace $\boldsymbol{d}$, jakožto zobrazení množiny G na G^*, určuje rozklad $\overline{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$, jehož každý prvek $\bar{a}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ vždy téhož prvku $a^* \in \mathfrak{G}^*$. Protože $\boldsymbol{d}$ zachovává násobení v obou grupoidech, dá se očekávati, že rozklad $\overline{G}$ jest k násobení v $\mathfrak{G}$ v nějakém vztahu. Uvažujme o libovolných dvou prvcích $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{G}$. Podle definice rozkladu $\overline{G}$ existují prvky a^*, $b^* \in \mathfrak{G}^*$ takové, že $\bar{a}$ $(\bar{b})$ jest množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ prvku a^* (b^*). Všimněme si součinu $\bar{a}\bar{b}$ množiny $\bar{a}$ s množinou $\bar{b}$! Každý prvek $c \in \bar{a}\bar{b}$ jest součin některého prvku $a \in \bar{a}$ s některým prvkem $b \in \bar{b}$ a z rovnosti $\boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \,.\, \boldsymbol{d}b = a^*b^*$ vychází, že jest vzorem v $\boldsymbol{d}$ prvku a^*b^*. Tedy jest prvek c obsažen v onom prvku $\bar{c} \in \overline{G}$, který se skládá ze vzorů prvku a^*b^*. Tím jsme zjistili, že platí vztah $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a vidíme, že rozklad $\overline{G}$ má tuto vlastnost: Ke každým dvěma prvkům $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{G}$ existuje další prvek $\bar{c} \in \overline{G}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$. Libovolný rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$, $\overline{A}$, který má vlastnost, že ke každým dvěma prvkům $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{A}$ existuje další prvek $\bar{c} \in \overline{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, nazveme *vytvořující*. Došli jsme k výsledku, že *rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$ patřící k libovolné deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ na jiný grupoid jest vytvořující.*

Pokud jde o vytvořující rozklady *na* grupoidu $\mathfrak{G}$, všimněme si, že největší rozklad $\overline{G}_{\max}$ a nejmenší rozklad $\overline{G}_{\min}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ jsou vytvořující. Na každém grupoidu $\mathfrak{G}$ existují tedy alespoň tyto dva krajní vytvořující rozklady.

Popíšeme nyní některé vlastnosti vytvořujících rozkladů.

Nechť $\overline{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. *Podmnožina* $\mathrm{s}\overline{A} \subset \mathfrak{G}$, t. j. tedy podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou v některém prvku rozkladu $\overline{A}$, *jest grupoidní.* Vskutku, k libovolným prvkům $a, b \in \mathrm{s}\overline{A}$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \overline{A}$ takové, že $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$ a odtud vychází $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathrm{s}\overline{A}$, takže ab jest prvkem v $\mathrm{s}\overline{A}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ označujeme symbolem $\mathrm{s}\overline{\mathfrak{A}}$. Jest zřejmé, že $\overline{A}$ jest vytvořující rozklad na podgrupoidu $\mathrm{s}\overline{\mathfrak{A}}$.

Nechť B značí libovolnou grupoidní podmnožinu v $\mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $B \cap \mathrm{s}\overline{A}$ není prázdný. Pak obal $B \sqsubset \overline{A}$ podmnožiny B v rozkladu $\overline{A}$ jest rozklad v $\mathfrak{G}$ a podobně průsek $\overline{A} \sqcap B$ rozkladu $\overline{A}$