Úvod do theorie grup [2. rozšířené vydání]

6. Základní pojmy o grupoidech

In: Otakar Borůvka (author): Úvod do theorie grup [2. rozšířené vydání]. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 60--67.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401412

Terms of use:

© Přírodovědecké vydavatelství

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

5.5.5. V systému všech podmnožin libovolné neprázdné množiny můžeme definovat násobení tím, že ke každé uspořádané dvojici podmnožin přiřadíme jejich součet. Můžeme násobení podobně definovat pomocí průniku?

5.5.6. Vymyslete sami příklady násobení v množinách!

6. ZÁKLADNÍ POJMY O GRUPOIDECH

6.1. Definice.

Libovolná neprázdná množina G spolu s nějakým násobením $\mathbf{M}$ v G se nazývá grupoid. G se nazývá pole a $\mathbf{M}$ násobení grupoidu. Grupoidy budeme označovati velkými německými písmeny, a to zpravidla stejnými jako jejich pole. Na př. označujeme grupoid, jehož pole jsme označili G, písmenem $\mathfrak{G}$, a když jsme nějaký grupoid označili $\mathfrak{G}$, pak písmeno G značí zpravidla jeho pole.

6.2. Grupoid abstraktní, abelovský, permutační; grupoidy $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$.

Na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole. Tak na př. mluvíme *o prvcích grupoidu* místo o prvcích pole grupoidu a píšeme $a \in \mathfrak{G}$ místo $a \in G$, podobně mluvíme *o podmnožinách v grupoidu* a píšeme na př. $A \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset A$, mluvíme *o rozkladech v grupoidu a na grupoidu, o řádu grupoidu, o zobrazení grupoidu do nějaké množiny, do nějakého drupoidu nebo na grupoid,* atd. *Když G je abstraktní množina, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ abstraktní.*

Rovněž pojmy a symboly, které jsme definovali pro násobení, přenášíme na grupoidy. Tedy zejména má každá uspořádaná dvojice prvků $a, b \in \mathfrak{G}$ jistý součin $a.b$, stručněji ab, a *když pro každé $a, b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $ab = ba$, nazývá se grupoid $\mathfrak{G}$ abelovský neboli komutativní.* Také můžeme ke každému konečnému grupoidu $\mathfrak{G}$ přiřadit multiplikační tabulku, v níž je popsáno násobení v $\mathfrak{G}$. V odstavci **5.4.2** jsme uvedli několik příkladů násobení a každý z nich je současně příkladem grupoidu.

V dalším výkladu častěji poukážeme zejména na tyto tři grupoidy, které budeme označovati $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$: Grupoid $\mathfrak{Z}$ se skládá z množiny Z všech celých čísel a násobení je definováno sečítáním čísel (viz př. 5.3.1). Grupoid $\mathfrak{Z}_n$ se skládá z množiny $Z_n = \{0, \ldots, n - 1\}$, při čemž n značí libovolné přirozené číslo a násobení je definováno sečítáním vzhledem k modulu n (v. př. 5.3.2). Grupoid $\mathfrak{S}_n$ se skládá z množiny S_n všech permutací nějaké konečné množiny H řádu n (≥ 1) a násobení je definováno skládáním permutací (v. př. 5.3.3). Poznamenejme, že *každý grupoid, jehož prvky jsou permutace nějaké (konečné anebo nekonečné) množiny a násobení je definováno skládáním permutací, se nazývá permutační*; na př. grupoid $\mathfrak{S}_n$ je permutační.

6.3. Vzájemně zaměnitelné podmnožiny.

Nechť $\mathfrak{G}$ značí (všude v této knížce) nějaký grupoid. Nechť A, B značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$. Podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze součinů ab každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$, se nazývá *součin podmnožiny A s podmnožinou B* a označuje se symbolem $A \,.\, B$, kratčeji AB. Když některá z podmnožin A, B je prázdná, rozumíme symboly $A.B$, AB prázdnou množinu. Pro $a \in \mathfrak{G}$ píšeme zpravidla místo $\{a\}A$ stručněji aA a podobně Aa místo $A\{a\}$, takže na př. aA značí množinu součinů prvku a s každým prvkem v A; místo AA píšeme někdy stručněji A^2.

Platí-li rovnost $AB = BA$, nazývají se podmnožiny A, B vzájemně zaměnitelné neboli *vzájemně komutativní*; tento případ se vyznačuje tím, že součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$ je součinem některého prvku $b' \in B$ s některým prvkem $a' \in A$ a současně součin každého prvku $b \in B$ s každým prvkem $a \in A$ je součinem některého prvku $a' \in A$ s některým prvkem $b' \in B$. Když grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský, pak ovšem každé dvě podmnožiny v $\mathfrak{G}$ jsou zaměnitelné. V opačném případě platí pro některé prvky $a, b \in \mathfrak{G}$ vztah $ab \neq ba$ a odtud plyne, že každé dvě podmnožiny $A, B \subset \mathfrak{G}$ nemusí býti zaměnitelné, jak je tomu na př. v případě, že $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Na př. součin AB podmnožiny $A = \{1\}$ s podmnožinou $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ v grupoidu $\mathfrak{Z}$ je $\{\ldots, -1, 1, 3, \ldots\}$ a zřejmě je roven součinu BA; když $A = \{0, 1\}$, $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$, máme $AB = BA = Z$. Všimněme si, že pro každý grupoid $\mathfrak{G}$ platí vztah $GG \subset \mathfrak{G}$.

6.4. Podgrupoid, nadgrupoid, ideál.

Nechť A značí nějakou neprázdnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$. Když $AA \subset A$, t. j. když součin každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in A$ jest opět prvek v A, pak pravíme, že A je *grupoidní podmnožina* v $\mathfrak{G}$. V tomto případě určuje násobení $\mathbf{M}$ v $\mathfrak{G}$ jisté t. zv. *částečné násobení* $\mathbf{M}_A$ v A, které je definováno takto: $\mathbf{M}_A$ přiřazuje ke každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in A$ týž prvek $ab \in A$ jako násobení $\mathbf{M}$. Množina A spolu s částečným násobením $\mathbf{M}_A$ je jistý grupoid $\mathfrak{A}$; pravíme, že $\mathfrak{A}$ je *podgrupoid* v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ je *nadgrupoid na* $\mathfrak{A}$, a píšeme: $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Když pak A je vlastní podmnožina v $\mathfrak{G}$, pravíme, že $\mathfrak{A}$ je *vlastní podgrupoid* v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ je *vlastní nadgrupoid na* $\mathfrak{A}$.

Když dokonce platí vztah $GA \subset A$ (anebo $AG \subset A$, nebo současně $GA \subset A \supset AG$), *nazývá se* $\mathfrak{A}$ *levý* (nebo *pravý*, nebo *oboustranný*) *ideál v* $\mathfrak{G}$. Případ $A \neq G$ charakterisujeme opět přívlastkem *vlastní*.

Na př. podmnožina všech celých násobků některého přirozeného čísla m v grupoidu $\mathfrak{Z}$ je grupoidní, neboť součin (t. j. součet v obvyklém smyslu) každých dvou celých násobků čísla m jest opět celý násobek čísla m; tato podmnožina spolu se sečítáním v obvyklém smyslu je tedy podgrupoid v $\mathfrak{Z}$, a to v případě $m > 1$ zřejmě vlastní podgrupoid v $\mathfrak{Z}$. Jiný příklad je tento: Podmnožina všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$, je grupoidní, neboť když některé dvě permutace $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{S}_n$ nechávají prvek a beze změny, pak zřejmě platí totéž o jejich součinu $\mathbf{p}.\mathbf{q}$ (t. j. o složené permutaci $\mathbf{qp}$); tato podmnožina spolu se skládáním permutací v obvyklém smyslu je tedy podgrupoid v $\mathfrak{S}_n$.

6.5. Další pojmy.

V souhlase s tím, že na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole, mluvíme někdy na př. o průniku nějaké podmnožiny $B \subset \mathfrak{G}$ a podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ve smyslu průniku podmnožiny B a pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$; v podobném smyslu mluvíme o součinu podmnožiny B s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, o součinu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ s podmnožinou B, dále o obalu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v nějakém rozkladu $\bar{A}$, o průseku rozkladu $\bar{A}$ s podgrupoidem $\mathfrak{A}$, atp., a užíváme označení na př. $B \cap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \cap B$, $B\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{A} \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset \mathfrak{A}$, $\bar{A} \sqcap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \sqcap \bar{A}$, atp.

6.6. Průnik podgrupoidů.

Uvažujme nyní o nějakých dvou podgrupoidech $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ a předpokládejme, že průnik $A \cap B$ jejich polí A, B není prázdný. Pro libovolné prvky $a, b \in A \cap B$ platí jednak vztahy $ab \in AA \subset A$ a jednak $ab \in BB \subset B$, takže $ab \in A \cap B$, a odtud vychází, že $A \cap B$ je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik podgrupoidů* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Pamatujme si, že pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ je definován jenom v případě, že pole obou podgrupoidů mají společné prvky. Na př. existuje průnik podgrupoidů $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}_n$, při čemž pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$ se skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $a \in H$, a pole B podgrupoidu $\mathfrak{B}$ se skládá ze všech prvků v $\mathfrak{S}_n$, které nechávají beze změny některý prvek $b \in H$, neboť obě množiny A, B mají společný alespoň jeden prvek, a to identickou permutaci množiny H, která nechává beze změny všechny prvky množiny H.

Pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ se dá snadno rozšířit na pojem průniku systému podgrupoidů v $\mathfrak{G}$: Máme-li nějaký systém $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$ podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ a průnik $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$ jejich polí není prázdný, pak tento průnik, jak se snadno zjistí, je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$; příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *průnik systému podgrupoidů* $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\}$ a označuje se symbolem $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \ldots$, stručněji $\Pi\bar{\mathfrak{a}}$, nebo podobně.

6.7. Součin uspořádané skupiny prvků.

6.7.1. *Definice.* Uvažujme o několika prvcích $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, při čemž $n \geqq 2$. Co rozumíme součinem uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$? Součin uspořádané dvojice ($n = 2$) prvků a_1, a_2 máme již definován a víme, že jej označujeme $a_1.a_2$, kratčeji a_1a_2. V případě $n = 3$ definujeme součin uspořádané trojice prvků a_1, a_2, a_3 takto: Je to kterýkoli z obou prvků $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$. Označujeme jej symbolem $a_1.a_2.a_3$, kratčeji $a_1a_2a_3$. Tento symbol má tedy význam jednak součinu prvku a_1 s prvkem a_2a_3 a jednak součinu prvku a_1a_2 s prvkem a_3. V případě $n = 4$ definujeme součin uspořádané skupiny prvků a_1, a_2, a_3, a_4 takto: Je to kterýkoli z prvků: $a_1(a_2a_3a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1a_2a_3)a_4$. Označujeme jej symbolem $a_1.a_2.a_3.a_4$, kratčeji $a_1a_2a_3a_4$. Tento symbol má tedy význam kteréhokoli z prvků:

$$a_1(a_2(a_3a_4)),\ a_1((a_2a_3)a_4),\ (a_1a_2)(a_3a_4),\ (a_1(a_2a_3))a_4,\ ((a_1a_2)a_3)a_4.$$

Tyto zvláštní případy postačí, abychom pochopili tuto definici: *Součinem uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$ rozumíme libovolný prvek množiny $\{a_1 \ldots a_n\}$ takto definované: Pro $n = 2$ skládá se množina $\{a_1a_2\}$ z jediného prvku a_1a_2; pro $n > 2$ je*

$$\{a_1 \ldots a_n\} = \{a_1\}\{a_2 \ldots a_n\} \vee \{a_1a_2\}\{a_3 \ldots a_n\} \vee \ldots \vee \{a_1 \ldots a_{n-1}\}\{a_n\}.$$

Součin uspořádané skupiny prvků $a_1, \ldots, a_n$ označujeme symbolem $a_1.a_2 \ldots a_n$, kratčeji $a_1 \ldots a_n$. Zřejmě je takových součinů jenom konečný počet a symbol $a_1 \ldots a_n$ značí kterýkoli z těchto prvků.

6.7.2. *Grupoidy asociativní.* Podle předešlého odstavce má každá uspořádaná trojice prvků $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ nejvýše dva součiny: $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)a_3$. Jestliže má jenom jeden součin, t. j. jestliže pro každé tři prvky $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $a_1(a_2a_3) = (a_1a_2)a_3$, pak se násobení grupoidu $\mathfrak{G}$ a rovněž grupoid $\mathfrak{G}$ nazývají *asociativní.*

Grupoidy, které se v matematice nejčastěji studovaly, mají vlastnost, že každá uspořádaná skupina několika prvků má jenom jeden součin; jak později (v odst. **10.2.2**) ukážeme, mají tuto důležitou vlastnost právě grupoidy asociativní.

Na př. grupoid $\mathfrak{Z}$ je asociativní, neboť podle definice jeho násobení jsou součiny $a(bc)$, $(ab)c$ každé uspořádané trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{Z}$ součty v obvyklém smyslu $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ a jsou si tedy rovny.

Podobně i grupoid $\mathfrak{Z}_n$ $(n \geqq 1)$ jest asociativní. Vskutku, podle definice jeho násobení jsou součiny $a(bc)$, $(ab)c$ každé uspořádané trojice prvků $a, b, c \in \mathfrak{Z}_n$ zbytky dělení čísel $a + r$, $s + c$ číslem n, při čemž r (s) značí zbytek dělení čísla $b + c$ $(a + b)$ číslem n. Protože čísla $a + r$, $a + (b + c)$ se liší jenom o celý násobek čísla n, jest $a(bc)$ zbytek dělení čísla $a + (b + c)$ číslem n (v. pozn. pod čarou na str. 42), a podobně vidíme, že $(ab)c$ je zbytek dělení čísla $(a + b) + c$ číslem n. Z rovnosti $a + (b + c) = (a + b) + c$ pak vychází $a(bc) = (ab)c$.

Rovněž grupoid $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ jest asociativní, neboť jsou-li $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ libovolné prvky v $\mathfrak{S}_n$, jsou podle definice násobení v $\mathfrak{S}_n$ součiny $\boldsymbol{p}.(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q}).\boldsymbol{r}$ složené permutace $(\boldsymbol{rq})\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{qp})$, a podle výsledku v odst. **4.5.3** jsou si rovny.

6.7.3. *Příklad.* Jako příklad výpočtu součinu vypočtěme všechny součiny 1 . 2 . 3 . 4 v grupoidu popsaném v **5.5.4.** Podle příslušné multiplikační tabulky máme:

$$\begin{aligned}
\{1 . 2 . 3\} &= \{1\} . \{2 . 3\} \vee \{1 . 2\} . \{3\} = \{1\} . \{1\} \vee \{3\} . \{3\} = \\
&= \{1\} \vee \{2\} = \{1, 2\}; \\
\{2 . 3 . 4\} &= \{2\} . \{3 . 4\} \vee \{2 . 3\} . \{4\} = \{2\} . \{2\} \vee \{1\} . \{4\} = \\
&= \{2\} \vee \{2\} = \{2\}; \\
\{1 . 2 . 3 . 4\} &= \{1\} . \{2 . 3 . 4\} \vee \{1 . 2\} . \{3 . 4\} \vee \{1 . 2 . 3\} . \{4\} = \\
&= \{1\} . \{2\} \vee \{3\} . \{2\} \vee \{1, 2\} . \{4\} = \{3\} \vee \{5\} \vee \{2, 4\} = \\
&= \{2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

Všechny součiny 1 . 2 . 3 . 4 jsou tedy tyto: 2, 3, 4, 5.

6.8. Součin uspořádané skupiny podmnožin.

6.8.1. *Definice.* Nechť nyní $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geqq 2$) značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$. *Součinem uspořádané skupiny podmnožin* $A_1, \ldots, A_n$ *rozumíme podmnožinu v* $\mathfrak{G}$ *skládající se ze všech součinů* $a_1 \ldots a_n$, *kde* $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Označujeme jej symbolem $A_1 . A_2 \ldots A_n$, kratčeji $A_1 \ldots A_n$. Když některá podmnožina $A_1, \ldots, A_n$ je prázdná, rozumíme těmito symboly prázdnou množinu a v tomto případě součin $A_1 \ldots A_n$ nezávisí na uspořádání podmnožin $A_1, \ldots, A_n$. Podle této definice a podle definice součinu $a_1 \ldots a_n$ je každý prvek a množiny $A_1 \ldots A_n$ součinem jistého prvku $a_1 \ldots a_k$ s jistým prvkem $a_{k+1} \ldots a_n$, při čemž $1 \leqq k \leqq n - 1$, takže $a \in (A_1 \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots A_n)$, a naopak, součin libovolného prvku množiny $A_1 \ldots A_k$ s libovolným prvkem množiny $A_{k+1} \ldots A_n$, při každém takovém k, je jistý prvek $a \in A_1 \ldots A_n$. Odtud vychází rovnost

$$A_1 \ldots A_n = A_1(A_2 \ldots A_n) \vee (A_1A_2)(A_3 \ldots A_n) \vee \ldots \vee (A_1 \ldots A_{n-1}) A_n.$$

Když A značí nějakou podmnožinu v $\mathfrak{G}$, pak místo $\underbrace{A \ldots A}_{n}$ píšeme kratčeji A^n, takže pro $n \geqq 2$ máme

$$A^n = AA^{n-1} \vee A^2A^{n-2} \vee \ldots \vee A^{n-1}A.$$

Hořejší definice součinu uspořádané skupiny prvků nebo množin zřejmě zobecňují definice součinu uspořádané skupiny dvou prvků nebo množin.

6.8.2. *Příklad.* Necht A značí podmnožinu $\{1, 2, 4\}$ v grupoidu popsaném v **5.5.4.** Pak je:

$$A^2 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1 . 1, 1 . 2, 1 . 4, 2 . 1, 2 . 2, 2 . 4, 4 . 1, 4 . 2, 4 . 4\} = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$A^3 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \vee \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A^4 = \{1, 2, 4\} . \{1, 2, 3, 4, 5\} \vee \{1, 2, 3, 4\} . \{1, 2, 3, 4\} \vee \{1, 2, 3, 4, 5\} . . \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

6.9. Cvičení.

6.9.1. Když podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ je součtem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ je součtem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB je součet součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$

6.9.2. Když podmnožina $A \subset \mathfrak{G}$ je průnikem několika podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ a rovněž $B \subset \mathfrak{G}$ je průnikem několika podmnožin $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$, pak AB je částí průniku součinů každé podmnožiny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ s každou podmnožinou $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots$ Zejména tedy platí pro každé podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ tyto vztahy: 1. $(A \cap B)C \subset AC \cap BC$; 2. $C(A \cap B) \subset \subset CA \cap CB$. Pomocí vhodných příkladů ukažte, že se v těchto vztazích znaménko $\subset$ nedá vždycky nahraditi znaménkem $=$.

6.9.3. Nechť A značí libovolnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$ a m, n libovolná přirozená čísla. Platí tyto vztahy: 1. $A^m A^n \subset A^{m+n}$; 2. $(A^m)^n \subset A^{mn}$.

6.9.4. Nechť $A \subset B$ značí libovolné podmnožiny v $\mathfrak{G}$ a n libovolné přirozené číslo. Platí vztah $A^n \subset B^n$.

6.9.5. Nechť n značí libovolné přirozené číslo. Pro pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ platí vztah $G^n \supset G^{n+1}$, takže $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$

6.9.6. Nechť n, G mají týž význam jako ve cvič. **6.9.5.** G^n je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ a příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ jest oboustranný ideál v $\mathfrak{G}$. — *Poznámka:* Tento oboustranný ideál se označuje $\mathfrak{G}^n$.

6.9.7. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak: 1. každý podgrupoid v $\mathfrak{G}$ jest asociativní; 2. pro všechny podmnožiny $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ platí rovnost $A(BC) = (AB)C$.

6.9.8. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid a A, B jsou grupoidní a zaměnitelné podmnožiny v $\mathfrak{G}$, pak také podmnožina AB je grupoidní. —

Poznámka. Když $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou zaměnitelné podgrupoidy v $\mathfrak{G}$, nazývá se podgrupoid v $\mathfrak{G}$, který přísluší k součinu jejich polí, *součin podgrupoidů* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Označuje se $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$.

6.9.9. Když $\mathfrak{G}$ jest asociativní grupoid, pak množina všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou zaměnitelné s každým prvkem v $\mathfrak{G}$, je grupoidní, není-li prázdná. — *Poznámka*: Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá *centrum grupoidu* $\mathfrak{G}$.

6.9.10. Nechť $\mathfrak{G}$ značí grupoid, jehož pole se skládá ze všech přirozených čísel a násobení je definováno takto: Součin libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je nejmenší společný násobek, příp. největší společný dělitel, čísel a a b. Ukažte, že v obou případech grupoid $\mathfrak{G}$ jest abelovský a asociativní.

7. O DEFORMACI GRUPOIDŮ.

7.1. Definice.

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili (v odst. 6.2), rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^*$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G^* grupoidu $\mathfrak{G}^*$, a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly, které jsme popsali (v kap. 3) při studiu zobrazení množin. Podle této definice týká se tedy pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^*$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem míti nějaký vztah k násobení v grupoidech $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^*$. Pro theorii grupoidů jsou nejdůležitější t. zv. *homomorfní zobrazení,* která, stručně řečeno, jsou charakterisována tím, že zachovávají násobení v obou grupoidech. Podrobná definice je tato:

Libovolné zobrazení $\mathbf{d}$ *grupoidu* $\mathfrak{G}$ *do* $\mathfrak{G}^*$ *se nazývá homomorfní, když součin ab libovolného prvku* $a \in \mathfrak{G}$ *s libovolným prvkem* $b \in \mathfrak{G}$ *je zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení* $\mathbf{d}$, t. j. *když pro* $a, b \in \mathfrak{G}$ *platí rovnost* $\mathbf{d}ab = \mathbf{d}a.\mathbf{d}b$.

Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ *na* grupoid $\mathfrak{G}^*$ se nazývá také *homomorfismus.* Název homomorfní zobrazení je v literatuře ustálen, ale je dlouhý, a proto budeme zpravidla místo něho používati názvu *deformace.*