Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie

§ 3. Zerlegungen auf Mengen

In: Otakar Borůvka (author): Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. (German). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960. pp. 12--19.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401495

7. Jede Verlängerung einer Kette $[\bar{K}]$ ist eine Verfeinerung derselben.

8. Die Gesamtzahl p_{n+1} der auf einer endlichen Menge von der Ordnung $n+1$ ($\geqq 1$) liegenden Zerlegungen ist endlich. Die Zahlen p_{n+1} sind durch die Formel $p_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p_i$ ($p_0 = 1$) gegeben. Man hat also $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15$, $p_5 = 52$, $p_6 = 203, \ldots$.

§ 3. Zerlegungen auf Mengen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit Zerlegungen *auf* Mengen befassen. Wie wir bereits erwähnt haben (§ 2, Nr. 2), kommen die diesbezüglichen Ergebnisse auch für Zerlegungen in Mengen weitgehend zur Geltung, da jede Zerlegung $\bar{A}$ in der Menge G zugleich eine auf der Menge $\boldsymbol{s}\bar{A}$ darstellt.

1. Bindungen in einer Zerlegung. Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen auf G. Wir betrachten beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$.

Unter einer *Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ in der Zerlegung $\bar{A}$ in bezug auf die Zerlegung $\bar{B}$* verstehen wir eine endliche Folge von Elementen in $\bar{A}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \qquad (\alpha \geqq 2),$$

die so beschaffen sind, daß $\bar{a}_1 = \bar{a}$, $\bar{a}_\alpha = \bar{p}$ ist und je zwei benachbarte Glieder $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ ($\beta = 1, \ldots, \alpha - 1$) mit einem Element $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$ inzident sind. Wir sagen, daß eine solche Bindung von der Zerlegung $\bar{B}$ *gebildet* wird. Kürzer sprechen wir von der *Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$* oder von einer *Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$.*

Es ist zu betonen, daß die in einer Bindung vorkommenden Elemente nicht durchweg voneinander verschieden zu sein brauchen.

Wenn eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ existiert, so drücken wir dies auch so aus, daß sich das Element $\bar{p}$ mit dem Element $\bar{a}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ *verbinden* läßt; kürzer sagen wir, daß Element $\bar{p}$ lasse sich mit $\bar{a}$ verbinden.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Bindungen besprechen.

Zunächst ist es leicht einzusehen, und wir möchten die entsprechende Überlegung dem Leser überlassen, daß für beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ die folgenden Behauptungen gelten.

a) *Das Element $\bar{a}$ läßt sich mit sich selbst verbinden.*

b) *Wenn es eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{b}$ und eine von $\bar{b}$ nach $\bar{c}$ gibt, so gibt es auch eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{c}$.*

c) *Wenn es eine Bindung von $\bar{a}$ nach $\bar{b}$ gibt, so gibt es auch eine von $\bar{b}$ nach $\bar{a}$.*

Wegen der nach c) bestehenden Symmetrie bei der Bindung zweier Elemente sprechen wir auch von Bindungen zwischen zwei Elementen, ohne die Anordnung der Elemente zu berücksichtigen.

Wenn sich die Elemente $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{c} \in \bar{A}$ verbinden lassen, so lassen sie sich auch miteinander verbinden; denn nach Voraussetzung läßt sich $\bar{a}$ mit $\bar{c}$ und $\bar{c}$ mit $\bar{b}$, also auch $\bar{a}$ mit $\bar{b}$ verbinden (nach c) und b)).

Wir betrachten nun beliebige Elemente $\bar{a}, \bar{p} \in \bar{A}$, $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ und setzen voraus, daß einerseits die Elemente $\bar{a}, \bar{b}$ und andererseits die Elemente $\bar{p}, \bar{q}$ inzident sind. *Wenn sich dann die Elemente $\bar{a}, \bar{p}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden lassen, so lassen sich auch die Elemente $\bar{b}, \bar{q}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{A}$ verbinden.*

In der Tat, wenn es eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ gibt,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \qquad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}),$$

so sind je zwei benachbarte Glieder $\bar{a}_\beta, \bar{a}_{\beta+1}$ mit einem Element $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$, also auch die Elemente $\bar{b}_\beta, \bar{b}_{\beta+1}$ mit dem Element $\bar{a}_{\beta+1}$ inzident. Außerdem ist das Element $\bar{b}$ mit $\bar{a}_1$ und das Element $\bar{q}$ mit $\bar{a}_\alpha$ inzident. Daraus sehen wir, daß die Folge

$$\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_\alpha \qquad (\bar{b}_0 = \bar{b},\ \bar{b}_\alpha = \bar{q})$$

eine Bindung $\{\bar{B}, \bar{A}\}$ von $\bar{b}$ nach $\bar{q}$ darstellt.

2. Überdeckungen und Verfeinerungen von Zerlegungen auf Mengen. Wir wollen zuerst den bereits in § 2, Nr. 4 definierten Begriff einer Überdeckung (Verfeinerung) einer Zerlegung auf G noch einmal kurz besprechen. Dieser Begriff wird im weiteren eine sehr bedeutende Rolle spielen.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen auf G. Die Zerlegung $\bar{A}(\bar{B})$ heißt *Überdeckung* (*Verfeinerung*) von $\bar{B}(\bar{A})$, wenn jedes Element von $\bar{A}$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{B}$ ist. Diese Beziehung der Überdeckung bzw. Verfeinerung drücken wir durch $\bar{A} \geqq \bar{B}$ oder $\bar{B} \leqq \bar{A}$ aus. Wir haben gesehen, daß man im Fall $\bar{A} \geqq \bar{B}$ die Zerlegung $\bar{B}$ erhält, indem man die einzelnen Elemente von $\bar{A}$ durch passende Zerlegungen dieser Elemente ersetzt, und daß die Zerlegung $\bar{A}$ durch eine passende, auf $\bar{B}$ liegende Zerlegung erzwungen ist.

Wir wollen jetzt die Eigenschaften der obigen Begriffe näher untersuchen.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ Zerlegungen auf G.

Wir zeigen, daß *die Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ dann und nur dann gilt, wenn jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ eine Obermenge auf jedem mit ihm inzidenten Element $\bar{b} \in \bar{B}$ darstellt: $\bar{a} \supset \bar{b}$.*

Beweis. Ist die Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ erfüllt, so ist jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{B}$, also $\bar{a} = \bigcup \bar{b}^*$. Jedes mit $\bar{a}$ inzidente Element $\bar{b} \in \bar{B}$ ist also mit einem Element $\bar{b}^*$ inzident und fällt folglich mit ihm zusammen, da zwei verschiedene Elemente von $\bar{B}$ disjunkt sind. Es ist also $\bar{a} \supset \bar{b}$. Wenn umgekehrt für je zwei inzidente Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ die Beziehung $\bar{a} \supset \bar{b}$ erfüllt ist, so stellt $\bar{a}$ die Summe aller mit ihm inzidenten Elemente von $\bar{B}$ dar, da in diesem Fall jeder Punkt in $\bar{a}$ auch in einem Element von $\bar{B}$ enthalten ist. Daraus folgt $\bar{A} \geqq \bar{B}$.

Ferner gelten die folgenden Aussagen:

a) $\bar{A} \geqq \bar{A}$;

b) *aus* $\bar{A} \geqq \bar{B}, \bar{B} \geqq \bar{C}$ *folgt* $\bar{A} \geqq \bar{C}$;

c) *aus* $\bar{A} \geqq \bar{B}, \bar{B} \geqq \bar{A}$ *folgt* $\bar{A} = \bar{B}$.

Die Gültigkeit von a) und b) ist evident. Im Fall c) schließen wir so: Es sei $\bar{A} \geqq \bar{B}, \bar{B} \geqq \bar{A}$. Wir betrachten ein beliebiges Element $\bar{b} \in \bar{B}$. Aus der

Voraussetzung folgt, daß es Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ mit den Eigenschaften $\bar{a}_1 \supset \bar{b} \supset \bar{a}_2$ gibt. Wir sehen, daß die Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ inzident und folglich identisch sind, da sie derselben Zerlegung $\bar{A}$ angehören. Daraus ergibt sich $\bar{a}_1 = \bar{b} = \bar{a}_2$, $\bar{b} \in \bar{A}$. Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung $\bar{B}$ eine Teilmenge in $\bar{A}$ ist, also $\bar{B} \subset \bar{A}$. Eine ähnliche Überlegung führt zu der Beziehung $\bar{A} \subset \bar{B}$. Daraus folgt $\bar{A} = \bar{B}$.

3. Gemeinsame Überdeckung und gemeinsame Verfeinerung zweier Zerlegungen. Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen auf G.

Unter einer *gemeinsamen Überdeckung* oder einfach *Überdeckung* der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ verstehen wir eine Zerlegung auf G, die jede der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ überdeckt.

Ähnlich definieren wir eine *gemeinsame Verfeinerung* oder einfach *Verfeinerung* der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ als eine Zerlegung auf G, die jede der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ verfeinert.

Zum Beispiel stellt die größte Zerlegung $\bar{G}_{\max}$ auf G eine gemeinsame Überdeckung und die kleinste Zerlegung $\bar{G}_{\min}$ eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ dar.

Es ist leicht einzusehen, daß jede Überdeckung einer gemeinsamen Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ wieder eine gemeinsame Überdeckung von $\bar{A}, \bar{B}$ darstellt; ähnlich ergibt jede Verfeinerung einer gemeinsamen Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ wieder eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$.

Ein wichtiger Fortschritt in der Richtung dieser Betrachtungen, der in zahlreichen bedeutsamen Ergebnissen unserer Ausführungen einen Widerhall findet, besteht in den Begriffen der kleinsten gemeinsamen Überdeckung und der größten gemeinsamen Verfeinerung zweier Zerlegungen. Mit diesen Begriffen werden wir uns in Nr. 4, 5 und 6 beschäftigen.

4. Die kleinste gemeinsame Überdeckung zweier Zerlegungen. In Nr. 3 haben wir gesehen, daß jede Überdeckung einer gemeinsamen Überdeckung zweier Zerlegungen wieder eine Überdeckung dieser Zerlegungen darstellt. Eine wichtige Erkenntnis besteht darin, daß *unter allen gemeinsamen Überdeckungen zweier Zerlegungen genau eine die kleinste ist, und zwar so, daß jede gemeinsame Überdeckung der beiden Zerlegungen zugleich diese kleinste Überdeckung überdeckt.* Diese so ausgezeichnete gemeinsame Überdeckung heißt die *kleinste gemeinsame Überdeckung* oder die *kleinste Überdeckung* der beiden Zerlegungen.

Es seien $\bar{A}, \bar{B}$ Zerlegungen auf G. Von den Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ ausgehend, wollen wir zunächst eine mit $[\bar{A}, \bar{B}]$ zu bezeichnende Zerlegung auf G konstruieren. Dann werden wir die Eigenschaften dieser Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ beschreiben und zeigen, daß $[\bar{A}, \bar{B}]$ die kleinste gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}, \bar{B}$ darstellt.

Es sei $\bar{\bar{A}}$ das System aller durch die folgende Eigenschaft gekennzeichneten Teilmengen von $\bar{A}$: Jede Teilmenge $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ besteht aus allen Elementen von $\bar{A}$, die sich mit einem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ verbinden lassen (im Sinn der in Nr. 1 gegebenen Definition).

Wir zeigen, daß $\bar{\bar{A}}$ eine Zerlegung auf $\bar{A}$ ist.

Zunächst sehen wir, daß jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ in einer Teilmenge $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ enthalten ist. Dies folgt daraus, daß sich das Element $\bar{a}$ mit sich selbst verbinden läßt und folglich in der aus allen Elementen von $\bar{A}$, die sich mit $\bar{a}$ verbinden lassen, bestehenden Teilmenge $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ enthalten ist.

Ferner zeigen wir, daß je zwei Elemente von $\bar{\bar{A}}$ entweder disjunkt oder identisch sind. Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige Elemente $\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{A}}$; $\bar{\bar{a}}$ besteht aus allen Elementen in $\bar{A}$, die sich mit einem bestimmten Element $\bar{a} \in \bar{A}$, und ähnlich $\bar{\bar{b}}$ aus denjenigen, die sich mit einem bestimmten Element $\bar{b} \in \bar{A}$ verbinden lassen. Wir nehmen an, daß die Elemente $\bar{\bar{a}}$ und $\bar{\bar{b}}$ inzident sind, also ein gemeinsames Element $\bar{c} \in \bar{A}$ besitzen. Da dieses Element $\bar{c}$ in $\bar{\bar{a}}$ und auch in $\bar{\bar{b}}$ liegt, kann es mit $\bar{a}$ und auch mit $\bar{b}$ verbunden werden. Daraus schließen wir, daß sich die Elemente $\bar{a}, \bar{b}$ mit $\bar{c}$ und folglich auch miteinander verbinden lassen (Nr. 1). Jedes Element $x \in \bar{\bar{a}}$ läßt sich mit $\bar{a}$ und dieses Element wieder mit $\bar{b}$ verbinden, wie wir soeben gesehen haben. Daraus folgt, daß sich das Element $\bar{x}$ mit $\bar{b}$ verbinden läßt, und es ergibt sich die Beziehung $\bar{\bar{a}} \subset \bar{\bar{b}}$. Eine ähnliche Überlegung führt zu der Beziehung $\bar{\bar{b}} \subset \bar{\bar{a}}$, und wir erhalten $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$. Damit ist gezeigt, daß zwei inzidente Elemente von $\bar{\bar{A}}$ identisch sind.

Durch diese Überlegung haben wir festgestellt, daß das System $\bar{\bar{A}}$ von Untermengen in $\bar{A}$ eine Zerlegung auf $\bar{A}$ darstellt.

Wir wollen beachten, daß sich je zwei in demselben Element von $\bar{\bar{A}}$ enthaltene Elemente von $\bar{A}$ miteinander verbinden lassen, während zwei Elemente, die in verschiedenen Elementen von $\bar{\bar{A}}$ liegen, nie diese Eigenschaft haben.

Die Zerlegung $\bar{\bar{A}}$ erzwingt eine Überdeckung der Zerlegung $\bar{A}$. Diese Überdeckung wollen wir mit $[\bar{A}, \bar{B}]$ bezeichnen. Wir haben also die Beziehung

$$[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}.$$

Wir wollen beachten, daß jedes Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ die Summe aller in einem Element von $\bar{\bar{A}}$ enthaltenen Elemente von $\bar{A}$ darstellt. Wir sehen, daß $\bar{u}$ die Summe aller Elemente von $\bar{A}$ darstellt, die sich mittels der Zerlegung $\bar{B}$ mit irgendeinem Element $\bar{a} \in \bar{A}$, das als Teilmenge in $\bar{u}$ enthalten ist, verbinden lassen.

Nun werden wir über die Eigenschaften der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ sprechen.

Zunächst zeigen wir, daß *die Beziehungen* $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}$ *und* $\bar{A} \geqq \bar{B}$ *gleichzeitig erfüllt sind.*

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}$. Wir betrachten beliebige inzidente Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$ und wollen zeigen, daß $\bar{a} \supset \bar{b}$ ist. Damit wird auch die Gültigkeit der Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{B}$ bewiesen (Nr. 2). Wenn die Beziehung $\bar{a} \supset \bar{b}$ nicht besteht, so gibt es ein mit $\bar{b}$ inzidentes, von $\bar{a}$ verschiedenes Element $\bar{p} \in \bar{A}$, und wir sehen, daß die zweigliedrige Folge $\bar{a}, \bar{p}$ eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$ darstellt. Folglich ist die Menge $\bar{a} \cup \bar{p}$ als Teilmenge in einem Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ enthalten. Dieses Element $\bar{u}$ ist also die Summe von mindestens zwei verschiedenen Elementen von $\bar{A}$ und kann daher nicht als Element in $\bar{A}$ enthalten sein, was jedoch der vorausgesetzten Gleichheit widerspricht. Folglich haben wir $\bar{a} \supset \bar{b}$.

Es sei nun $\bar{A} \geqq \bar{B}$. Wir betrachten ein Element $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. Aus der Definition von $[\bar{A}, \bar{B}]$ folgt die Existenz eines Elements $\bar{a} \in \bar{A}$ mit folgender Eigenschaft: $\bar{u}$ ist die Summe aller Elemente $\bar{p} \in \bar{A}$, für die es eine Bindung $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \qquad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}),$$

gibt. Wir wollen zeigen, daß $\bar{u} = \bar{a}$ ist. Damit wird die Gültigkeit von $[\bar{A}, \bar{B}] \leqq \bar{A}$, also auch (mit Rücksicht auf $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}$) die von $[\bar{A}, \bar{B}] = \bar{A}$ bewiesen. Nun sind je zwei benachbarte Glieder $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_{\beta+1}$ der obigen Bindung mit einem Element $\bar{b}_\beta \in \bar{B}$ inzident; folglich (wegen $\bar{A} \geqq \bar{B}$) enthalten sie $\bar{b}_\beta$ als Teilmenge. Daraus schließt man $\bar{a}_\beta = \bar{a}_{\beta+1}$, also auch $\bar{a} = \bar{p}$, und es ergibt sich $\bar{u} = \bar{a}$.

Ferner gelten die folgenden Aussagen:

a) $[\bar{A}, \bar{B}] = [\bar{B}, \bar{A}]$;

b) $[\bar{A}, \bar{A}] = \bar{A}$;

c) $[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$.

Beweis. a) Es seien $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, $\bar{v} \in [\bar{B}, \bar{A}]$ inzidente Elemente. Da $\bar{u}\,(\bar{v})$ die Summe von einigen Elementen von $\bar{A}\,(\bar{B})$ darstellt, gibt es in $\bar{u}$ bzw. $\bar{v}$ enthaltene und miteinander inzidente Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$ bzw. $\bar{b} \in \bar{B}$, also $\bar{a} \subset \bar{u}$, $\bar{b} \subset \bar{v}$, $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Da die Zerlegung $\bar{A}$ auf der Menge G liegt, ist jeder Punkt $p \in \bar{u}$ in einem Element $\bar{p} \in \bar{A}$ enthalten. Wir sehen, daß $\bar{u} \supset \bar{p}$ ist und daß sich ferner das Element $\bar{p}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}$ mit $\bar{a}$ verbinden läßt. Nun liegt aber auch die Zerlegung $\bar{B}$ auf der Menge G; folglich ist der Punkt p in einem natürlich mit $\bar{p}$ inzidenten Element $\bar{q} \in \bar{B}$ enthalten. Wir sehen (§ 3,1), daß sich das Element $\bar{q}$ mittels der Zerlegung $\bar{A}$ mit $\bar{b}$ verbinden läßt. Wir haben also $\bar{v} \supset \bar{q}$ und folglich auch $\bar{v} \supset \bar{u}$, so daß $[\bar{B}, \bar{A}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$ ist. Aus analogen Gründen gilt auch die Beziehung $\leqq$, und es kommt die obige Gleichheit a) heraus.

b) Dies folgt aus der Beziehung $\bar{A} \geqq \bar{A}$.

c) Wir wollen zunächst folgendes zeigen: Wenn zwei Elemente $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{z} \in [\bar{B}, \bar{C}]$ gemeinsame Punkte haben, so sind sie in demselben Element von $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$ enthalten. In der Tat, dann gibt es Elemente $\bar{b}, \bar{q} \in \bar{B}$ derart, daß die Beziehungen $\bar{b}, \bar{q} \subset \bar{z}$ bestehen, $\bar{a}_1$ mit $\bar{b}$ und $\bar{a}_2$ mit $\bar{q}$ inzident ist und eine Bindung $\{\bar{B}, \bar{C}\}$ von $\bar{b}$ nach $\bar{q}$,

$$\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_\gamma \qquad (\bar{b}_1 = \bar{b},\ \bar{b}_\gamma = \bar{q}),$$

existiert. Jedes Glied $\bar{b}_\delta (\delta = 1, \ldots, \gamma)$ ist in einem bestimmten Element $\bar{u}_\delta \in [\bar{B}, \bar{A}] = [\bar{A}, \bar{B}]$ als Teilmenge enthalten. Da das Element $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$ mit $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_\gamma)$ inzident und $\bar{b}_1$ $(\bar{b}_\gamma)$ in $\bar{u}_1$ $(\bar{u}_\gamma)$ enthalten ist, ist $\bar{a}_1$ $(\bar{a}_2)$ mit $\bar{u}_1$ $(\bar{u}_\gamma)$ inzident, und wir haben $\bar{a}_1 \subset \bar{u}_1$, $\bar{a}_2 \subset \bar{u}_\gamma$. Da ferner zwei benachbarte Glieder $\bar{b}_\delta$, $\bar{b}_{\delta+1}$ mit einem Element $\bar{c}_\delta \in \bar{C}$ inzident sind, gilt dasselbe von je zwei Elementen $\bar{u}_\delta$, $\bar{u}_{\delta+1}$, und wir sehen, daß die Folge $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_\gamma$ eine Bindung $\{[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}\}$ von $\bar{u}_1$ nach $\bar{u}_\gamma$ darstellt. Daraus schließen wir, daß die Elemente $\bar{u}_1$, $\bar{u}_\gamma$ und folglich auch die $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ in demselben Element von $[[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}]$ enthalten sind.

Es seien nun $\bar{u} \in [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$, $\bar{v} \in [[\bar{A}, \bar{B}],\bar{C}]$ beliebige inzidente Elemente. Dann gibt es ein Element $\bar{a} \in \bar{A}$ derart, daß $\bar{a} \subset \bar{u} \cap \bar{v}$ ist und $\bar{u}$ die Summe aller Elemente $\bar{p} \in \bar{A}$ darstellt, zu denen eine Bindung $\{\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]\}$ von $\bar{a}$ nach $\bar{p}$,

$$\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_\alpha \qquad (\bar{a}_1 = \bar{a},\ \bar{a}_\alpha = \bar{p}),$$

existiert. Je zwei benachbarte Glieder $\bar{a}_\beta\ \bar{a}_{\beta+1}$, sind mit einem Element von $[\bar{B}, \bar{C}]$ inzident und demnach, wie wir soeben gesehen haben, in demselben Element von $[[\bar{A}, \bar{B}],\bar{C}]$ enthalten. Daraus und mit Rücksicht auf die Beziehung $\bar{v} \supset \bar{a}_1$ folgt $\bar{v} \supset \bar{a}_\alpha$, also $\bar{v} \supset \bar{p}$. Es ergibt sich also $\bar{v} \supset \bar{u}$ und folglich auch $[[\bar{A}, \bar{B}],\bar{C}] \geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]]$. Dieses und das obige Resultat a) führen auf die Beziehungen

$$\begin{aligned}[\bar{A},[\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{B}, \bar{C}], \bar{A}] \geqq [\bar{B},[\bar{C}, \bar{A}]] = [[\bar{C}, \bar{A}],\bar{B}]\\ \geqq [\bar{C},[\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{A}, \bar{B}], \bar{C}] \geqq [\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]],\end{aligned}$$

und wir erhalten (§ 3,2c)

$$[\bar{A}, [\bar{B}, \bar{C}]] = [[\bar{A}, \bar{B}],\bar{C}].$$

Damit ist der Beweis beendet.

Diese Ergebnisse ermöglichen den Beweis, daß die Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ die kleinste gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ darstellt.

In der Tat, die Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ ist nach ihrer Konstruktion eine Überdeckung von $\bar{A}$ und nach der Aussage a) auch eine von $\bar{B}$. Die Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$ stellt demnach eine gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ dar. Es sei nun $\bar{X}$ eine beliebige gemeinsame Überdeckung dieser Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$. Dann haben wir die Gleichheiten

$$[\bar{X}, \bar{A}] = \bar{X},\ [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X}$$

und ferner, nach der Aussage c),

$$[\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]] = [[\bar{X}, \bar{A}], \bar{B}] = [\bar{X}, \bar{B}] = \bar{X}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung $\bar{X}$ eine Überdeckung von $[\bar{A}, \bar{B}]$ darstellt.

Jede gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist demnach eine Überdeckung der Zerlegung $[\bar{A}, \bar{B}]$, die selbst eine gemeinsame Überdeckung von $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist. Wir sehen, daß *die Zerlegung* $[\bar{A}, \bar{B}]$ *die kleinste gemeinsame Überdeckung der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *darstellt.*

5. Die größte gemeinsame Verfeinerung zweier Zerlegungen. In Nr. 3 haben wir gesehen, daß jede Verfeinerung einer gemeinsamen Verfeinerung zweier Zerlegungen wieder eine Verfeinerung dieser Zerlegungen darstellt. Eine wichtige Erkenntnis besteht darin, daß *unter allen gemeinsamen Verfeinerungen zweier Zerlegungen genau eine die größte ist, und zwar so, daß jede gemeinsame Verfeinerung der beiden Zerlegungen zugleich diese größte Verfeinerung verfeinert.* Diese so ausgezeichnete gemeinsame Verfeinerung heißt die *größte gemeinsame Verfeinerung* oder die *größte Verfeinerung* der beiden Zerlegungen.

Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$ Zerlegungen auf G. Von diesen Zerlegungen ausgehend, wollen wir zunächst eine mit $(\bar{A}, \bar{B})$ zu bezeichnende Zerlegung auf G konstruieren. Dann werden wir die Eigenschaften dieser Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ beschreiben und zeigen, daß die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ die größte gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ darstellt.

Die Konstruktion der Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ ist die folgende: Wenn wir jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ durch seine Zerlegung $\bar{a} \sqcap \bar{B}$ ersetzen, so erhalten wir eine Zerlegung auf G, die wir eben mit $(\bar{A}, \bar{B})$ bezeichnen.

Die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ besteht demnach aus allen nicht leeren Durchschnitten je eines Elements $\bar{a} \in \bar{A}$ mit einem Element $\bar{b} \in \bar{B}$. Sie fällt also mit der Durchdringung $\bar{A} \sqcap \bar{B}$ zusammen.

Die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ stellt offenbar eine Verfeinerung von $\bar{A}$ dar, also ist

$$(\bar{A}, \bar{B}) \leqq \bar{A}.$$

Wir wollen nun die Eigenschaften der Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ beschreiben.

Zunächst zeigen wir, daß *die Beziehungen* $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A}$ *und* $\bar{A} \leqq \bar{B}$ *gleichzeitig erfüllt sind.*

Beweis. Wir nehmen an, es gelte $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A}$, und betrachten beliebige inzidente Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Sie erfüllen die Beziehungen $\bar{a} \cap \bar{b} \in \bar{a} \sqcap \bar{B} \subset (\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A}$, also auch $\bar{a} \cap \bar{b} = \bar{a}$. Daraus folgt $\bar{a} \subset \bar{b}$ und ferner $\bar{A} \leqq \bar{B}$ (Nr. 2).

Es sei nun $\bar{A} \leqq \bar{B}$. Dann ist jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ als Teilmenge in einem Element von $\bar{B}$ enthalten, und wir sehen, daß die Durchdringung $\bar{a} \sqcap \bar{B}$ von dem einzigen Element $\bar{a}$ gebildet wird. Daraus folgt $(\bar{A}, \bar{B}) \geqq \bar{A}$. Da aber zugleich die Beziehung $\leqq$ besteht, wie wir oben gesehen haben, gilt die erwünschte Gleichheit.

Ferner gelten die folgenden Aussagen:

a) $(\bar{A}, \bar{B}) = (\bar{B}, \bar{A})$;
b) $(\bar{A}, \bar{A}) = \bar{A}$;
c) $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) = ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$.

Beweis. a) Jedes Element $\bar{v} \in (\bar{A}, \bar{B})$ gehört zu der Durchdringung $\bar{a} \sqcap \bar{B}$ eines geeigneten Elements $\bar{a} \in \bar{A}$ mit der Zerlegung $\bar{B}$. Wir sehen, daß $\bar{v} = \bar{a} \cap \bar{b}$ ist, wobei $\bar{b} \in \bar{B}$ ein passendes Element bedeutet. Daraus folgt nun aber $\bar{v} \in \bar{b} \sqcap \bar{A} \subset (\bar{B}, \bar{A})$ und ferner die Beziehung $(\bar{A}, \bar{B}) \subset (\bar{B}, \bar{A})$. Aus analogen Gründen besteht auch die Beziehung $\supset$, und es ergibt sich die obige Gleichheit. Übrigens folgt diese Gleichheit aus $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ und aus der in § 2, Nr. 3 festgestellten Gleichheit $\bar{A} \sqcap \bar{B} = \bar{B} \sqcap \bar{A}$.

b) Dies folgt aus der Beziehung $\bar{A} \leqq \bar{A}$.

c) Es sei $\bar{v} \in (\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C}))$ ein beliebiges Element, also $\bar{v} = \bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c})$ mit passenden Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{c} \in \bar{C}$. Aus $\bar{a} \cap (\bar{b} \cap \bar{c}) = (\bar{a} \cap \bar{b}) \cap \bar{c} \in ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$ folgt die Gültigkeit der Beziehung $(\bar{A}, (\bar{B}, \bar{C})) \subset ((\bar{A}, \bar{B}), \bar{C})$ und aus dieser mit Rücksicht auf das Ergebnis a) auch diejenige von $\supset$. Damit ist der Satz bewiesen.

Unsere Ergebnisse ermöglichen es zu zeigen, daß die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ die größte gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ darstellt.

In der Tat, die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ ist nach ihrer Konstruktion eine Verfeinerung von $\bar{A}$ und nach der Aussage a) auch eine solche von $\bar{B}$. Die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ stellt demnach eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ dar. Es sei nun $\bar{Y}$ eine beliebige gemeinsame Verfeinerung von $\bar{A}, \bar{B}$. Dann haben wir die Gleichheiten

$$(\bar{Y}, \bar{A}) = \bar{Y}, \qquad (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y}$$

und ferner, nach der Aussage c),

$$(\bar{Y}, (\bar{A}, \bar{B})) = ((\bar{Y}, \bar{A}), \bar{B}) = (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung $\bar{Y}$ eine Verfeinerung von $(\bar{A}, \bar{B})$ darstellt.

Jede gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist demnach eine Verfeinerung der Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$, die selbst eine gemeinsame Verfeinerung von $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist. Wir sehen, daß *die Zerlegung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *die größte gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *darstellt.*

6. Beziehungen zwischen der kleinsten gemeinsamen Überdeckung und der größten gemeinsamen Verfeinerung zweier Zerlegungen. Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$ Zerlegungen auf G.

Zwischen der kleinsten gemeinsamen Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ *und der größten gemeinsamen Verfeinerung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *bestehen die Beziehungen*

$$[\bar{A}, (\bar{A}, \bar{B})] = \bar{A}, \qquad (\bar{A}, [\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{A}.$$

Die Behauptung drückt nämlich die Beziehungen $\bar{A} \geqq (\bar{A}, \bar{B})$ und $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}$ aus (Nr. 4 und 5).

7. Übungsaufgaben.

1. Für beliebige Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf G folgt aus $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{b} \in \bar{B}$, $\boldsymbol{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) = \boldsymbol{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{A}) = \bar{u}$ die Beziehung $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$.

2. Für je drei der Bedingung $\bar{X} \geqq \bar{A}$ genügende Zerlegungen $\bar{X}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf G gilt

a) $[\bar{X}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$, $(\bar{X}, \bar{B}) \geqq (\bar{A}, \bar{B})$; b) $(\bar{X}, [\bar{A}, \bar{B}]) \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$.

3. Der Leser möge an einem Beispiel zeigen, daß in der Beziehung b) von Aufgabe 2 das Gleichheitszeichen nicht zu gelten braucht.

§ 4. Spezielle Zerlegungen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit einigen für die weiteren Ausführungen wichtigen Tatsachen befassen, in denen gewisse, aus Zerlegungen in bzw. auf der Menge G bestehende Gebilde mit speziellen gegenseitigen Beziehungen auftreten.