§ 20. Nebenklassen in Gruppen

1. Definition. Wir betrachten eine Gruppe $\mathfrak{G}$ und eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$, und p sei ein beliebiges Element in $\mathfrak{G}$.

Die Untermenge $p\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$, also die von den Produkten aus p und je einem Element in $\mathfrak{A}$ gebildete Menge, heißt die *linksseitige Nebenklasse* (auch *Nebengruppe, Nebenkomplex* oder *Restklasse*) *des Elements p in bezug auf* $\mathfrak{A}$ oder die *linksseitige Nebenklasse von p*; analog heißt die Untermenge $\mathfrak{A}p$, also die von den Produkten aus je einem Element in $\mathfrak{A}$ und p gebildete Menge, die *rechtsseitige Nebenklasse* (*Nebengruppe*, usw.) *des Elements p in bezug auf* $\mathfrak{A}$ oder die *rechtsseitige Nebenklasse von p*.

Zu dieser Definition wollen wir bemerken, daß das Feld A von $\mathfrak{A}$ zugleich die links- und rechtsseitige Nebenklasse des Einselements $\underline{1}$ in bezug auf $\mathfrak{A}$ darstellt.

2. Eigenschaften der Nebenklassen. Wir wollen nun in den folgenden Sätzen die einfachsten Eigenschaften der linksseitigen Nebenklassen beschreiben. Die Eigenschaften der rechtsseitigen Nebenklassen sind durchaus analog und sollen deshalb hier nicht angegeben werden; der Leser möge sie sich dennoch einzeln formulieren und durchdenken.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe, und p, q seien beliebige Elemente in $\mathfrak{G}$.

Satz 1. *Die Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ enthält das Element p.*

Da $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe ist, haben wir nämlich $\underline{1} \in \mathfrak{A}$, woraus $p = p\underline{1} \in p\mathfrak{A}$ folgt.

Satz 2. *Es ist $p\mathfrak{A} = A$* (A bedeutet das Feld von $\mathfrak{A}$) *genau dann, wenn $p \in \mathfrak{A}$ ist.*

Beweis. a) Es sei $p \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe ist, liegt das Produkt pa für jedes $a \in \mathfrak{A}$ wiederum in $\mathfrak{A}$; daraus folgt $p\mathfrak{A} \subset A$. Ferner gilt $p^{-1} \in \mathfrak{A}$, und für jedes $a \in \mathfrak{A}$ haben wir $p^{-1}a \in \mathfrak{A}$; daraus folgt $p(p^{-1}a) \in p\mathfrak{A}$. Wegen $p(p^{-1}a) = (pp^{-1})a = \underline{1}a = a$ haben wir $a \in p\mathfrak{A}$, also auch $A \subset p\mathfrak{A}$. Es gilt also $p\mathfrak{A} = A$.

b) Aus $p\mathfrak{A} = A$ schließen wir, daß das Produkt pa für jedes $a \in \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist; daraus folgt $p \in \mathfrak{A}$ (für $a = \underline{1}$).

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung von Satz 2 dar:

Satz 3. *Es gilt $p\mathfrak{A} = q\mathfrak{A}$ genau dann, wenn $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$ ist.*

In der Tat, wenn $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$ ist, so gilt nach Satz 2 die Gleichheit $p^{-1}q\,\mathfrak{A} = A$; folglich haben wir $q\mathfrak{A} = (pp^{-1})q\mathfrak{A} = p(p^{-1}q)\mathfrak{A} = p(p^{-1}q\mathfrak{A}) = p\mathfrak{A}$. Umgekehrt folgt aus $q\mathfrak{A} = p\mathfrak{A}$ die Gleichheit $(p^{-1}q)\mathfrak{A} = A$, also $p^{-1}q \in \mathfrak{A}$ nach Satz 2.

Satz 4. *Die linksseitigen Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ sind entweder disjunkt oder einander gleich.*

Diese wichtige Eigenschaft folgt aus der folgenden Erwägung: Wenn die linksseitigen Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ ein Element x gemeinsam haben, so ist

$x \in p\mathfrak{A}, x \in q\mathfrak{A}$ und folglich auch $p^{-1}x \in \mathfrak{A}, q^{-1}x \in \mathfrak{A}$; daraus ergeben sich wegen Satz 2 die Gleichheiten $p\mathfrak{A} = x\mathfrak{A} = q\mathfrak{A}$, so daß tatsächlich die beiden linksseitigen Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ einander gleich sind.

Satz 5. *Die linksseitigen Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{A}$ sind äquivalente Mengen.*

Wir haben zu zeigen, daß es eine schlichte Abbildung der Menge $p\mathfrak{A}$ auf die Menge $q\mathfrak{A}$ gibt. Jedes Element in $p\mathfrak{A}$ $(q\mathfrak{A})$ stellt das Produkt pa (qa) aus dem Element $p(q)$ und einem geeigneten Element $a \in \mathfrak{A}$ dar; dieses Element a ist eindeutig bestimmt, da aus $pa = pb(qa = qb)$ die Gleichheit $a = b$ folgt. Umgekehrt haben wir für jedes $a \in \mathfrak{A} : pa \in p\mathfrak{A}(qa \in q\mathfrak{A})$. Wir sehen, daß die Abbildung $\begin{pmatrix} pa \\ a \end{pmatrix}$ eine schlichte Abbildung der Menge $p\mathfrak{A}$ auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ und ähnlich $\begin{pmatrix} a \\ qa \end{pmatrix}$ eine schlichte Abbildung der Untergruppe $\mathfrak{A}$ auf die Menge $q\mathfrak{A}$ darstellt. Folglich stellt die zusammengesetzte Abbildung $\begin{pmatrix} a \\ qa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} pa \\ a \end{pmatrix}$ eine schlichte Abbildung der Menge $p\mathfrak{A}$ auf die Menge $q\mathfrak{A}$ dar, womit der Satz bewiesen ist.

Wir wollen nun unsere Überlegungen dahin erweitern, daß wir neben der Untergruppe $\mathfrak{A}$ noch eine weitere Untergruppe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ betrachten.

Satz 6. *Wenn die linksseitigen Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{B}$ inzident sind, so stellt ihr Durchschnitt $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$ die linksseitige Nebenklasse eines jeden in ihm enthaltenen Elementes in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ dar.*

Beweis. Wenn zwei Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{B}$ ein Element $c \in \mathfrak{G}$ gemeinsam haben, so gelten nach Satz 1 und 2 die Gleichheiten $p\mathfrak{A} = c\mathfrak{A}$, $q\mathfrak{B} = c\mathfrak{B}$, aus denen $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} = c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$ folgt. Jedes Element $x \in c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$ ist das Produkt aus c und einem Element $a \in \mathfrak{A}$ und zugleich ein Produkt aus c und einem Element $b \in \mathfrak{B}$, so daß $x = ca = cb$ gilt. Aus diesen Gleichheiten schließen wir auf das Bestehen der Beziehungen $a = b \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, aus denen $x \in c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ folgt. Wir haben also $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} \subset c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$. Ferner ist jedes Element $x \in c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ das Produkt aus c und einem Element $a \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, so daß $x = ca \in c\mathfrak{A} \cap c\mathfrak{B}$ gilt. Daraus erhalten wir $c(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \subset p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 7. *Wenn $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ gilt, so folgt aus der Inzidenz von zwei Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{B}$ die Beziehung $p\mathfrak{A} \subset q\mathfrak{B}$.*

In der Tat, aus $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ folgt nach § 1, Nr. 10,3 die Beziehung $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$; auf Grund der Sätze 6 und 4 folgt aus der Inzidenz der Nebenklassen $p\mathfrak{A}, q\mathfrak{B}$ die Gleichheit $p\mathfrak{A} \cap q\mathfrak{B} = p\mathfrak{A}$, so daß $p\mathfrak{A} \subset q\mathfrak{B}$ ist (§ 1, Nr. 10,3).

Wie wir bereits bemerkt haben, sind die Eigenschaften der rechtsseitigen Nebenklassen den obigen durchaus analog. Zwischen den linksseitigen und den rechtsseitigen Nebenklassen in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ bestehen die folgenden Beziehungen:

Satz 8. *Die linksseitige Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ wird durch die Inversion $\mathfrak{n}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{A}p^{-1}$ abgebildet, also $\mathfrak{n}(p\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}p^{-1}$. Analog gilt $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}p) = p^{-1}\mathfrak{A}$.*

Beweis. Aus $x \in p\mathfrak{A}$ folgt $x = pa \, (a \in \mathfrak{A})$, und aus $x^{-1} = a^{-1}p^{-1} \, (a^{-1} \in \mathfrak{A})$ ergibt sich $x^{-1} \in \mathfrak{A}p^{-1}$. Es gilt also $\boldsymbol{n}(p\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}p^{-1}$. Außerdem ist jeder Punkt $y = a'p^{-1} \in \mathfrak{A}p^{-1} \, (a' \in \mathfrak{A})$ das $\boldsymbol{n}$-Bild von $pa'^{-1} \in p\mathfrak{A} \, (a'^{-1} \in \mathfrak{A})$; es gilt also $\mathfrak{A}p^{-1} \subset \boldsymbol{n}(p\mathfrak{A})$. Somit erhalten wir $\boldsymbol{n}(p\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}p^{-1}$.

Bemerkung. Man nennt jede der beiden Nebenklassen $p\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}p^{-1}$ zu der anderen *invers* und spricht von *zueinander inversen Nebenklassen*. Wird eine von ihnen etwa mit $\bar{a}$ bezeichnet, so wendet man für die andere die Bezeichnung $\bar{a}^{-1}$ an.

Satz 9. *Die linksseitige Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ und die rechtsseitige Nebenklasse $\mathfrak{A}q$ stellen jeweils äquivalente Mengen dar.*

Beweis. Nach Satz 8 und nach § 7, Nr. 3,4 sind die Mengen $p\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}p^{-1}$ miteinander äquivalent; nach dem zu Satz 5 analogen Satz für rechtsseitige Nebenklassen haben die Mengen $\mathfrak{A}p^{-1}$, $\mathfrak{A}q$ dieselbe Eigenschaft. Daraus folgt die Behauptung nach § 6, Nr. 10,7.

3. Übungsaufgaben.

1. In einer abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ stimmen die linksseitige und die rechtsseitige Nebenklasse jedes Punktes $p \in \mathfrak{G}$ in bezug auf eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ überein, also $p\mathfrak{A} = \mathfrak{A}p$.

2. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beliebige Untergruppen und C ein Komplex in $\mathfrak{G}$. Es soll gezeigt werden: a) Die Summe aller mit C inzidenten linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{A}$ wird von dem Komplex $C\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}C$) dargestellt; b) die Summe $\mathfrak{B}p\mathfrak{A}$ aller mit irgendeiner rechtsseitigen Nebenklasse $\mathfrak{B}p \, (p \in \mathfrak{G})$ inzidenten linksseitigen Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{A}$ stimmt mit der Summe aller mit der linksseitigen Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ inzidenten rechtsseitigen Nebenklassen in bezug auf $\mathfrak{B}$ überein.

3. Es sei $p \in \mathfrak{G}$ ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathring{\mathfrak{G}}$ die mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ assoziierte (p)-Gruppe (§ 19, Nr. 7, 9). Wir betrachten eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$. Es soll gezeigt werden: a) Die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklasse $p\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}p$) des Elements p in bezug auf die Untergruppe $\mathfrak{A}$ stellt das Feld einer Untergruppe $\mathring{\mathfrak{A}}_l \subset \mathring{\mathfrak{G}}$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_r \subset \mathring{\mathfrak{G}}$) in $\mathring{\mathfrak{G}}$ dar; b) für jedes Element x in $\mathring{\mathfrak{G}}$ bzw. in $\mathfrak{G}$ stimmt die linksseitige (rechtsseitige) Nebenklasse $x \circ \mathring{\mathfrak{A}}_l$ ($\mathring{\mathfrak{A}}_r \circ x$) mit der linksseitigen (rechtsseitigen) Nebenklasse $x\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}x$) überein.

§ 21. Nebenklassenzerlegungen in Gruppen

Eine überaus wichtige Eigenschaft von Gruppen besteht darin, daß durch jede Untergruppe einer Gruppe gewisse Zerlegungen auf dieser Gruppe bestimmt werden.

1. Der Begriff der Nebenklassenzerlegung auf Gruppen. Wir betrachten die von allen linksseitigen Nebenklassen in bezug auf eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ gebildete Menge. Nach Satz 1 aus § 20, Nr. 2 ist jeder Punkt $p \in \mathfrak{G}$ in der